Boletim

SOCIEDADE PORTUGUESA DE ESTATÍSTICA

Publicação semestral — *Outono de 2008*

Processos Estocásticos

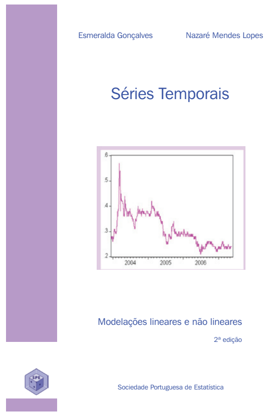
Informação Editorial

Endereço: Sociedade Portuguesa de Estatística.
Campo Grande. Bloco C6. Piso 4.
1749-016 Lisboa. Portugal.
Telefone: +351.217500120
e-mail: *spe@fc.ul.pt*
URL: http://www.spestatistica.pt
ISSN: 1646-5903
Depósito Legal: 249102/06
Tiragem: 1000 exemplares
Execução Gráfica e Impressão: Gráfica Sobreirense
Editor: Fernando Rosado, *fernando.rosado@fc.ul.pt*

Este Boletim tem o apoio da FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

Novas Edições SPE

Título: Séries temporais. Modelações lineares e não lineares. 2ª edição, revista e aumentada.
Autoras: Esmeralda Gonçalves e Nazaré Mendes Lopes
Editora: Sociedade Portuguesa de Estatística
Ano: 2008
ISBN: 978-972-8890-16-2
Páginas: xxiv+298
Custo 10 Euros



Os interessados podem adquirir esta nova edição no INE
e brevemente em algumas livrarias.

NOTA DA SPE – Sobre as “Segundas Edições dos livros dos mini - cursos"

Os manuais que a Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE) tem vindo a editar anualmente para suporte do mini-curso que decorre no início de cada congresso Anual da SPE têm sido muito solicitados, quer por docentes dos ensinos universitário e politécnico para serem usados como textos de apoio de várias unidades curriculares de estudos graduados e pós-graduados, quer por investigadores teóricos e aplicados para apoio ao seu trabalho de investigação, quer ainda por estatísticos profissionais para utilização no exercício da sua actividade. Temos mesmo tido solicitações provenientes de outros países de língua portuguesa ou de colegas estrangeiros que entendem o português. Os poucos exemplares que sobram dos Congressos rapidamente se têm esgotado, pelo que a Direcção da SPE sentiu a necessidade de proceder a segundas edições para melhor servir a comunidade. É também a oportunidade para os autores, escolhidos de entre os mais reputados especialistas nacionais da respectiva área, poderem corrigir as inevitáveis gralhas da primeira edição e introduzirem algumas melhorias e actualizações que considerem justificadas. O Instituto Nacional de Estatística (INE) é uma instituição com a qual temos tido intensa e frutuosa colaboração e que, nos últimos anos, tem impresso os manuais dos mini-cursos. O INE aceitou ser nosso parceiro nesta iniciativa editorial, encarregando-se da impressão e distribuição destas segundas edições, o que nos dá a garantia de um fácil acesso por parte dos interessados. Estamos muito gratos ao INE por mais esta valiosa colaboração. Note-se que se trata de manuais sobre temas especializados que dificilmente poderiam ser editados por editoras comerciais (ou só poderiam sê-lo a um custo unitário elevado), uma vez que o público a que se dirigem é relativamente limitado. Graças à generosidade dos autores, que prescindem dos seus direitos de autor, ao formato de bolso (que, além de cómodo, permite menores custos de produção) e ao facto de a SPE e o INE apoiarem estas edições, é possível elas chegarem ao leitor a preços muito moderados. Com esta iniciativa, a SPE e o INE põem ao dispor da comunidade académica e da comunidade estatística e dos utilizadores de metodologias estatísticas textos em língua portuguesa de elevada qualidade científica e pedagógica cobrindo temas importantes e actuais das Probabilidades e da Estatística, que podem funcionar como manuais escolares para o ensino superior e como apoio à investigação e à prática profissional. Esta é a primeira das segundas edições que nos propomos disponibilizar. Não houve para isso qualquer razão especial, a não ser o facto de, logo a seguir à decisão da Direcção da SPE de lançar esta iniciativa, terem, por mera coincidência, as autoras solicitado autorização para lançarem uma segunda edição da obra (esgotada há já algum tempo), que aliás têm usado há vários anos nas suas aulas e daí colhido uma preciosa experiência muito útil no trabalho de revisão. Prontamente aceitaram que essa segunda edição fosse também editada pela SPE. Por isso lhes estamos gratos, bem como pela sua paciência já que, tendo esta obra servido de cobaia para esta iniciativa, houve alguns atrasos decorrentes da necessidade de definir e acordar questões organizativas e processuais. Trata-se, naturalmente, de uma importante obra que nos orgulhamos de editar e que esperamos possa ser muito útil ao leitor.

O Presidente da SPE
Carlos A. Braumann

Editorial

… em crescimento sustentado…

Com o incentivo da comunidade, o *Boletim SPE* tem crescido… e esse avanço tem produzido, como principal consequência, o aumento do número de páginas – mais em uns e menos em outros!
Este Boletim de Outono fornece um novo record para o número de páginas. O anterior formato com dobragem, principalmente a gramagem do papel utilizado, não permitia aumentar o número de páginas. Foi aproveitada esta edição para criar um novo modelo com capa mais rija e diferente das restantes páginas. Salientando a capa fez-se uma pequena alteração gráfica na página de rosto. Esperamos que seja do agrado dos leitores.
Pouco a pouco, passo a passo com nova imagem - maior mas não “mais gordo”, com mais espaço, com mais oportunidades de divulgação, é mais fácil a gestão das contribuições dos especialistas dos mais diversos campos.

Sempre com o interesse primeiro de divulgação da Ciência Estatística!

O modelo editorial, usado na fase mais recente do *Boletim SPE*, tem vivido com as seguintes secções, a saber: Mensagem do Presidente, Notícias, SPE e a Comunidade, Tema Central, Ciência Estatística e um espaço do editor. Em cada edição de Primavera ou Outono - conforme os casos e a oportunidade - temos divulgado os Prémios, com apoio, instituídos pela SPE: o Prémio SPE e os Prémios Estatístico Júnior. Além de um espaço noticioso, cada edição junta contribuições relevantes - com os textos científicos do tema central e com os escritos “mais ligeiros” de SPE e a Comunidade. Pretende-se que estes sejam da mais ampla divulgação, especializados quanto baste, mas muito abrangentes; especialmente pelas aplicações e os campos diversificados de outras ciências com quem se partilha a investigação estatística.
O papel usado até à presente edição limitava o aumento do número de páginas devido à sua espessura e a consequente dificuldade na dobragem. Também, a capa e o miolo estavam impressos no mesmo tipo de papel. A capa desta edição passa a ser mais grossa e assim, com facilidade, podemos aumentar o número de páginas sempre que a respectiva edição o exija. É o caso deste Boletim de Outono que não caberia nas possíveis cinquenta e seis páginas do anterior formato.
Aproveitámos e mudámos o aspecto gráfico da capa. Mantemos o cabeçalho inalterado com o logótipo oficial da Sociedade Portuguesa de Estatística. A restante informação de capa será apresentada por contraste em caixas com fundo de uma das cores do logótipo da SPE.
A solicitação dos leitores e autores de algumas contribuições tem estimulado o crescimento sustentado a que temos assistido. A partir da presente edição, esta publicação da SPE dá mais um pequeno passo afirmando-se como Boletim!
Porque, na alteração executada, apenas “transferimos” matéria prima do miolo para a capa, o acréscimo no orçamento da edição, correspondente ao aumento do número de páginas não é significativo e o custo da expedição não é alterado pois o escalão da taxa de correios será o mesmo.

A partir desta edição, com mais espaço, há maior incentivo à publicação…
A partir desta edição, com mais espaço, partilhe (ainda mais)!...

Um crescimento natural com o apoio daqueles que desejam ver bem cumprida a missão da SPE. Alargamos horizontes e, também, com maior possibilidade de publicação poderemos aumentar a temática da edição. Este crescimento sustentado será, basicamente, usado pela secção SPE e a Comunidade.
Uma palavra final de agradecimento à Direcção da SPE pelo incondicional apoio para esta nova caminhada que lhe foi proposta.

O *Boletim Primavera de 2009* abordará o tema *Investigação (em) Estatística*.

Fernando Rosado

Mensagem do Presidente

Caros Colegas:

Realizou-se em Vila Real, de 1 a 4 de Outubro de 2008, o nosso XVI Congresso Anual. Voltámos assim à data habitual depois de um ano de 2007 em que o nosso Congresso decorreu em Agosto para proporcionar uma melhor articulação com a 56ª Sessão do International Statistical Institute, que se realizou em Lisboa imediatamente a seguir. A Comissão Organizadora do XVI Congresso, presidida pela nossa Colega Irene Oliveira, está de parabéns pelo indiscutível sucesso do Congresso e pelo excelente trabalho organizativo, como de parabéns estão a instituição anfitriã, a Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, os membros da Comissão Executiva e Científica, os presidentes das sessões de trabalho, os oradores convidados, os autores das comunicações (em número record) e todos os participantes. Todos deram um contributo importante para a festa anual da comunidade estatística nacional.
Durante o XVI Congresso, saíram as Actas do XV Congresso, um registo bem revelador da qualidade e relevância do labor dos estatísticos portugueses em 2007. Está de parabéns a Comissão Organizadora deste Congresso, do ISCTE, presidida pela nossa Colega Manuela Magalhães Hill, que concluiu assim a missão que tão brilhantemente desempenhou.
O Prémio SPE 2008 premiou mais uma vez um trabalho científico de um jovem investigador que se destacou pela sua qualidade e que foi apresentado no XVI Congresso. Também no XVI Congresso tivemos de novo os Prémios Estatístico Júnior, a que se candidataram um número record de trabalhos escolares dos ensinos básico e secundário, com a coordenação do Colega Russell Alpízar-Jara e da Comissão Especializada de Educação e o apoio da Porto Editora. É uma forma de incentivarmos o gosto pela Estatística na juventude portuguesa. Aos candidatos e aos júris de ambos os prémios, o nosso agradecimento.

E é altura de vos convidar para o XVII Congresso. A Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa é a anfitriã e a Comissão Organizadora é presidida pelo Colega João Tiago Mexia. Já estive com o Colega Manuel Esquível, que coordena esta matéria na Comissão Organizadora, a visitar possíveis locais para a sua realização, faltando, porém, ainda acertar alguns pormenores importantes. Brevemente vos darei notícias do local escolhido.

Em Agosto de 2008, realizou-se em Portugal, no Porto, um evento internacional muito importante, o COMPSTAT 2008. Mais uma prova do reconhecimento pela comunidade internacional do trabalho dos investigadores portugueses na área da Estatística. A Comissão Organizadora foi presidida pela Colega Maria Paula Brito e o seu trabalho mereceu os maiores encómios dos participantes, como pude constatar pessoalmente. A SPE, como não podia deixar de ser, foi um dos apoiantes deste relevante evento.

Tenho vindo a enviar-vos notícias do que se vai passando, agora de uma forma mais organizada para não bombardear os Colegas com sucessivos e-mails. Em todo o caso, queria salientar que o nosso "site" já tem uma versão inglesa, com o objectivo de facilitar a cooperação internacional. Por outro lado, prosseguiram os Encontros SPE-CIM, cujo arranque vos tinha anunciado o ano passado, e saiu, numa parceria com o INE, a primeira das segundas edições revistas dos manuais dos mini cursos que estavam esgotados, de que encontram notícia numa das páginas deste Boletim.

Certamente sabem que os actuais membros da Mesa da Assembleia Geral, da Direcção e do Conselho Fiscal, se recandidataram para o triénio 2009-2011, tendo a votação dos sócios decorrido no dia 3 de Outubro, durante o Congresso em Vila Real, e também por correspondência. Quiseram os sócios honrar-nos com a expressiva votação de 129 votos a favor num total de 131 votos registados. Foi com satisfação que constatámos continuar a merecer a vossa confiança, o que nos dá redobrado ânimo para, com a vossa indispensável colaboração, continuarmos a trabalhar no próximo triénio, tendo como principais objectivos consolidar as iniciativas em curso e lançar novas iniciativas que estão na forja em prol da comunidade estatística.

Saudações cordiais

Carlos Braumann

Notícias

• XVI Congresso SPE

Passeio Aleatório[1]
pelo dia-a-dia do XVI Congresso Anual da SPE

Nas margens do Rio Corgo, um dos afluentes do Douro, a bonita cidade de Vila Real hospedou, este ano e pela primeira vez, um congresso que já conta com 16 anos de história. Esta cidade, hoje capital de distrito pertencente à antiga província de Trás-os-Montes, uma das mais importantes províncias vinícolas do país, foi fundada em 1289 por D.Dinis que na época a apelidou de "Pobra" (povoação) de Vila Real de Panóias. Por aqui passaram nomes como Nicolau Nasoni, famoso arquitecto italiano, interveniente na edificação de um dos mais belos exemplos de arquitectura barroca em Portugal – a Casa de Mateus. O nosso ilustre romancista Camilo Castelo Branco viveu, de 1839 a 1841, na pequena aldeia de Vilarinho de Samardã uma freguesia deste concelho. Numa época em que tanto se fala de "Magalhães" não podia deixar de mencionar que, segundo a tradição, o navegador Fernão de Magalhães terá nascido na casa dos Pereiras, em Sabrosa, no último quartel do século XVI. Para os menos apreciadores de história resta-me referir que o contemporâneo Miguel Torga, médico e escritor, nasceu neste distrito em São Martinho de Anta, concelho de Sabrosa e destacar, de entre as figuras mediáticas dos nossos dias, Simão Sabrosa, actualmente futebolista do Atlético de Madrid, que aqui nasceu e Pedro Passos Coelho, actualmente Presidente da Assembleia Municipal de Vila Real, que aqui estudou no Liceu Nacional Camilo Castelo Branco.

Com a colaboração do Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, a Sociedade Portuguesa de Estatística organizou assim em Vila Real o seu congresso anual que constitui um evento fundamental a nível nacional em Probabilidades e Estatística e suas aplicações. Um bem haja à Comissão Organizadora Local, constituída por Irene Oliveira, Elisete Correia, Fátima Ferreira e Sandra Dias.

Apresentados a cidade de Vila Real e os organizadores deste congresso, inicio o meu passeio por mais um congresso que, por interesses pessoais e por não ser fã de álcool, de aleatório só teve o título.

Primeiro dia: 1 de Outubro de 2008

Como vem sendo hábito nestes congressos o primeiro dia foi reservado quase inteiramente ao mini-curso cuja preparação e dinamização, este ano, esteve a cargo de Lucília Carvalho da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Este curso, de *Análise de Dados Espaciais*, teve como objectivo descrever e modelar dados que resultam de observações de fenómenos dependentes da sua localização

[1] "Imagine-se um fulano, já muito tocado pelo álcool, que sai de uma taberna e procura o caminho para casa. Ao chegar a cada esquina, o sujeito está tão toldado que a sua escolha de direcção é perfeitamente aleatória. Virará para a direita ou para a esquerda, seguirá em frente ou voltará para trás por motivos que ninguém entende, muito menos ele próprio. A sua escolha é perfeitamente aleatória, como se fosse atirando moedas ao ar para decidir o caminho." Em, Nuno Crato. (2007). *Passeio Aleatório pela Ciência do dia-a-dia*. Editora Gradiva.

no espaço, os dados espaciais. Foram introduzidos conceitos básicos e os modelos mais simples e mais aplicados a estes dados, particular destaque foi dado às múltiplas aplicações práticas. Esta grande aplicabilidade da estatística espacial já fazia prever o elevado número de participantes que assistiram a este curso.
Terminado o mini-curso era chegada a hora da Sessão de Abertura do Congresso. Nas palavras do Presidente da Câmara, do Reitor da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, da Coordenadora do Departamento de Matemática, do Presidente da SPE e da Presidente da Comissão Organizadora Local ouvimos as boas vindas e os votos de uma agradável e profícua estadia. Seguiu-se, com o orador convidado Daniel Gianola (Universidade de Winconsin-Madison, USA), a primeira das cinco sessões plenárias a que aqui pudemos assistir. Em bom inglês e sob o olhar atento de Ivette Gomes que presidiu à sessão ouvimos falar de "*Nonparametric and machine learning procedures for genome-enabled prediction of genetic value for quantitative traits*".
A terminar um dia que já se avistava longo fomos recebidos nos Paços do Concelho para o tradicional "Porto de Honra", gentilmente oferecido pela Câmara Municipal de Vila Real.

Segundo dia: 2 de Outubro de 2008
O convite, que desde já agradeço, para presidir logo pela manhã à sessão *Extremos I* direccionou de imediato o meu "passeio" neste dia que acordou solarengo. Em paralelo decorriam as restantes quatro sessões de comunicações orais deste dia – *Séries Temporais I*, *Ensino da Estatística*, *Processos Estocásticos* e *Estatística Aplicada à Saúde e Epidemiologia*.
Terminadas as sessões de comunicações orais seguiu-se uma sessão de posters e posteriormente a sessão plenária sobre *Dados categorizados com omissão num quadro produto de multinomiais: uma panorâmica de métodos de análise.* Esta sessão plenária foi proferida por Carlos Daniel Paulino (IST, Universidade Técnica de Lisboa) e presidida por João Tiago Mexia.
Para aqueles que ainda não se cansaram de me ouvir falar de passeios chegou a hora de vos falar do verdadeiro passeio, o Passeio do Congresso. Com uma temperatura que mais fazia lembrar um dia de Verão partimos rumo à Régua para um magnífico cruzeiro pelo Douro abordo do Pirata Azul. Rodeados de uma paisagem de vinhedos em socalcos de rara beleza, navegámos da Régua ao Pinhão onde a eclusa da Barragem de Bagaúste se destacou como o "momento alto" do percurso. Terminámos o passeio na Quinta do Seixo, com cerca de 100 hectares, onde, no meio de muito mistério e sensualidade, aprendemos um pouco mais sobre a conhecida marca de vinhos Sandeman. A prova de vinhos do Porto desta marca quase tornou o passeio aleatório, contudo a descida íngreme e sinuosa que nos esperava obrigou-nos a manter todos os sentidos bem despertos.

Terceiro dia: 3 de Outubro de 2008
Não podia passar por este terceiro dia de congresso sem falar na comunicação *Modelos geradores de memória longa no controlo motor*, proferida por Ana Diniz, que abriu a sessão *Séries Temporais II*. Trata-se de um trabalho conjunto com João Barreiros e Nuno Crato, inspirador do título deste texto e que me ensinou, entre outras coisas, que não preciso de me preocupar com o facto de nos congressos da SPE ser sempre oferecido a todos os oradores monóxido di-hidrogénico. Em jeito de agradecimento pela inspiração aqui lhe presto a minha singela homenagem.
Após as quatro sessões paralelas que integraram, no total, dezanove comunicações orais em quatro grande áreas – *Séries Temporais, Estatística Multivariada, Regressão Logística e Aplicações à Genética* – ainda houve tempo para mais uma sessão de posters antes da primeira sessão plenária do dia. Esta sessão plenária, presidida por Russel Alpizar-Jara, esteve a cargo de Geert Molenbergs (Universidade de Hasselt, Bélgica) e teve por título "*Every missing not at random model for incomplete data – has got a missing at random counterpart with equal fit*". O início da tarde ficou marcado pela segunda sessão plenária do dia, que teve como oradora convidada a Manuela Neves (ISA, Universidade Técnica de Lisboa) que nos falou de *Métodos semi-paramétricos e não paramétricos em modelação e estimação*. A presidir esteve João Branco. Seguiram-se mais duas sessões de comunicações orais e uma sessão de posters. A primeira destas sessões de comunicações orais, com as sessões paralelas *Aplicações Sócio-económicas*, *Amostragem*, *Estatística Espacial* e *Inferência Estatística I,* teve um total de quinze apresentações. A segunda contemplou apenas dez comunicações orais nas áreas de *Estatística e Aplicações*, *Estudo de Populações Animais*, *Inferência Estatística* e *Regressão e Aplicações*.

A tarde terminou com a fotografia do congresso tirada este ano em dois locais distintos, primeiro em frente ao hotel onde se realizou o congresso (Hotel Miracorgo) e depois no terraço com vista sobre o Rio Corgo. A noite prolongou-se com o sempre desejado jantar do congresso que decorreu na Quinta de Santo António e onde as cerca de 170 pessoas que estiveram presentes puderam desfrutar da boa comida transmontana e ainda dar um pézinho de dança ao som de cantigas tradicionais portuguesas.

Quarto e último dia: 4 de Outubro de 2008

O último dia de congresso iniciou-se com vinte e três comunicações orais divididas por cinco sessões – *Aplicações Financeiras*, *Controlo de Qualidade*, *Estatística e Aplicações II*, *Extremos II* e *Estatística Bayesiana*.

Com dezoito dos setenta e cinco posters apresentados neste congresso terminaram as sessões de posters com que fomos presenteados ao longo de três dias.

Tendo já ganho o Prémio SPE aguardo sempre com grande entusiasmo a revelação de cada novo vencedor. Este ano o prémio foi atribuído a Nuno Sepúlveda (Instituto Gulbenkian da Ciência) pelo seu trabalho *Abordagem por penetrâncias alélicas: uma nova modelação em Genética*. Aqui ficam os meus sinceros parabéns.

Na última sessão plenária deste congresso, presidida por Carlos Braumann, Ian Maclean (Business Statistics Users Group, Reino Unido) falou-nos da importância da Estatística na sociedade com a sua comunicação intitulada "*Statistics in the Service of Society*".

O congresso terminou com a Sessão de Encerramento onde Carlos Braumann entregou o Prémio Estatístico Júnior 2008 e agradeceu a presença de todos bem como o empenho e excelente trabalho da Comissão Organizadora Local.

Para o ano o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa convida-nos, a mais um passeio, nos dias 30 de Setembro a 3 de Outubro de 2009 em Sesimbra (quase certamente), pela estatística que por cá se faz. Apareçam e até lá muitos e bons passeios (mais ou menos aleatórios consoante os gostos)!

Ana Paula André Martins
(Departamento de Matemática, UBI)

• Eleições na SPE para o triénio 2009-11

Mesa da Assembleia Geral

Presidente: João Branco (UTL - Instituto Superior Técnico)
Primeiro Vogal: Maria Carmo Miranda Guedes (U. Porto - Faculdade Ciências)
Segundo Vogal: Paulo Infante (U. Évora)

Direcção

Presidente: Carlos Braumann (U. Évora)
Vice-Presidente: Paula Brito (U.Porto – Faculdade de Economia)
Secretário: Luísa Canto e Castro Loura (U.Lisboa – Faculdade de Ciências)
Secretário-Adjunto: Russell Alpizar-Jara (U. Évora)
Tesoureiro: Maria Manuela Souto Miranda (U. Aveiro)

Conselho Fiscal

Presidente: Maria Manuela Neves Figueiredo (UTL – Instituto Superior Agronomia)
Secretário: Paulo Rodrigues (U. Algarve – Faculdade de Economia)
Relator: Carlos Marcelo (Instituto Nacional de Estatística)

	Direcção	Mesa Assembleia Geral	Conselho Fiscal
Sim	129	130	130
Não	0	0	0
Brancos	2	1	1
Nulos	0	0	0
Total	131	131	131

• Um marco, há 25 anos!

O acontecimento em notícia foi ponto de partida em muitos projectos científicos e é, sem dúvida, uma referência na história da consolidação da Estatística em Portugal. A reunião científica que se enaltece congregou em Portugal todos os "extremófilos" mundiais e abriu muitos e novos horizontes.
Com o propósito de obter uma perspectiva completa sobre o campo de investigação "Estatística de Extremos e Aplicações" decorreu, de 31 de Agosto a 14 de Setembro de 1983, no Hotel Golf - Mar do Vimeiro um Curso Avançado no âmbito do NATO Advanced Study Institute. Com Direcção de J. Tiago de Oliveira e sendo co-directores M. Ivette Gomes e Feridun Turkman, aquele foi um acontecimento científico do maior relevo para a história da Estatística e dos Estatísticos portugueses.
"Atrevo-me hoje a dizer que a organização deste encontro de duas semanas, com os dois fins de semana incluídos e repletos de *programa social*, embora me tivesse traumatizado de tal modo que só a partir de 1999 me atrevi a organizar outras conferências, constitui o marco de lançamento daquilo que penso poder considerar-se a "*Escola de Extremos*" em Portugal." (Ivette Gomes *in* Boletim SPE. Primavera de 2007, p. 37)
Como memorial, foi editado por J. Tiago de Oliveira o livro de Actas - *Statistical Extremes and Applications - NATO Advanced Science Institute,* Series C, pela editora D. Reidel, em 1984.
"The purpose of the NATO – ASI "Statistical Extremes and Applications" was to obtain a complete perspective of the field, also with a series of promising directions of research and some recent results" escreveu Tiago de Oliveira no prefácio das referidas actas (disponíveis em bibliotecas universitárias).

Fernando Rosado

• Professora Fátima: A Sócia n.º 1

A nossa sócia nº 1, Professora Maria de Fátima Fontes de Sousa, festejou no passado mês de Julho, o seu 80º aniversário. Durante o jantar comemorativo, organizado por iniciativa do Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa, a Sociedade Portuguesa de Estatística prestou-lhe uma pequena homenagem e salientou o seu importante contributo para o desenvolvimento da Estatística em Portugal.

Maria de Fátima Fontes de Sousa licenciou-se em Matemática, fez toda a sua carreira universitária na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e foi Professora Catedrática do Departamento de Estatística e Investigação Operacional até 1998. Embora jubilada, manteve a sua permanência no Centro de Estatística e Aplicações como directora da linha de investigação em "Análise e Planeamento de Experiências"

Luísa Loura

• Prémios “Estatístico Júnior 2008”

A atribuição de prémios “Estatístico Júnior 2008” é promovida pela Sociedade Portuguesa de Estatística, com o apoio da Porto Editora, e tem como objectivo estimular e desenvolver o interesse dos alunos do ensino básico e secundário pelas áreas da probabilidade e estatística. Ao apelo para submissão de trabalhos correspondeu uma adesão bastante elevada, tendo sido recebidos 21 trabalhos na categoria Ensino Básico, envolvendo um total de 57 alunos, e 15 na categoria Ensino Secundário, envolvendo um total de 39 alunos.

A cerimónia de entrega dos Prémios Estatístico Júnior 2008, conforme estipulado no Regulamento, decorreu na Sessão de Encerramento do XVI Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, no dia 4 de Outubro de 2008, às 13horas, no Auditório Miguel Torga nas instalações do Hotel Miracorgo em Vila Real.

Informa-se ainda que neste ano houve um trabalho do Ensino Básico, com nível compatível à atribuição de um 1º lugar, mas este foi desqualificado porque a equipa foi composta por mais de 3 alunos, violando assim o ponto número 3 do Regulamento.

O Júri foi constituído pelos professores: Doutora Maria Eugénia Graça Martins (Presidente) e Doutora Luísa Canto e Castro de Loura do Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Doutor Russell Alpizar-Jara do Departamento de Matemática da Universidade de Évora.

No final deste Boletim são apresentados os premiados.

A Direcção

• Criação ou não da Região Ibérica da Sociedade Int. de Biometria

No Boletim de Outono de 2007 publicou-se um texto sobre a questão *Sim ou não à criação da Região Ibérica da Sociedade Internacional de Biometria,* que foi igualmente distribuído por correio electrónico aos sócios da SPE. Nele se apelava para a participação do maior número possível de utilizadores de Estatística, sobretudo no campo da Biometria, numa sondagem electrónica visando indagar a extensão do interesse na criação de tal Região Ibérica e na associação através dela à *International Biometric Society.*

Estamos agora em condições de informar que esta iniciativa não conseguiu mobilizar a comunidade a que era dirigida já que o número de respostas recebidas foi claramente inexpressivo relativamente ao dos investigadores que se sabe trabalharem frequentemente na metodologia estatística aplicada à Biometria, ainda que tivessem correspondido esmagadoramente a posições inequivocamente afirmativas.

Não havendo uma alteração substancial desta situação de apatia e aparente desinteresse, não creio pessoalmente que se justifique avançar para uma superior forma de organização dos biostatísticos ibéricos que envolva num plano de representatividade mais equilibrado a comunidade portuguesa. E é pena que se perca esta oportunidade de contribuir decisivamente para impulsionar e conferir uma maior visibilidade à Biostatística que se faz em Portugal.

Carlos Daniel Paulino

• Novo glossário inglês - português de termos estatísticos

O glossário estatístico inglês-português da autoria de comissões criadas no seio da SPE e ABE, e que foi enviado em Julho de 2007 para o ISI, encontra-se disponível no sítio deste no endereço *http://isi.cbs.nl/glossary/index.htm*. Os vocábulos de uso exclusivo no Brasil estão aí assinalados com a indicação (bra).

Em consonância com o que se refere no texto sobre esta matéria publicado no Boletim de Outono de 2007, deu-se início à etapa de elaboração de um glossário estatístico mais abrangente. A parte portuguesa da equipa de trabalho (CENE) passou a ser constituída por Carlos Daniel Paulino, João Branco, Dinis Pestana e Alfredo Reis.

Nunca é demais realçar a crucial importância de que se reveste este trabalho para o mundo lusófono e para a promoção internacional da língua portuguesa no que diz respeito a esse domínio do conhecimento. Nesse sentido, desafiamos uma vez mais todos os colegas a contribuírem com as suas sugestões, mormente associadas com o vocabulário estatístico da respectiva área de trabalho, para este utilíssimo instrumento de consulta e de harmonização da comunicação estatística em português.

Carlos Daniel Paulino

• WEAA2008 - Workshop em Estimação de Abundância Animal

Realizou-se na Universidade de Évora, de 7 a 9 de Julho de 2008, o Workshop em Estimação da Abundância Animal. Este evento, de carácter interdisciplinar, foi patrocinado pelo Centro Internacional de Matemática (CIM) e pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT).
Contou também com o apoio em espécie e subsídios de outras entidades do sector público e privado.

O workshop contou com a presença de ilustres instrutores convidados, cientistas de reconhecido prestigio internacional nesta área de investigação: os professores Kenneth H. Pollock e Theodore R. Simons, da North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, E. U. A., e o professor Jean-Dominique Lebreton, do Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), CEFE, França.

Teve como principal objectivo estreitar a lacuna existente entre a teoria da estimação estatística de populações animais e as suas aplicações, tendo por isso como publico alvo investigadores e estudantes interessados na estimação de parâmetros demográficos de populações naturais e/ou humanas evasivas.

Originalmente destinado a uma lotação limitada de 30 inscrições, o workshop foi alargado a um total de 40 participantes dado o interesse manifestado.
Contou com participantes provenientes do sector académico, governamental e de consultores no sector privado.
A maior parte dos participantes eram de Portugal mas também houve participantes provenientes do Brasil, Espanha, Itália e do Reino Unido.

Para mais informações: http://www.eventos.uevora.pt/~weaa

A Comissão Organizadora

Russell Alpizar-Jara, Anabela Afonso e João Filipe Monteiro.

Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA) e Departamento de Matemática da Universidade de Évora

• COMPSTAT' 2008

A conferência COMPSTAT'2008, *International Conference on Computational Statistics*, teve este ano lugar no Porto de 24 a 29 de Agosto, tendo sido organizada localmente pela Faculdade de Economia da Universidade do Porto. COMPSTAT é uma iniciativa da *European Regional Section of the International Association for Statistical Computing* (IASC), uma secção do *International Statistical Institute* (ISI), COMPSTAT'2008 foi a sua 18ª edição. Trata-se de uma das mais importantes conferências a nível mundial na área de Estatística Computacional, certamente a mais importante a nível europeu, reunindo algumas centenas de participantes quer do mundo académico quer de diferentes actividades onde a Estatística Computacional tem aplicação, permitindo a divulgação de trabalhos nas vertentes teórica e aplicada, incentivando a interdisciplinaridade, as trocas de experiências e a cooperação futura. COMPSTAT'2008 foi a sua primeira edição em Portugal, tendo contado com cerca de 360 participantes, oriundos de 34 países dos 5 continentes.

Foram *Keynote Speakers*, honrando a conferência com a sua participação, os Prof. Peter Hall (Dep. of Mathematics and Statistics, The University of Melbourne, Austrália), Prof. Heikki Mannila (Dep. of Computer Science, Faculty of Science, University of Helsinki, Finlândia) e Prof. Timo Teräsvirta (School of Economics and Management, University of Aarhus, Dinamarca). Tiveram lugar dois tutoriais, a saber: "Computational Methods in Finance" por James Gentle (Dep. of Computational and Data Sciences, George Mason University, EUA), e "Creating R Packages" por Friedrich Leisch (Institut für Statistik, Ludwig-Maximilians-Universität, München, Alemanha), que despertaram muito interesse e contaram com uma assinalável audiência. A conferência teve ainda Sessões Convidadas em variadíssimas áreas, assim como *Contributed Sessions*, sob a forma oral e de poster. O livro de *Proceedings*, publicado pela *Physica-Verlag - Springer* reúne os artigos dos *Keynote Speakers* e dos oradores nas Sessões Convidadas, incluindo um *CD-Rom* com os artigos submetidos livremente que foram aceites após revisão.

De realçar ainda a homenagem ao Prof. Norbert Victor (Presidente do IASC no período 1991-1993) cuja acção foi fundamental para a criação e desenvolvimento da secção europeia (ERS) do IASC e para a adopção de COMPSTAT como sua conferência oficial. Norbert Victor seria o primeiro *Chairman* da ERS, aquando da sua criação pelo Conselho do IASC em 1978.

O Programa Social foi concebido para dar a conhecer aos participantes um pouco mais da cidade do Porto e da sua cultura, permitindo encontros informais … e a necessária descontracção após as sessões de trabalho. Assim, no domingo, dia 24, os participantes foram convidados para um *Ice Breaker* nas belíssimas instalações da Comissão de Viticultura da Região dos Vinhos Verdes, onde puderam apreciar um copo de Vinho Verde com uma bela vista sobre o rio Douro. Na Segunda-feira, dia 25, teve lugar o Cocktail do Congresso, na Praia da Luz, ao pôr do Sol… que cremos ficará na memória de todos… e que terminou com dança ao som de músicas dos 60's e 70's. O Instituto dos Vinhos do Porto e Douro ofereceu uma prova de Vinhos do Porto na 3ª feira, que contou com a presença de cerca de 80 participantes, que assim tiveram oportunidade de aprender alguns segredos sobre o precioso néctar. Terça-feira foi ainda o dia em que os participantes visitaram a Casa da Música para um concerto pelo agrupamento *Camerata Senza Misura*, que tocou obras de Rossini, Carlos Azevedo e Beethoven. Quarta-feira já pedia um pouco de descanso… e da parte da tarde subimos o Rio Douro de barco, passando a barragem de Crestuma-Lever. A metereologia não nos deixou ficar mal… e foi um momento de agradável descontracção e abundante reportagem fotográfica. Finalmente, no dia 28 reunimo-nos para jantar no restaurante das Caves Taylor's, tendo havido ainda a oportunidade de uma visita às caves para os interessados. A noite terminou com música e dança para os mais activos, tendo os restantes desfrutado da vista nocturna sobre a cidade do Porto a partir do terraço… a noite estava belíssima.

Na sessão de encerramento do Congresso foram atribuídos três prémios a trabalhos apresentados por jovens investigadores; os laureados foram: Michiel Debruyne - "The Stahel-Donoho Outlyingness in a Reproducing Kernel Hilbert Space"; Paulo Canas Rodrigues e Miguel de Carvalho - "Monitoring Calibration of the Singular Spectrum Analysis Method" e Morgan Seston - "A Simple Algorithm to Recognize Robinsonian Dissimilarities".

E sexta-feira foi o dia das despedidas… até Paris em Agosto de 2010.

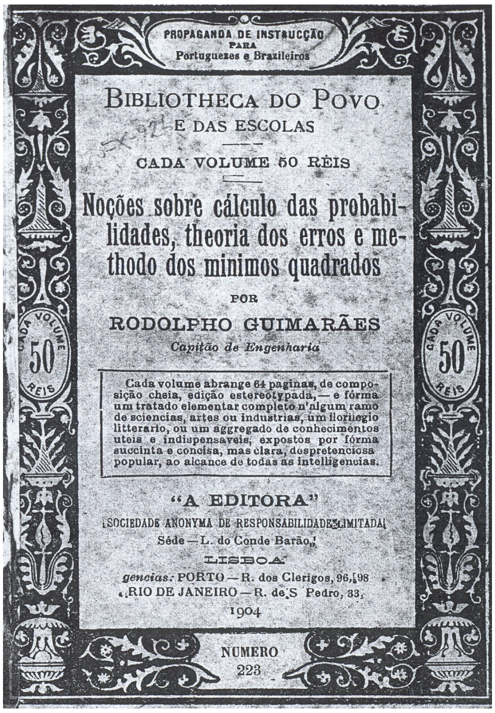
A Comissão Organizadora Local agradece a todos os que de alguma forma contribuíram para a realização de COMPSTAT'2008, enviando daqui um abraço a todos os connosco participaram na Conferência. Para mais informações, fotografias, etc., não deixe de visitar o website da Conferência, www.fep.up.pt/compstat08/.

Paula Brito

Episódios na História da Estatística

• Rodolpho Guimarães (1904)

Rodolfo Ferreira Dias Guimarães (1866–1918), professor da Escola do Exército de Lisboa (actual Academia Militar), célebre pela sua investigação em História da Matemática, nomeadamente pela edição de um catálogo das obras de Matemática publicadas por autores portugueses durante o século XIX e pela divulgação da obra de Pedro Nunes (1502–1578), publica em 1904 um riquíssimo opúsculo intitulado *Noções sobre Cálculo das Probabilidades, Theoria dos Erros e Méthodo dos Mínimos Quadrados,* que contém os principais resultados, existentes na época, nesta área. Este tratado corresponde ao volume **223** da colecção *Bibliotheca do Povo e das Escolas*, uma colecção assinalável, destinada quer ao mercado português quer ao brasileiro, em cuja capa se declara: *"Cada volume abrange 64 paginas, de composição cheia, edição estereotypada, — e fórma um tratado elementar completo n'algum ramo de sciencias, artes ou industrias, um florilegio litterario, ou um aggregado de conhecimentos uteis e indispensaveis, expostos por fórma succinta e concisa, mas clara, despretenciosa, popular, ao alcance de todas as intelligencias"*. Correspondendo a tal apresentação, esta extensa colecção de livros de pequeno formato (11cm×17cm) abordava os mais diversos assuntos, tais como a Matemática (nas suas distintas áreas, como por exemplo, em 1910, *Geometria e trigonometria espherica,* do autor agora em referência), a Física, a Química, a História, a Geografia, a Filosofia, a Religião, a Meteorologia, a Gramática, a Arte, a Anatomia, a Culinária, o Cultivo, a Ginástica, até a *Hygiene da Habitação*.



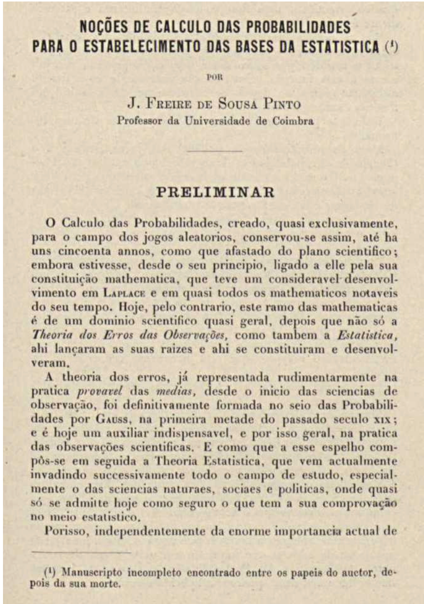
Na obra acima referida, Rodolfo Guimarães, após uma breve resenha histórica do Cálculo das Probabilidades, aponta a definição clássica de probabilidade, baseada na equipossibilidade, através da qual deduz as principais propriedades da Probabilidade, tais como os Teoremas da Probabilidade Composta, da Probabilidade Total, de Bayes, entre outros. Define a esperança matemática em jogos de azar, com a qual analisa o paradoxo de S. Petersburgo, e apresenta a esperança moral de Nicolau Bernoulli. Demonstra o Teorema de Jacob Bernoulli (Lei [Fraca] dos Grandes Números) e o Teorema Limite Central (de Moivre–Laplace), ambos restritos a provas de Bernoulli com igual probabilidade, referindo a generalização de Poisson para provas com probabilidades de sucesso distintas, publicada em 1837. Não examina, no entanto, os casos gerais, obtidos pela escola russa de probabilidade, tanto as generalizações da Lei dos Grandes Números de Chebycheff, de 1867, e de Markoff, de 1900, que não se restringem a provas de Bernoulli mas impõem condições aos momentos da distribuição, como ainda o Teorema Limite Central de âmbito geral demonstrado por Lyapounov em 1901, resultados que, aliás, estão ausentes nas publicações ocidentais até à obra de Castelnuovo, que só aparece em 1919. O autor dedica uma boa parte desta obra à Teoria dos Erros, expondo as hipóteses subjacentes aos erros para que sejam caracterizados pela Lei de Gauss e verificando experimentalmente este resultado na medição de ângulos. O estudo termina com a exposição do Método dos Mínimos Quadrados.

Ao lermos este volume inserido nesta colecção *popular, ao alcance de todas as intelligencias*, concluímos que, certamente, os intelectos da época seriam deveras brilhantes.

Rui Santos
Escola Superior de Tecnologia e Gestão – Instituto Politécnico de Leiria
Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa

• José de Sousa Pinto (1913)

José Freire de Sousa Pinto (1855–1911), professor da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, debate a utilização do Cálculo das Probabilidade na modelação dos fenómenos casuais, numa construção póstuma e inacabada, mas deveras rica, publicada nos *Annaes Scientificos da Academia Polytecnica do Porto* em 1913 (disponível no Fundo Antigo da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto — *http://www.fc.up.pt/fa*). Nesta obra, intitulada *Noções de Cálculo das Probabilidades para o Estabelecimento das Bases da Estatística*, o autor começa por expor o processo de construção do conhecimento em qualquer ciência, concluindo que o avanço do conhecimento advém da combinação entre a observação do fenómeno e o raciocínio teórico. Deste modo, qualquer teoria decorre da observação dum fenómeno, sendo essa teoria inicialmente uma aproximação. Depois é observado uma vez mais o fenómeno. Esta nova observação servirá para testar a primeira teoria formada, que é confirmada ou aperfeiçoada com o novo conhecimento proveniente da nova observação, ou mesmo alterada, caso a teoria inicial venha a ser considerada errónea. É nesta cadeia sucessiva de duplo esforço, observação e raciocínio, que o conhecimento científico avança no sentido do esclarecimento completo do fenómeno, onde a teoria formalizada acontecerá de certeza sempre que o fenómeno ocorra. José de Sousa Pinto considera que existem, contudo, alguns fenómenos que não podem ser totalmente teorizados, isto é, que não podem *"passar à categoria de certeza"*, pois correspondem a fenómenos casuais. O autor destaca então dois tipos de probabilidades: as *"probabilidades aleatórias"*, quando a equipossibilidade é evidente e, por este motivo, pode ser utilizada a definição clássica de probabilidade de Laplace, as quais, *"apesar do superior desenvolvimento da sua analyse, representam um meio restricto, artificial e como quasi separado do campo scientifico"*, sendo a sua utilidade restrita quase unicamente aos jogos de azar; as *"probabilidades dos fenómenos"*, onde é através da realização repetida do fenómeno, supondo invariabilidade deste, que o valor das probabilidades associadas são determinadas, pois, se um fenómeno tiver, por exemplo, dois resultados possíveis, A e B, a sua repetição continuada deverá mostrar a sua relação *teleológica*, como se ao acontecimento A estivessem associados α resultados favoráveis e ao acontecimento B estivessem β e, à medida que vamos observando o fenómeno, o rácio entre o número de vezes que ocorre A e o número de vezes que ocorre B tenderá a manifestar a relação α/β — *Lei Teleológica de Wronski* ou *Lei Empírica do Acaso*. Desta forma, José de Sousa Pinto considera claramente que as Leis de Bernoulli são o instrumento certo para determinar as probabilidades quando não é aplicável a definição clássica de probabilidade e, por conseguinte, a elas, bem como às *"mathematicas philosophicas de Wronski"*, se deve a importância da Estatística como a ciência que determina as probabilidades associadas aos fenómenos casuais, tornando, desta forma, *"as Probabilidades num fecundo recurso scientífico"*. Será justo salientar, por conseguinte, a riqueza da construção filosófica para a determinação das probabilidades e sua fundamentação com recurso à inversa das Leis de Bernoulli efectuada por José de Sousa Pinto em 1913, numa das poucas obras Portuguesas dedicadas ao Cálculo das Probabilidades e à Estatística na época.



NOÇÕES DE CALCULO DAS PROBABILIDADES
PARA O ESTABELECIMENTO DAS BASES DA ESTATISTICA (1)

POR

J. FREIRE DE SOUSA PINTO
Professor da Universidade de Coimbra

PRELIMINAR

O Calculo das Probabilidades, creado, quasi exclusivamente, para o campo dos jogos aleatorios, conservou-se assim, até ha uns cincoenta annos, como que afastado do plano scientifico; embora estivesse, desde o seu principio, ligado a elle pela sua constituição mathematica, que teve um consideravel desenvolvimento em LAPLACE e em quasi todos os mathematicos notaveis do seu tempo. Hoje, pelo contrario, este ramo das mathematicas é de um dominio scientifico quasi geral, depois que não só a *Theoria dos Erros das Observações*, como tambem a *Estatistica*, ahi lançaram as suas raizes e ahi se constituiram e desenvolveram.

A theoria dos erros, já representada rudimentarmente na pratica *provavel* das *medias*, desde o inicio das sciencias de observação, foi definitivamente formada no seio das Probabilidades por GAUSS, na primeira metade do passado seculo XIX; e é hoje um auxiliar indispensavel, e por isso geral, na pratica das observações scientificas. E como que a esse espelho compôs-se em seguida a Theoria Estatistica, que vem actualmente invadindo successivamente todo o campo de estudo, especialmente o das sciencias naturaes, sociaes e politicas, onde quasi só se admitte hoje como seguro o que tem a sua comprovação no meio estatistico.

Porisso, independentemente da enorme importancia actual de

(1) Manuscripto incompleto encontrado entre os papeis do auctor, depois da sua morte.

Rui Santos
Escola Superior de Tecnologia e Gestão – Instituto Politécnico de Leiria
Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa

Para uma melhor compreensão da Gestão como Ciência

António Teixeira (*afst@iscte.pt*), Álvaro Rosa (*alvaro.rosa@iscte.pt*)
e Nelson António (*nelson.antonio@iscte.pt*)
IBS (ISCTE Business School), UNIDE

1. Introdução

Um dos aspectos que os investigadores e práticos da gestão se confrontam é a necessidade de integrar num todo coerente as contribuições provenientes de diversas disciplinas científicas com grau de exactidão diferente, onde se incluem tanto componentes *duras* como *moles*.

Quer na vertente prática quer na teórica da gestão, análises abrangentes devem estar associadas a uma capacidade integradora das diversas disciplinas sem contudo perder de vista as suas características diferentes. Claro que a gestão é um corpo multifacetado que não se limita à fronteira da ciência. No entanto, este artigo debruçar-se-á apenas sobre a componente científica da gestão, abordando como exemplo a forma de conciliar a estatística com as ciências comportamentais.

Como Deming (1986) refere, as observações empíricas devem ser sempre analisadas à luz de uma teoria. Esta integração multidisciplinar também não deve decorrer à revelia de uma matriz teórica que neste caso se deve referir ao critério de cientificidade. Neste artigo, tendo em contas as limitações de espaço, abordamos um leque nuclear de concepções de demarcação do campo da ciência, de forma a clarificar as bases de um modelo integrador para a gestão (para mais detalhes ver Teixeira *et al.*, 2007).

2. Critérios de demarcação

Com o advento do Iluminismo, o pensamento científico assumiu uma posição predominante, tendo-se assistido no século XIX a uma etapa marcante na crença nas possibilidades da ciência. Alguns pensadores consideram exagerada esta atitude. Fiolhais *et al.* (2008) afirmam a este respeito que "*O cientismo manifesta-se na ideia de que ou temos provas científicas, ou nada podemos ter que seja racional. … Mas esta não é uma posição razoável. Provar cientificamente algo, ou logicamente, ou matematicamente, é apenas uma das maneiras que temos de argumentar a favor de ideias ou decisões ou compromissos*", considerando que racionalidade é mais vasta. Diga-se aliás que o próprio termo é por vezes empregue com sentido pejorativo (Bauer, 1992), considerando inclusivamente Jarroson (1992) que o mesmo se encontrava nos antípodas do espírito científico.

Esta tendência levou a que se procurasse a definição de critérios de demarcação entre a ciência e a não ciência, para distinguir o conhecimento científico do metafísico, de forma a erradicar este último do edifício científico em construção. Vejamos quais foram as etapas relevantes para o âmbito da nossa análise da evolução destes critérios de demarcação.

2.1 – O verificacionismo

Embora a teoria do conhecimento e a filosofia das ciências venham de períodos anteriores, a primeira situação relevante para a nossa análise diz respeito ao positivismo lógico representado pelo Círculo de Viena, tendo alguns dos seus membros apresentado o Modelo Hipotético-Dedutivo. Esta corrente utilizou a abordagem cartesiana e evoluiu para o empirismo lógico unificador da ciência e pretendendo protegê-la da metafísica.

Estas perspectivas assumem uma abordagem acumulacionista do desenvolvimento das ciências, na qual cada geração de cientistas, recebe a visão anterior e trabalha a partir dela para alargar as fronteiras da ciência, dentro do mesmo quadro geral de princípios metodológicos. O critério de demarcação presente no *positivismo lógico* centra-se na *significação* das proposições, considerando *com sentido,* as que podem ser verificadas recorrendo à análise lógica regressiva, até aos enunciados de base, remetendo para a categoria das *sem sentido,* as que têm carácter metafísico, não sendo portanto, passíveis de verificação. Assim, para o positivismo lógico, o critério de demarcação entre o científico e o metafísico, é o *verificacionismo*.

2.2 – O falsificacionismo

Popper (1934) seguiu um caminho diferente, adoptando como critério de demarcação a *falsificabilidade*. Ao contrário dos positivistas, Popper não estava interessado na exclusão das propostas tradicionais da filosofia do campo do que faz sentido. Ele estava apenas interessado em excluí-las do âmbito da área científica.

A teoria de Popper constituiu um passo que veio revolucionar a visão do processo científico. Enquanto que anteriormente o processo era tido como acumulacionista e sem descontinuidades, com os horizontes da ciência sendo sucessivamente alargados a partir das contribuições anteriores (*the received view*). Popper introduziu uma perspectiva revolucionária em que cada novo passo passa pela rejeição do que anteriormente era aceite, ao mesmo tempo que a nova teoria explica igualmente, embora por outra forma ou por um caso particular, os factos explicados pela teoria que se abandona.

Popper considera que todas as teorias são contextuais e só devem ser adoptadas enquanto a sua falsidade não estiver provada, utilizando o termo *corroboração* como sinónimo de insucesso numa tentativa de falsificação, o que não significa *aceitação*. Assim, uma determinada teoria não tem necessariamente que reflectir uma verdade científica absoluta, mas apenas uma forma de lidar com a realidade, partindo da sua observação e encontrando explicações dentro das limitações do desenvolvimento científico e tecnológico existente no contexto em que a teoria é elaborada, sendo no fundo um raciocínio de gestão da ignorância. Uma teoria ou afirmação só será científica se a sua falsificabilidade for possível a partir dos resultados de observações empíricas embora, nalguns casos, devido a limitações de vária ordem, nomeadamente de cariz tecnológico, essa falsificação possa ser apenas possível teoricamente, pelo menos a curto prazo.

Embora Popper não se refira a Sir Ronald Fisher (1890-1962), Jerzy Neyman (1894-1981) e E.S. Pearson (1895-1980) na sua obra, estes desenvolveram na altura a teoria da inferência estatística (Blankenship e Petersen, 1999) que reflecte de uma forma perfeita o espírito do falsificacionismo: "*Fisher tinha lançado as fundações de uma teoria geral para tirar conclusões dos dados estatísticos. Neyman e Pearson reformularam parte da teoria numa forma que era mais fácil de compreender, porque seguia regras matemáticas simples*".

Na boa tradição popperiana, a proposição sujeita a teste é *assumida*, o que não é o mesmo que *aceite* como verdadeira, a menos que se encontre evidência estatística que aponte para a sua falsidade. A hipótese nula, representando a proposição assumida antes do teste, nunca é validada pelo teste e geralmente é formulada como o contrário do que se quer provar. Desta forma dá-se o benefício da dúvida ao *status quo*. Ou é rejeitada ou continua a ser utilizada, mas como uma verdade transitória e contextual de carácter probabilístico que se mantém apenas enquanto não se obtêm indícios apontando para a sua falsidade (Ackerman, 1976): "*Muitos estatísticos falam livremente sobre aceitar e rejeitar hipóteses com base em regras metodológicas (incluindo a dimensão de diversos parâmetros); Popper só pode falar em rejeição de hipóteses na inferência estatística"*.

Assim, a teoria de Popper não contempla a existência de verdades absolutas, sendo estas tidas por transitórias e probabilísticas e vistas como uma correspondência com factos, num caminho que, de falsificação em falsificação, se percorre um processo iterativo de aproximação a uma verdade inatingível, no que Miller (1994) chama de conjecturas e refutações, vendo a diferença entre o verificacionismo e o falsificacionismo como algo de semelhante a dois regimes diferentes de admissão de estudantes para o acesso ao ensino universitário. No primeiro caso há um exame de admissão para entrar na universidade que certifica que o estudante tem as características exigidas (verificacionismo), no segundo, todos os estudantes são admitidos e vão sendo expulsos do sistema à medida que se prove não serem capazes (falsificacionismo)

Relativamente ao paralelismo entre a obra de Popper e o que viria mais tarde a ser conhecido por *inferência estatística*, Blaug (1992) refere: "*A filosofia da ciência de Popper teria sido muito melhor compreendida, e estaria hoje muito menos rodeada pelas más interpretações que ainda abundam na literatura derivada, se ele tivesse logo feito expressa referência à teoria da inferência estatística de Neyman – Pearson … Aí está o sentido principal da teoria de Neyman – Pearson e, quando posta* *desta maneira, torna-se imediatamente óbvio que o princípio da falsificabilidade requer normas metodológicas que lhe dêem operacionalidade. A omissão da exploração da teoria de Neyman – Pearson, e particularmente a sua aparente relutância em a mencionar, devem então ser registadas como um daqueles mistérios insolúveis da história das ideias*".

2.3 – A abordagem paradigmática

O conceito de paradigma, tal como foi definido por Thomas Khun (1962) constitui um instrumento privilegiado para apoiar o relacionamento procurado. Com este conceito, Khun produziu uma perspectiva convencional sobre a natureza da ciência, ligando-a à actividade científica. Esta perspectiva considera o paradigma como sendo um conjunto de ideias convencionalmente aceite pelos que exercem a sua actividade na resolução de problemas concretos, *puzzles* na sua terminologia.

Desta forma, a adopção de uma determinada matriz teórica não decorre do resultado de uma discussão dos méritos relativos de várias alternativas medidos de forma abstracta, mas sim da sua aceitação para servir de base à actividade conduzida nos períodos de aplicação do que Khun chama de *ciência normal*, ou seja, nos quais não são questionados os princípios de base convencionalmente aceites e utilizados à margem de quaisquer considerações referentes a méritos relativos avaliados de forma abstracta e não contextual.

Esta característica convencional é largamente aceite, o que não exclui a existência de posições *dissidentes*, mais frequentes e naturais nos meios ligados às ciências duras. No entanto, pode afirmar-se que emerge da literatura um largo apoio às teses de Kuhn. Há mesmo seguidores de outras ordens de ideias, nomeadamente do falsificacionismo de Popper, que consideram, em última análise, ter vencido o lado errado, quando se encara como critério de vitória o grau de aceitação (Fuller, 2003). Assim, adoptando uma perspectiva pragmática que, como veremos, é um dos principais pontos de partida para a formação das ideias que presidem à gestão da qualidade, iremos adoptar o paradigma como instrumento de análise da evolução do corpo científico no âmbito da gestão das organizações.

Vejamos portanto como se pode reflectir esta abordagem paradigmática da evolução da ciência da gestão ao aspecto concreto em análise, começando por identificar quais os paradigmas da gestão surgidos na sua .fase científica. A Figura 1 ilustra esta evolução, sendo de referir que a mesma contempla apenas as fases marcantes, independentemente das datas em que ocorreram. Os efeitos da evolução paradigmática encontram-se ilustrados na Figura 2 que mostra as diferentes perspectivas dos seguidores do novo paradigmas e dos que se mantêm dentro das fronteiras do anterior.

Figura 1 – Os paradigmas da gestão

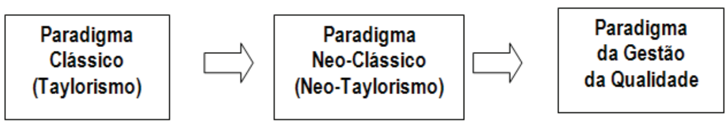
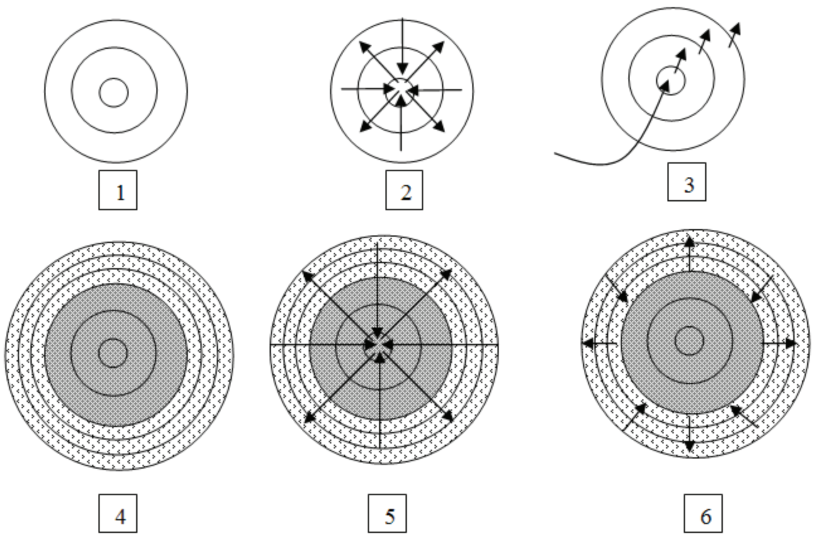


Figura 2 – Desenvolvimento dos paradigmas

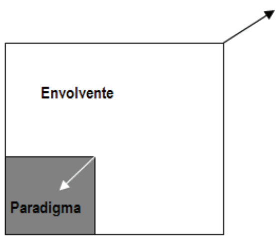


As cinco situações ilustradas correspondem a (Teixeira *et al.*, 2008):

1. **Paradigma inicial** – Esta situação caracteriza-se pela existência de um núcleo de valores aceite que preside à actividade normal de gestão. Existem ainda camadas periféricas de valores, cada vez mais confinados a uma dimensão instrumental à medida que são mais periféricos. Cada vez são mais uma consequência e não uma causa, um servidor e não um amo.
2. **Relações núcleo-periferia e periferia-núcleo** - As setas que se acrescentaram nesta fase são de dois tipos. O primeiro, respeitante às setas direccionadas no sentido núcleo-periferia ilustra o facto de que as camadas periféricas correspondem a concretizações mais específicas e concretas dos valores nucleares. O segundo tipo corresponde às setas em sentido contrário e significam que qualquer elemento de uma camada periférica deve ser analisado em cada caso concreto tendo em atenção os valores nucleares de onde provém.
   Por outro lado, o *feedback* recebido da aplicação das ferramentas deve ser analisado constantemente para verificar se as ideias nucleares mantêm a sua capacidade geradora de soluções que resolvam efectivamente os problemas que vão surgindo.
3. **Movimentos resultantes da aceitação de um novo paradigma** – Esta fase mostra que os paradigmas concorrem entre si por um posicionamento no núcleo do corpo teórico aceite. Assim, a aceitação do novo paradigma terá como consequência a substituição do núcleo, o que por sua vez provocará uma migração para posições mais periféricas dos valores base e instrumentos respeitantes ao paradigma objecto de substituição.
4. **Situação após a aceitação de um novo paradigma** – Esta fase ilustra de forma simplificada e esquemática o resultado do rearranjo do corpo teórico após a aceitação de um novo paradigma. A zona interior corresponde à posição nuclear do novo paradigma e a exterior resulta da migração para a periferia dos elementos do paradigma anterior, que não se extinguem, transformam-se.
5. **Perspectiva dos aderentes ao novo paradigma** – Os aderentes ao novo paradigma ganham um novo conjunto de ideias de ordem *superior* no sentido de permitirem a compreensão e interpretação de situações para as quais o paradigma anterior se mostrara insuficiente. No entanto, mantêm a perspectivação resultante do paradigma anterior que se mantém perfeitamente válida para determinada gama de situações. A teoria de que a terra não é plana não invalida muitas aplicações concretas delineadas a partir da consideração em contrário, aplicando-se o mesmo à consideração da sua esfericidade perfeita.
6. **Perspectiva dos não aderentes ao novo paradigma** – Esta situação retrata esquematicamente um resultado de uma não adesão ao novo paradigma. Enquanto a envolvente é caracterizada por um amplo campo de actuação, os não aderentes correm o risco de ficar com uma perspectiva mais restrita do que se passa à sua volta e das regras do jogo, não possuindo variedade e profundidade conceptuais para interpretarem as situações que excederam os limites da sua perspectiva.

Em termos paradigmáticos passa-se o ilustrado na Figura 3. O desenvolvimento da envolvente é de forma que a mesma se encontra em permanente expansão, tendo como consequência o aparecimento de novos tipos de situação para os quais o paradigma até então aceite não fornece as respostas adequadas.

Figura 3 – Redução do domínio de aplicação do paradigma alvo de substituição



3. Conclusões

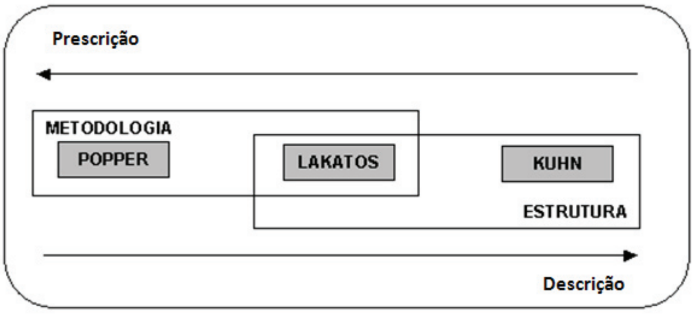
Um modelo integrador da componente científica da gestão estão, representadas na gestão, o falsificacionismo que se encontra no âmago da estatística inferencial tal como encarada por Fisher e Neyma-Pearson, não preenche estes requisitos. O modelo terá então que ser construído com base na perspectiva paradigmática. No entanto, esta não possui a componente metodológica essencial à vertente quantitativa.

Uma via integradora de ambas as perpspectivas passa pelo que chamamos de *caminho intermédio de Lakatos*, os programas de investigação científica.

Sem abandonar as concepções de Popper, Lakatos assume posições que respondem a algumas das críticas do campo paradigmático em relação ao falsificacionismo, robustecendo e aproximando as duas perpspectivas. Esta posição é vista de formas diversas conforme as convicções dos observadores, havendo quem considere que está mais próximo de Popper e quem entenda que está mais próximo de Kuhn. A este respeito, Silva (1998), por exemplo, considera: "*O contributo de Imre Lakatos para a filosofia da ciência permite-nos uma reflexão permanente, tanto sobre a leitura de Karl Popper, como sobre a de Thomas Kuhn: apesar do seu autor o apresentar como mais próximo de uma proposta popperiana melhorada e mais contrastante com a contribuição kuhniana*". As limitações de espaço

não nos permitem abordar o pensamento de Lakatos, deixando tal para outra ocasião.
Será assim de adoptar a perspectiva paradigmática associada aos projectos de investigação como uma ponte para componentes que, caracterizadas por uma vertente mais metodológica do que a providenciada pelo paradigma, essencialmente estrutural e descritiva, exijam uma abordagem metodológica. Esta situação encontra-se espelhada na Figura 4.

Figura 4 – Estrutura e metodologia no modelo a adoptar



4. Bibliografia

Ackerman, R. J. (1976), *The Philosophy of Karl Popper*, Massachusetts: University of Massachusetts Press.
Bauer, H. (1992). *Scientific Literacy and the Myth of the Scientific Method*, University of Illinois Press.
Blankenship, B. e P. Peterson (1999). "W. Edwards Deming's Mentor and Others who Made a Significant Impact on his Views During the 1920s and 1930s", *Journal of Management History*, Vol. 5, No. 8, pp. 454-465.
Blaug, M. (1992), *The Methodology of Economics*, tradução portuguesa de V. Calvete (1994), A Metodologia da Economia, Lisboa: Gradiva.
Deming, W. E. (1986). *Out of the Crisis*, Cambridge: Cambridge University Press.
Fiolhais, C., D. Murcho, H. Damião, J. Buescu, P. F. Silva, P. G. Mota e S. Araújo. *Fé, racionalidade e cientismo* (consultado em Julho de 2008).
Fuller, S. (2003). *Kuhn vs Popper*, Icon Books.
http://dererummundi.blogspot.com/2007/12/f-racionalidade-e-cientismo.html
Jarrosson, B. (1992), *Invitation à la Philosophie des Sciences*, Paris: Éditions do Seuil.
Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago: Chicago University Press.
Popper, K. (1934). *The Logic of Scientific Discovery*, New York: Harper & Row.
Silva, P. (1998). *A Filosofia da Ciência de Paul Feyerabend,* Lisboa: Instituto Piaget.
Teixeira A., Rosa A. e N.António (2007). *O doce amanhecer da ciência da gestão: uma perspectiva filosófica*, Lisboa: Pedago.
Teixeira, A, e N.António (2008). "Qualidade e estratégia", *TMQ – Gestão da Qualidade*, 2008, Lisboa: Sílabo (a publicar).

Estimação da abundância animal e de populações humanas móveis

Russell Alpizar-Jara, Anabela Afonso e João Filipe Monteiro
{alpizar, aafonso, jfgm}@uevora.pt
Centro de Investigação em Matemática e Aplicações
Departamento de Matemática
Universidade de Évora

1. Introdução

O tema "Estimação da Abundância Animal", apesar de aparentemente limitado e restrito a uma área de conhecimento, é muito vasto e com grande potencial de aplicação. Neste texto vamos desenvolver este tema enfatizando a sua relevância para a gestão das populações biológicas e para a tomada de decisões referentes a populações humanas que são de difícil acesso devido ao seu carácter evasivo.

A estimação da abundância de populações animais e do número de pessoas de algumas populações humanas móveis é um tema bastante relevante na sociedade actual. Por exemplo, para a definição de quotas de pesca é de extrema importância uma correcta estimação da abundância de pescado, de forma a evitar a extinção ou a sobre abundância de algumas espécies; nas políticas de Saúde são precisas estimativas das taxas de incidência e prevalência de certas doenças crónicas em populações de difícil acesso. Na secção 6 referimos vários exemplos em diversas áreas de aplicação.

Recentemente decorreu na Universidade de Évora o CIM – Workshop em Estimação da Abundância Animal. Julgamos que este foi o primeiro workshop, desta natureza, a decorrer em território Português, pelo menos durante a última década. O principal objectivo foi o de trazer à comunidade científica portuguesa um elenco de reconhecidos especialistas internacionais para leccionar alguns tópicos de interesse nesta área de investigação, divulgar algum trabalho recente e apontar linhas de investigação e desenvolvimento futuro (ver na secção Notícias neste volume e mais detalhes sobre o workshop em http://www.eventos.uevora.pt/~weaa). Pode-se considerar que este objectivo foi alcançado dada a excelente adesão verificada. Outro dos objectivos deste workshop era a constituição de um pequeno grupo de trabalho interessado no desenvolvimento e aplicação de técnicas nesta área de investigação. Também aqui a iniciativa foi bem sucedida, visto que foram vários os participantes que se mostraram interessados em pertencer a esse grupo de trabalho, estando já a ser agendados alguns encontros. Os principais tópicos tratados neste workshop foram os métodos de captura-recaptura e extensões no âmbito dos modelos de estados múltiplos. Também foi abordada a amostragem por distâncias, onde foi dada uma atenção especial à amostragem por pontos.

Nos últimos anos têm-se verificado grandes desenvolvimentos tanto na amostragem por distâncias como nos modelos de estados múltiplos e ainda na amostragem adaptativa para populações biológicas e/ou evasivas. No entanto, neste artigo vamos centrar a nossa discussão apenas nos modelos de captura-recaptura, em particular nos modelos para populações fechadas, visto serem os que têm tido uma maior aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento. Referiremos também vários contributos de colegas e alunos que colaboraram connosco e a quem desde já agradecemos. Muitas destas contribuições podem ser consultadas nos artigos publicados nas Actas da SPE dos últimos congressos anuais. A nossa intenção não é fazer aqui uma revisão exaustiva destes métodos de amostragem mas sim indicar alguns desenvolvimentos recentes na área e a possibilidade de utilização e difusão na sociedade portuguesa por parte da comunidade científica.

2. Breve revisão histórica

Os modelos de captura-recaptura têm uma grande importância histórica. O modelo mais simples, que hoje em dia é conhecido por modelo de Lincoln-Petersen, está na base dos modelos que proliferaram muito rapidamente no século XX. Os primeiros desenvolvimentos teóricos remontam ao tempo de Laplace (1786), quando tentou estimar o tamanho da população francesa com base nos registos do número de nascimentos e do número de habitantes nos centros suburbanos nos arredores de Paris. Pouco mais de 100 anos depois, Petersen (1896) introduz algumas ideias na área da pesca e formaliza um modelo ao estudar a migração de peixes do Mar Alemão para "*Limfjord*". De forma independente, Lincoln (1930) propõe os mesmos princípios para estimar o tamanho da população de patos silvestres nos Estados Unidos da América. Apesar de se atribuírem a Laplace as primeiras ideias relativas aos actuais desenvolvimentos de captura-recaptura, tem sido documentado que o eminente britânico John Graunt já tinha usado ideias semelhantes para estimar a população de Londres, baseando-se em dados publicados na sua obra, *Natural and Political Observations: Made upon the Bills of Mortality* de 1662 (Amstrup *et al.* 2005).

Os modelos de captura-recaptura têm sido classificados em dois grandes grupos, dependendo do tipo de população: fechada (Otis *et al.* 1978 e White *et al*. 1982) ou aberta (Pollock *et al*. 1990 e Lebreton *et al.* 1992). Considera-se que a população é fechada quando o seu tamanho se mantém constante durante o período de amostragem e não existem saídas (mortes ou emigração) nem entradas (nascimentos ou imigração) na população. Caso contrário diz-se que a população é aberta. Pollock (1982) propõe um desenho robusto que permite combinar modelos para populações fechadas e abertas.

Ao longo dos anos, estes modelos continuaram a ser muito utilizados na área das ciências biológicas mas a sua aplicabilidade também se foi expandindo às populações humanas, por exemplo na área das ciências médicas e epidemiologia (*"International Working Group for Disease Monitoring and Forecasting"* 1995ab). Seber (1982) faz referência à aplicação de captura-recaptura a problemas de edição de texto, correcção de programas informáticos, controlo de qualidade e em geral a populações evasivas.

3. O estimador de Lincoln-Petersen

A experiência de captura-captura mais simples consiste em recolher (capturar) uma amostra inicial com n_1 animais, que são marcados e devolvidos à área de estudo para que se misturem com a população de $N - n_1$ animais não marcados. Posteriormente, retira-se uma nova amostra, de n_2 animais, da população. Nesta segunda amostra verificaremos que m_2 dos n_2 animais capturados já foram previamente marcados (recapturas). Se considerarmos que a população é fechada, que os animais dentro de cada amostra têm igual probabilidade de captura (*homogeneidade*), que as marcas não se perdem nem são contadas mais do que uma vez pelo observador e que os indivíduos marcados e não marcados estavam aleatoriamente misturados, então esperamos que a proporção de animais marcados na segunda amostra seja semelhante à proporção de animais marcados na população total, ou seja

$$\frac{m_2}{n_2} \approx \frac{n_1}{N}.$$

Desta relação resulta o conhecido estimador de Lincoln-Petersen:

$$\hat{N} = \frac{n_1 n_2}{m_2}.$$

Este estimador pode ser obtido por diferentes métodos de estimação e está na base de diversos modelos probabilísticos. No entanto, apesar de apresentar a mesma forma analítica, a interpretação pode variar com os pressupostos elaborados (Alpizar-Jara 2000, Jorge e Alpizar-Jara 2006).

Na figura 1 apresenta-se um desafio bastante ilustrativo dos modelos de captura-recaptura, disponível na página de internet *Figure This!*. Este espaço foi criado pela *National Council of Teachers of Mathematics*, nos Estados Unidos da América, em cooperação com outras entidades, para envolver os estudantes e as suas famílias em desafios matemáticos que podem ser resolvidos em casa. Estes divertidos desafios são cuidadosamente escolhidos, de alta qualidade e apelam à utilidade da matemática na resolução de problemas da vida real.

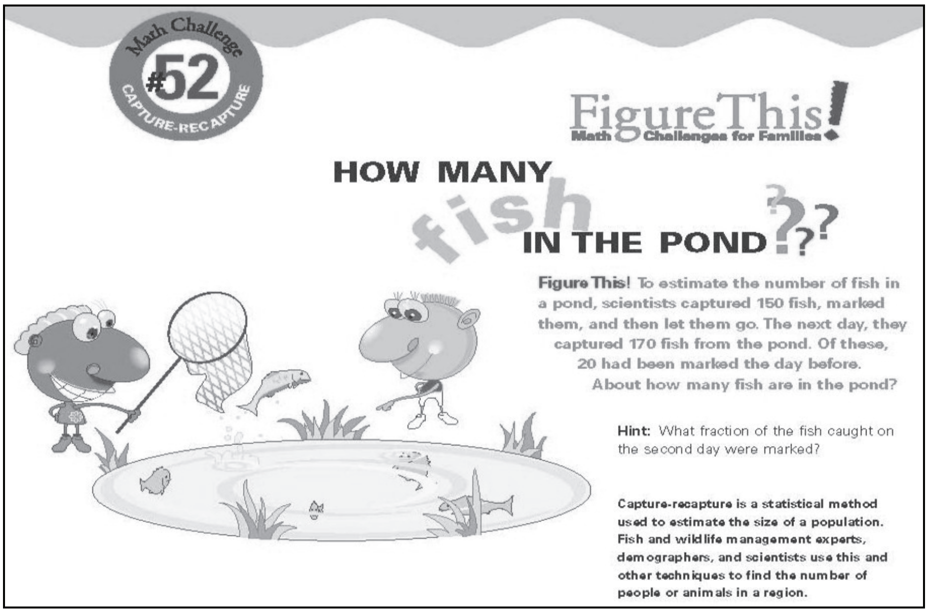


Figura 1: Desafio 52 – Captura-recaptura, disponível na página de internet *Figure This!* (http://www.figurethis.org/challenges/c52/challenge.htm).

4. Modelação da heterogeneidade nas probabilidades de captura

O pressuposto de homogeneidade das probabilidades de captura é muitas vezes violado, devido a factores externos entre diferentes momentos de amostragem (t = variação temporal), a características dos indivíduos (h = heterogeneidade), ou à forma como os indivíduos reagem às armadilhas (b = comportamento) onde se podem observar efeitos do tipo "*trap happy*" ou "*trap shy*". De forma a incorporar estas componentes na modelação, foram propostos oito modelos que combinam estas três fontes de variação, que se podem apresentar numa estrutura hierárquica, como se ilustra na Figura 2. O modelo M_{tbh} considera as três fontes de variação em simultâneo e o modelo nulo M_0 assume que as probabilidades de captura são constantes. A selecção de modelos é habitualmente efectuada através de um critério baseado numa função discriminante multivariada que considera vários testes de ajustamento e a validação dos modelos ajustados. Este procedimento está disponível no *software*, de distribuição livre, CAPTURE (Otis *et al.* 1978 e White *et al.* 1982).

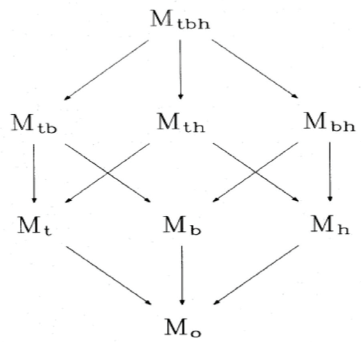


Figura 2: Estrutura hierárquica dos modelos usuais para tratar a heterogeneidade nos problemas de captura (adaptada de White *et al.* 1982).

Mais recentemente, têm sido implementadas extensões dos oito modelos originalmente propostos e várias abordagens de estimação em *softwares* de livre acesso como MARK (Cooch e White 2002).

Nestes modelos para populações fechadas, a estimação de parâmetros é habitualmente feita com recurso ao método de estimação por máxima verosimilhança e também com alguns métodos não paramétricos. Uma formulação geral da função de máxima verosimilhança para os modelos para populações fechadas é dada por:

$$L(\cdot) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{k} p_{ij}^{x_{ij}} \left(1 - p_{ij}\right)^{1-x_{ij}} \qquad (1)$$

onde N representa o total de indivíduos na população em estudo, k o número de capturas, $x_{ij} = 1$ se o animal i é capturado no instante j, e $x_{ij} = 0$ caso contrário, e p_{ij} representa a probabilidade do animal i ser capturado no instante j, $i = 1, \ldots, N$, e $j = 1, \ldots, k$, i. e. para os diferentes modelos:

- M_0: $p_{ij} = p, \forall i, j$
- M_t: $p_{ij} = p_j, \forall i$
- M_h: $p_{ij} = p_i, \forall j, p_i \cap F(p)$, onde F é a função de distribuição de p
- M_b: $p_{ij} = p$ para a primeira captura, $p_{ij} = c$ para as recapturas
- M_{bh}: $p_{ij} = p_i$ para a primeira captura, $p_{ij} = c_i$ para as recapturas
- M_{th}: $p_{ij} = \varphi_i\ \theta_j$, assume combinação do efeitos t e h multiplicativos
- M_{tb}: $p_{ij} = p_j$ para a primeira captura, $p_{ij} = c_j$ para as recapturas
- M_{tbh}: $p_{ij} = p_{ij}$ para a primeira captura, $p_{ij} = c_{ij}$ para as recapturas.

Os parâmetros destes modelos são o tamanho da população, N, e as probabilidades de captura, p_{ij}. Devido ao elevado número de parâmetros em alguns modelos, a função de verosimilhança (1) apresenta problemas de identificabilidade e estimação se não forem consideradas algumas restrições. Autores como Burnham e Overton (1978) e Chao *et al.* (1992) propõem estimadores alternativos baseados em métodos não paramétricos para evitar estes problemas.

Os primeiros desenvolvimentos do modelo M_h foram considerados por Burnham e Overton (1978), que derivaram um estimador para o tamanho da população em função das frequências de capturas e utilizaram o método Jackknife para corrigir o enviesamento. Mais tarde, Cormack (1989) tentou estimar os parâmetros do modelo que considera heterogeneidade nas probabilidades de captura através de modelos loglineares e, mais recentemente, Pledger (2000), baseando-se nos desenvolvimentos anteriormente feitos por Norris e Pollock (1996) em modelos de misturas, introduziu heterogeneidade nas probabilidades de captura utilizando o método de máxima verosimilhança não paramétrica. Vários estimadores dos modelos tipo M_t foram desenvolvidos por Chao (1989) e mais tarde generalizados para o modelo M_{th} (Chao *et al.*, 1992). Huggins (1989, 1991) propôs a técnica de regressão logística para modelar heterogeneidade nas probabilidades de captura através de covariáveis observáveis.

A inferência bayesiana tem sido utilizada nos modelos M_t que permitem apenas a variação das probabilidades entre os momentos de amostragens (Castledine, 1981) ou quando se aborda o problema da heterogeneidade nos modelos M_h (Basu e Ebrahimi, 2001). Ghosh e Norris (2005) desenvolveram um modelo M_{bh} utilizando uma abordagem bayesiana onde as probabilidades de captura não variam com o tempo, mas variam de indivíduo para indivíduo e dependem da reacção dos mesmos à armadilha.

5. Algumas áreas de aplicação

Seguidamente, chamamos à atenção do leitor para uma variedade de aplicações, dando particular ênfase às aplicações nas áreas da Biologia/Ecologia (populações animais, dinâmica de populações e de comunidades), Ciências Médicas e da Saúde (Epidemiologia, doenças crónicas), Ciências Sociais e Demografia (subcontagem de minorias em censos de população, imigrantes ilegais, os sem abrigo, toxicodependência, prostituição), Controlo de Qualidade e inspecção de softwares.

5.1 Ciências Biológicas

Nas Ciências Biológicas, os modelos de captura-recaptura continuam ser aplicados numa grande variedade de grupos taxonómicos: mamíferos, peixes, aves entre outros, e também em plantas. Algumas contribuições importantes podem ser consultadas em Brownie *et al.* (1985), Burnham *et al.* (1987) e Nichols *et al.* (1992). Mais recentemente, tem havido um grande interesse na utilidade destes modelos na estimação da riqueza de espécies (Nichols *et al*. 1998). Neste contexto, N representa o número de espécies (riqueza de espécies - o parâmetro de interesse) e p_{ij} representa a probabilidade da espécie i estar presente na quadrícula j, $i = 1,..., N$, e $j = 1, ..., t$. O pressuposto de igualdade na probabilidade de detecção entre as espécies restringe fortemente a utilidade dos modelos M_0, M_t, M_b, e M_{tb}. No entanto, a violação deste pressuposto é permitida no modelo M_h e nos modelos que consideram variações nas probabilidades de detecção entre as espécies (Alpizar-Jara e Nichols 2002).

5.2 *Ciências Médicas*

Como referimos na nota histórica, nas últimas décadas os métodos de captura-recaptura têm sido amplamente utilizados em Epidemiologia para estimar e corrigir as taxas de incidência e de prevalência de certas doenças (McCarty *et al.* 1993; Roberts e Scragg 1994). Uma das vantagens desta metodologia é que permite evitar contagens exaustivas e onerosas de pessoas afectadas, que dificilmente estão disponíveis. É possível obter estimativas baseando-nos na existência de listagens incompletas e considerando as sobreposições das pessoas nas listas respectivas (Lee *et al*. 2001, Alpizar-Jara 2003). A dependência entre as amostras é um facto neste tipo de aplicações, o que geralmente se traduz em estimativas enviesadas. Uma forma de abordar o problema da dependência entre várias amostras é mediante o uso dos modelos log-lineares (Cormack 1989).

5.3 *Ciências Sociais*

Nas ciências sociais são vários os artigos publicados com aplicação dos modelos de captura-recaptura em áreas bastante sensíveis da sociedade como sejam: a estimação do número dos sem abrigo (Fisher *et al*. 1994), prostitutas (Kruse *et al.* 2003) e toxicodependentes (Domingo-Salvany *et al.* 1995). Tal como na Epidemiologia, as estimativas deste tipo de populações móveis baseiam-se, de um modo geral, em bases de amostragem de registos incompletos, onde as listas são dependentes entre si. Silva *et al.* (2007) mostram um exemplo de aplicação para avaliar o efeito da violação do pressuposto de independência baseados no trabalho de Domingo-Salvany *et al.* (1995).

Em Demografia, por exemplo, os modelos de captura recaptura têm sido utilizados, sob o nome de sistemas de registo múltiplo, para a correcção dos censos de população por subcontagens de grupos minoritários (Chao e Tsay 1998) e para a estimação do número de imigrantes ilegais (Jandl 2004). Fienberg (1992) apresenta uma extensa lista de referências bibliográficas sobre o uso de modelos de captura-recaptura aplicados à subcontagem nos censos da população e Pollock *et al*. (1994) utilizam estes modelos para estimar a dimensão duma população baseados em registos de listas incompletas.

5.4 *Controlo de Qualidade e inspecção de softwares*

Muitas empresas que se dedicam ao desenvolvimento de software para a manipulação de dados (de contas bancárias, registos médicos, e dos Ministérios de Justiça, por exemplo) estão preocupadas em garantir o sigilo dos dados pessoais e, habitualmente, investem elevadas quantias com esse propósito. Uma das principais ameaças no tratamento dessas bases de dados são as falhas no *software* disponibilizado (Schofield 2007). Os modelos de captura-recaptura têm sido utilizados na detecção de erros em aplicações de inspecção de *software* (Peterson *et al.* 2004). Os modelos propostos consideram a heterogeneidade nas probabilidades de detecção das falhas e as diferenças nas probabilidades de detecção entre inspectores. Vários autores têm questionado a utilidade dos modelos do tipo M_b, mas Alpizar-Jara *et al.* (2008) argumentam que estes modelos também podem ser úteis neste tipo de aplicações dado que é provável que, em algumas situações, exista intercomunicação entre os inspectores sobre as características das falhas detectadas.

6. Algumas reflexões e possibilidades de trabalho futuro

Apesar da crescente utilização desta metodologia nas diversas áreas de conhecimento, os modelos devem ser cuidadosamente avaliados em função dos seus pressupostos. Assim, gostávamos fazer um apelo à comunidade científica para ter em atenção não só o potencial dos métodos de captura-recaptura nas várias áreas de aplicação, mas também as limitações associadas às aplicações concretas.

Devemos também referir que os avanços nestas técnicas de amostragem têm sido acompanhados dos principais desenvolvimentos noutras metodologias estatísticas como sejam as análises de dados categorizados (regressão logística e modelos log-lineares), os critérios de selecção de modelos, a modelação da heterogeneidade, a estatística espacial, os modelos para erros de medição, a mistura de distribuições, a estimação não paramétrica, os métodos de re-amostragem e a inferência bayesiana. Assim, esperamos também que este texto sirva de motivação para que investigadores interessados nestas metodologias possam procurar elos de ligação entre as diversas áreas de interesse.

Na estimação de populações biológicas os métodos de captura-recaptura, amostragem por distâncias, modelos multi-estados e a combinação destes têm tido um papel relevante. A combinação dos métodos de amostragem existentes permite também o desenvolvimento de novos modelos. Por exemplo, nas populações evasivas a combinação da amostragem por distâncias com a amostragem adaptativa é cada vez mais uma realidade (Afonso e Alpizar-Jara 2006). Nos últimos anos tem-se notado o desenvolvimento de modelos espaciais quer para a amostragem por distâncias (Hedley *et al.* 2004) quer para os modelos de captura-recaptura (Borchers *et al.*, 2008). A combinação da amostragem por distâncias com os modelos de captura-recapatura (Alpizar-Jara e Pollock, 1996, 1999; Borchers *et al.* 1998; Monteiro e Alpizar-Jara 2006) permitem lidar com a violação do pressuposto de que $g(0) = 1$ e estimar o valor de $g(0)$. Nas Actas dos Congressos da SPE encontram-se outras contribuições na área da amostragem por distâncias de Alpizar-Jara *et al.* (2001), Marques e Buckland (2005), Rendas e Alpizar-Jara (2005) e Afonso e Alpizar-Jara (2007, 2008).
Finalmente, sugerimos a leitura do artigo de revisão de Schwarz e Seber (1999) sobre o desenvolvimento de modelos e métodos de estimação da abundância animal e também de alguns livros de referência nesta área de investigação como Amstrup *et al.* (2005), Buckland *et al.* (2001), Williams *et al.* (2002).

7. Referências bibliográficas

Afonso, A. e Alpizar-Jara, R. (2006). Amostragem por distâncias adaptativa: combinação de transectos lineares com pontuais. Em: *Ciência Estatística* – Actas do XIII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística (Canto, L. C., Martins, E. G., Rocha, C., Oliveira, M. F., Leal, M. M. e Rosado, F. eds.), Edições SPE, Lisboa, p. 163-172.

Afonso, A. e Alpizar-Jara, R. (2007). Estimação em amostragem por distâncias com distribuições espaciais não homogéneas. Em: *Estatística: Ciência Interdisciplinar* - Actas do XIV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística"; (Eds. Ferrão, M.E., Nunes, C. e Braumann, C.A.) Edições SPE; Lisboa; p. 201-210.

Afonso, A. e Alpizar-Jara, R. (2008). Avaliação dos estimadores de amostragem por distâncias usando processos de Poisson não homogéneos. Em: *Estatística: da teoria à prática*. Actas do XV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística; (Magalhães-Hill, M., Ferreira, M.A., Dias, J.G., Salgueiro, M.F., Carvalho, H., Vicente, P., Braumann, C.) Edições SPE; Lisboa; p. 73-81.

Alpizar-Jara, R. (2000). Muestreo de poblaciones animales basado en modelos probabilísticos. Em: *Memoria de la VII Jornada de Análisis Estadístico de Datos (JAED).* (Ed. Hernández, O.) Escuela de Estadística. Universidad de Costa Rica. p. 9-25.

Alpizar-Jara, R. (2003). Modelos de captura-recaptura: aplicações nas ciências médicas. Em: *II Conferência Estatística e Qualidade na Saúde*. Escola Superior de Tecnologia da Saúde de Lisboa. 6 p.

Alpizar-Jara, R. e Nichols, J. (2002). Modelos de captura-recaptura para estimar o número de espécies numa comunidade ecológica. Em: *Novos Rumos em Estatística.* Actas do IX Congresso anual da Sociedade Portuguesa de Estatística. (Carvalho, L., Brilhante, F. e Rosado, F. eds.) p. 125-136.

Alpizar-Jara, R. e Pollock, K.H. (1996). A combination line transect and capture-recapture sampling model for multiple observers in aerial surveys. *Journal Environmental and Ecological Statistics*, 3(4):311-327.

Alpizar-Jara, R. e Pollock, K.H. (1999). Combining line transect capture-recapture for mark-resighting studies. Em: *Marine Mammal Survey and Assessment Methods*. (Garner, G.W, Amstrup, S.C., Laake, J.L., Manly, B.F.J., McDonald, L.L e Robertson, D.G. eds). A.A. Balkema. Rotterdam. Netherlands. p. 99-114.

Alpizar-Jara, R., Infante, P. e Martins, A. (2008). Inspecções de software usando modelos de captura-recaptura na estimação de falhas. Em: *Estatística: da teoria à prática*. Actas do XV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística; (Magalhães-Hill, M., Ferreira, M.A., Dias, J.G., Salgueiro, M.F., Carvalho, H., Vicente, P., Braumann, C.) Edições SPE; Lisboa; p. 83-92

Alpizar-Jara. R., Stefanski, L.E., Pollock, K.H e Laake, J. (2001). An additive measurement error model in line transect sampling using multiple observes. Em: *Um olhar sobre a Estatística.* Actas do VII Congresso anual da Sociedade Portuguesa de Estatística. Eds. P. Oliveira and E. Athayde. Portugal. p. 539-555.

Amstrup, S.C., McDonald, T.L., e Manly, B.F.J. (2005). Handbook of Capture-Recapture Analysis. Princeton NJ: Princeton University Press.

Basu, S. e Ebrahimi, N. (2001). Bayesian capture-recapture methods for error detection and estimation of population size: Heterogeneity and dependence. *Biometrika*, 88(1):269-279.

Borchers, D. L. e Efford, M. G. (2008). Spatially Explicit Maximum Likelihood Methods for Capture-Recapture Studies. *Biometrics* 64:377-385.

Borchers, D.L., W. Zucchini e R.M. Fewster. (1998). Mark-recapture models for line transects surveys. *Biometrics* 54:1207-1220.

Brownie, C., D. R. Anderson, K. P. Burnham e D.S. Robson. (1985). Statistical inference from band recovery data: a handbook. Second ed. U.S. Fish and Wildlife Service Resource. Publication 156.

Buckland, S. T., Anderson, D. R., Burnham, K. P., Laake, J. L., Borchers, D. L. e Thomas, L. (2001). Introduction to distance sampling. Oxford University Press, New York.

Burnham, K.P. e Overton, W.S. (1978). Estimation of the size of a closed population when capture probabilities vary among animals. *Biometrika* 65:625-633.

Burnham K. P., D. R. Anderson, G. C. White, C. Brownie e K. H. Pollock. (1987). Design and analysis methods for fish survival experiments based on release-recapture. American Fisheries Society Monographs 5, Bethesda, MD.

Castledine, B.J. (1981). A Bayesian Analysis of Multiple-Recapture Sampling for a Closed Population. *Biometrika* 68(1):197-210.

Chao, A. (1989). Estimating population size for sparse data in capture-recapture experiments. *Biometrics* 45:427-438.

Chao, A. e Tsay, P.K. (1998). A sample coverage approach to multiple-system estimation with application to census undercount. *Journal of American Statistical Association* 93:283-293.

Chao A, Lee SM e Jeng SL. (1992). Estimation of population size for capture-recapture data when capture probabilities vary by time and individual animal. *Biometrics* 48: 201-16.

Cooch E. e White, G.C. (2008). Program MARK- A gentle Introduction. 7ed.
Em http://www.phidot.org/software/mark/docs/book/ (Outubro 2008)

Cormack, R.M. (1989). Log-Linear Models for Capture-Recapture. *Biometrics* 45(2):395-413.

Domingo-Salvany, A., Hartnoll, R.L., Maguire, A., Suelves, J.M. e Antó, J.M. (1995). Use of capture-recapture to estimate the prevalence of opiate addiction in Barcelona, Spain, 1989. *American Journal of Epidemiology* 141:567-574.

Fienberg, S.E. (1992). Biobliography on capture-recapture modelling with application to census undercount adjustment. *Survey Methodology* 18:143-154.

Fisher, N., Turner, S.E., Pugh, R. e Taylor, C. (1994). Estimating numbers of homeless and homeless mentally ill people in north east Westminster by using capture-recapture analysis. *BMJ,* 308:27-30.

Ghosh, K.S. e Norris, J.L. (2005). Bayesian Capture-Recapture Analysis and Model Selection Allowing for Heterogeneity and Behavioral Effects. *Journal of Agricultural, Biological & Environmental Statistics*, 10(1):35-49.

Hedley, S. L. e Buckland, S. T. (2004). Spatial models for line transect sampling. Journal *of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 9:181-199.

Huggins, R.M. (1989). On the statistical analysis of capture experiments. *Biometrika* 76:133-40.

Huggins, R.M. (1991). Some Practical Aspects of a Conditional Likelihood Approach to Capture Experiments. *Biometrics,* 47(2):725-732.

International Working Group for Disease Monitoring and Forecasting (1995a). Capture-recapture and multiple-record system estimation, I: History and theoretical development. *American Journal of Epidemiology*, 141:1047-1058.

International Working Group for Disease Monitoring and Forecasting (1995b). Capture-recapture and multiple-record system estimation, I: Application in human diseases. *American Journal of Epidemiology*, 141:1059-1088.

Jandl, M. (2004). The estimation of illegal migration in Europe. *Studi Emigrazione/Migration Studies,* vol. XLI (153): 141-155.

Jorge, C. e Alpizar-Jara, R. (2006). Captura-Recaptura: um estudo de simulação para avaliar o desempenho de estimadores do tipo Lincoln-Petersen. Em: *Ciência Estatística.* Actas do XIII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística. (Eds. Canto e Castro, L., Martins E. G., Rocha, C., Oliveira, M. F., Leal, M. M. e Rosado, F.), p. 423-431.

Kruse, N., Frieda, Behets, F.M., Vaovola, G., Burkhardt, G., Barivelo, T., Amida, X., e Dallabetta, G. (2003). Participatory mapping of sex trade and enumeration of sex workers using capture-recapture methodology in Diego-Suarez, Madagascar. *Sexually Transmitted Diseases* 30(8):664-670.

Laplace, P.S. (1786). Sur les naissances, les mariages et les morts. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Année 1783, Paris. p. 693-702.

Lebreton, J-D., Burnham, K. P., Clobert, J., e Anderson, D.R. (1992). Modeling survival and testing biological hypotheses using marked animals: a unified approach with case studies. *Ecological Monographs*, 62:67-118.

Lee, AJ; Seber, GAF; Holden, JK e Huakau, JT. (2001). Capture-Recapture, Epidemiology, and List Mismatches: Several Lists. *Biometrics* 57(3):707-713.

Lincoln, F.C. (1930). Calculating waterfowl abundances on the basis of banding returns. U.S. *Department of Agriculture*, *Circular*, 118:1-4.

Marques,T.A. e Buckland, S.T. (2005). Transectos lineares em situações de não uniformidade das distâncias disponíveis para detecção. Em: *Estatística Jubilar*. Actas do XII Congresso da SPE (Eds. C. A. Braumann, P. Infante, M. M. Oliveira, R. Alpizar-Jara e F. Rosado). Edições SPE. p. 445-454

McCarty D.J., Tull E.S., Moy C.S., Kwoh C.K. e LaPorte R.E. (1993). Ascertainment corrected rates: applications of capture-recapture methods. *International Journal of Epidemiology* 22:559-565.

Monteiro, J.F.G. e Alpizar-Jara, R. (2006). Estimação bayesiana de g_0 em amostragem por distâncias. Em: *Ciência Estatística*. Actas do XIII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística. (Eds. Canto e Castro, L., Martins E. G., Rocha, C., Oliveira, M. F., Leal, M. M. e Rosado, F.), p. 501-510.

Nichols, J.D., Sauer, JR., Pollock, K.H. e Hestbeck, J.B. (1992). Estimating transition probabilities for stage based population projection matrices using capture-recapture data. *Ecology* 73:306-312.

Nichols JD, Boulinier T, Hines JE, Pollock KH e Sauer JR. (1998). Inference methods for spatial variation in species richness and community composition when not all species are detected. *Conservation Biology* 12:1390-1398.

Norris, J.L. III, e Pollock, K.H. (1996). Nonparametric MLE under two closed capture-recapture models with heterogeneity, *Biometrics* 52:639-649.

Otis, D.L., Burnham, K.P., White, G.C. e Anderson, D.R. (1978). Statistical inference from capture data on closed animal populations. *Wildlife Monographs*, 62, 135 pp.

Petersen C.G.J. (1896). The yearly immigration of young plaice into the *Limfjord* from the German Sea. *Report Danish Biological Station for 1895*, 6:1-48.

Peterson, H., Thelin, T., Runeson, P. e Wohlin, C. (2004). Capture-recapture in software inspections after 10 years research-theory, evaluation and application. *Journal of Systems and Software* 72:249-264.

Pledger, S. (2000). Unified maximum likelihood estimates for closed capture-recapture models using mixtures. *Biometrics* 56:434-442.

Pollock, K.H. (1982). A capture-recapture design robust to unequal probability of capture. *Journal of Wildlife Management* 46:757-760.

Pollock, K.H., S. C. Turner e C. A. Brown. (1994). Use of capture-recapture techniques to estimate population size and population totals when a complete frame is unavailable. *Survey Methodology* 20:117-124.

Pollock, K.H, J.D. Nichols, C. Brownie e J.E. Hines. (1990). Statistical inference for capture-recapture experiments. *Wildlife Monographs* 107. 97pp.

Rendas, L.M.P. e Alpizar-Jara, R. (2005). O modelo logspline aplicado aos transectos lineares. Em: *Estatística Jubilar*. Actas do XII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística. (Eds. Braumann, C.A., Infante, P., Oliveira, M.M., Alpizar-Jara, R. e Rosado, F.) p. 629-640.

Roberts I. e Scragg R. (1994). Application of capture-recature methodology to estimate the completeness of child injury surveillance. *Journal of Pediatric Child Health* 30:514-515.

Schofield, J. (2007). Beyond defect removal: Latent defect estimation with capture recapture method (CRM). *The Journal of Defense Software Engineering*.
Em: http://www.stsc.hill.af.mil/crosstalk/2007/08/0708Schofield.html (Outubro 2008).

Schwarz, C. J. e Seber, G. A. F. (1999). A review of estimating animal abundance III, *Statistical Science* 14:427-456.

Seber, G.A.F. (1982). The estimation of animal abundance and related parameters, 2nd ed. Charles W. Griffin. London.

Silva, N., Afonso, A. e Alpizar-Jara, R. (2007). Captura-recaptura: modelos loglineares na estimação do número de toxicodependentes em Barcelona, Espanha. Em Estatística: *Ciência Interdisciplinar* - Actas do XIV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística"; (Eds. Ferrão, M.E., Nunes, C. e Braumann, C.A.) Edições SPE; Lisboa; p. 741-750

White, G.C., Anderson, D.R., Burnham, K.P., e Otis, D.L. (1982). Capture-recapture and removal methods for sampling closed populations. Los Alamos National Laboratory LA-8787-NERP.

Williams, B.K., Nichols, J.D. and Conroy, M.J. (2002). Analysis and Management of Animal Populations. Academic Press. San Diego.

Processos Estocásticos

Séries temporais e decisão dinâmica

Nazaré Mendes Lopes, *nazare@mat.uc.pt*
Departamento de Matemática, F.C.T.U.C.

1 Introdução

A necessidade de tomar decisões e efectuar análises sobre fenómenos ou sistemas que evoluem de forma aleatória ao longo do tempo são características comuns a muitas das questões que preocupam especialistas de áreas transversais da sociedade actual como a economia e as finanças, a gestão, a tecnologia e a biotecnologia ou a sociologia. Geralmente, a tomada de decisões baseia-se em modelos matemáticos temporais construídos de forma a ter em conta o maior número de características empíricas observadas nos resultados dos fenómenos em estudo. A análise empírica retrospectiva do fenómeno, olhando em particular para os resultados do mesmo sob diferentes pressupostos, é essencial ao desenvolvimento da investigação no domínio da modelação estocástica. Mais, tal como os fenómenos em estudo, esta modelação tem carácter dinâmico. Nenhum modelo é definitivo. A escolha correcta de um modelo decorre, usualmente, da comparação, validada com uma certa confiança, entre as propriedades empíricas dos resultados e as propriedades teóricas de vários modelos de resposta possível. Para além disso, análises empíricas mais profundas de tais fenómenos permitem constatar novas características não tidas em conta nos modelos inicialmente considerados e, assim, procurar uma outra classe que lhes responda.

O carácter não determinista de tais fenómenos justifica a sua inclusão no domínio geral das Probabilidades e Estatística ou, mais particularmente, dos Processos Estocásticos. De facto, o estudo destes processos apresenta, relativamente à Teoria Básica das Probabilidades, o aspecto inovador de desenvolver modelos matemáticos para fenómenos aleatórios dinâmicos, isto é, cuja dependência do tempo (ou de outro eventual parâmetro) tem um papel preponderante. Assim, a probabilidade aparece não no sentido de cada resultado de uma experiência aleatória determinar uma única observação, um único número por exemplo, mas sim o comportamento de algum sistema ao longo de uma sequência ou intervalo de tempo. Fazendo o contraponto com a Estatística Clássica, onde o dado fundamental é uma família (quando muito numerável) de variáveis aleatórias independentes, realçar-se-á o carácter dinâmico deste modelo estocástico através da dependência, habitualmente existente, entre as variáveis que o definem. De facto, a hipótese de independência das observações não tem agora qualquer sentido: estamos perante variáveis que já se observavam no passado, que podemos observar no futuro e cujas conclusões dependem de um segmento de observações entre dois instantes conhecidos, a que chamamos trajectória do processo.

Podemos definir matematicamente esta situação identificando um processo estocástico com uma família de variáveis aleatórias, $(X_t, t \in T)$, dependentes de um parâmetro t (em geral o tempo), todas definidas sobre um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, o que nos permite fazer intervir o acaso da forma axiomatizada habitual. Nas situações em estudo no presente texto esta dependência é temporal e o espaço dos tempos, T, é discreto, usualmente $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, o que conduz à designação natural de tais processos como séries temporais ou cronológicas.

A construção de um modelo adequado, que permita descrever e interpretar a evolução da série, é fundamental para a resolução dos diferentes problemas que se põem na análise das séries temporais. Existem vários tipos de modelos que distinguimos entre teóricos e empírico-teóricos.

Os modelos teóricos estão associados a fenómenos aleatórios cuja descrição permite equacionar matematicamente a sua evolução. Destes, podem referir-se, em particular, os caminhos aleatórios, os processos de ramificação ou os processos de nascimento e morte. Quanto aos modelos empírico-teóricos, objecto essencial deste estudo, diremos que são modelos teóricos criados para descrever o comportamento evolutivo de um conjunto de dados reais. Destes, destacamos como particularmente importantes os modelos auto-projectivos, isto é, genericamente, aqueles em que o processo em cada instante é função dos seus valores passados e de uma perturbação aleatória. Procura-se que tais modelos verifiquem teoricamente as características empíricas dos dados a representar. Há, assim, uma dialéctica entre o teórico e o empírico em permanente desenvolvimento. À medida que vamos conseguindo, teoricamente, responder aos factos empíricos conhecidos sobre o tipo de dados a descrever, aumenta a necessidade de prosseguir estudos sobre tal tipo de dados que permitam identificar novas características comportamentais.

Um aspecto essencial ligado à análise de dados temporais tem a ver com a impossibilidade de representar uma evolução totalmente anárquica da série de dados. Nomeadamente, a presença de valores aberrantes ou de características sazonais na série em análise pode conduzir a modelos matemáticos incorrectos. Assim, impõe-se um prévio procedimento de filtragem que elimine factores alheios à evolução da própria série e a transforme numa outra com propriedades de estabilidade no tempo, isto é, verificando as chamadas propriedades de estacionaridade.

Recorrendo aos modelos lineares de séries temporais e à sua limitação para descrever determinado tipo de dados, em particular os de natureza financeira, procuraremos ilustrar as questões genericamente referidas nesta introdução.

2 Modelos auto-projectivos de séries temporais

Os modelos auto-projectivos constituem uma das principais aproximações matemáticas da análise de séries temporais com objectivo de previsão. A ideia básica subjacente a tais modelos é a de encontrar uma formulação matemática que, a menos de um certo erro, gere aproximadamente a história de evolução da série e reproduza as suas características padrão. Em comparação com outras metodologias, esta apresenta a enorme vantagem de usar apenas, na obtenção de previsões, informação associada à série que pretendemos prever e não informação contida em séries subjacentes que se crê influenciarem o comportamento da série original. É assim uma técnica mais parcimoniosa e particularmente útil para previsões a curto e médio prazo.

Um processo estocástico $(X_t, t \in T)$ verifica um modelo auto-projectivo se é função dos seus valores passados e de um processo centrado e não correlacionado, $(\varepsilon_t, t \in T)$, habitualmente designado processo de erro, isto é,

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, \varepsilon_t), \text{ para todo } t \in T,$$

com f uma função mensurável dependente de um certo número de parâmetros desconhecidos.

Após a construção ou definição do modelo, há que estimar os parâmetros envolvidos nessa definição. A validação do modelo estimado por um procedimento de teste estatístico que comprove a sua adequação aos dados observados é indispensável à correcta utilização do mesmo em estudos subsequentes, designadamente de previsão.

Estes estudos serão tanto mais fiáveis quanto mais regular for, no tempo, a função que descreve a série em estudo e quanto menor for o horizonte de previsão. O interesse de tratar séries estacionárias é assim evidente.

Até ao início dos anos 80 estes estudos foram dominados pelos modelos lineares, com particular ênfase, no caso estacionário, para os modelos *ARMA* (auto-regressivos/médias móveis), situando-se nos anos 70, e na sequência do aparecimento do livro de Box e Jenkins (1970, ed. revista 1976), a época de ouro do seu desenvolvimento. A formulação retida para estes modelos permite exprimir o valor presente da série como função linear dos seus valores passados e dos valores presente e passados de um ruído que se interpreta como a inovação da série. Mais precisamente, diz-se que um processo estocástico real $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo *ARMA* de ordens p e q, $ARMA(p,q)$, se verifica a seguinte equação de recorrência,

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \ldots - \varphi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

onde $(\varphi_i)_{1 \le i \le p}$ e $(\theta_i)_{1 \le i \le q}$ são constantes reais e $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ é um processo de erro de variância constante.

Em algumas séries temporais a hipótese de estacionaridade não é fácil de aceitar, designadamente quando é notória a presença de uma tendência de crescimento ou decréscimo. A tendência poderá ser eliminada com um simples procedimento de diferenciação, isto é, poderá ser já aceitável aquela hipótese para a série das diferenças

$$Y_t = X_t - X_{t-1} = (1-L)X_t$$

ou, mais geralmente, para a série das diferenças de ordem d, isto é, para

$$Y_t = (1-L)^d X_t,\ d \in \mathbb{N},$$

onde L é o operador tal que $L^k X_t = X_{t-k}$.

A modelação $ARMA$ estacionária será então agora aplicada à nova série $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$.

Alargamos deste modo a classe dos modelos $ARMA$ à os chamados modelos $ARIMA(p,d,q)$ (a letra I provém da palavra *integrated)*, cujo objectivo essencial é transformar uma série com certas características não estacionárias numa estacionária. Nota-se que, na prática, não é habitual ir além das diferenças de ordem 1 ou 2.

Outro aspecto a ter em conta na modelação estacionária de séries temporais tem que ver com a eliminação dos, eventualmente existentes, perfis sazonais; por exemplo, para certas séries mensais os dados relativos a um mesmo mês em diferentes anos têm tendência a situar-se de maneira análoga em relação à média anual. A fim de contornar este problema, Box e Jenkins introduziram uma classe de modelos, generalização dos anteriores, capazes de ter em conta tais sazonalidades. Tais modelos são denominados $SARIMA$ (a letra S decorre do termo *sazonal*). O princípio subjacente a esta modelação tem a ver com a aplicação da modelação $ARIMA$ ao modelo inicial após a eliminação neste da sazonalidade. Por exemplo, se designarmos por S o período correspondente à sazonalidade da série inicial $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, a simples consideração da série transformada

$$Z_t = X_t - X_{t-S}$$

poderá já conduzir a uma série sem sazonalidade. A esta nova série poderá ser agora aplicada a modelação $ARIMA$.

3 Identificação de um modelo da família ARIMA

A identificação, em termos práticos, do modelo ou modelos que podem ajustar-se a determinado conjunto de dados baseia-se sobretudo na análise das funções de autocorrelação e de autocorrelação empíricas, associadas à série observada, e sua comparação com as correspondentes funções teóricas, quando existem, para tais modelos.

De facto, a família dos modelos $ARMA$ estacionários é caracterizada à ordem 2, isto é, através dos resumos de 2ª ordem, pelas correspondentes funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial. Ilustremos este aspecto com os modelos auto-regressivos de ordem p, isto é, $ARMA(p,0)$, para os quais os dois teoremas de caracterização a seguir enunciados são de importância fundamental no procedimento prático de identificação.

Teorema 1 *Uma condição necessária e suficiente para que um processo estacionário* ([1]) *centrado* X *admita uma representação auto-regressiva* (AR) *é que as autocorrelações,* $\rho(h),\ h \geq 0,$ *se escrevam como combinações de funções exponenciais de* h, *da forma*

$$\rho(h) = \sum_{j=1}^{p^*} A_j \frac{1}{(z_j)^h}, A_j \in \mathbb{C}.$$

Nota-se que os valores z_j são as raízes do polinómio auto-regressivo $\Phi(L) = 1 - \varphi_1 L - ... - \varphi_p L^p$. Assim, se a representação é tal que tais raízes são de módulos maiores do que 1 então as autocorrelações do modelo tendem para zero de modo exponencial.

---

[1] Um modelo $AR(p)$ admite uma solução estacionária única se e só se todas as raízes do polinómio $1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i x^i$ são de módulos diferentes de 1. Se (e só se) tais raízes são de módulos superiores a 1 podemos interpretar ε como o processo de inovação (isto é, ε_t é não correlacionado com o passado de X à data t).

Teorema 2 *Uma condição necessária e suficiente para que um processo estacionário centrado admita uma representação AR é que a sucessão das autocorrelações parciais se anule a partir de uma certa ordem. Tal ordem é a ordem da representação auto-regressiva.*

Assim, se as sucessivas autocorrelações empíricas da série observada apresentam um decréscimo exponencial e as correspondentes autocorrelações parciais empíricas são significativamente nulas a partir de certa ordem, a representação do fenómeno em estudo por um modelo auto-regressivo é bastante verosímil.

Se o processo que gerou a série de observações é descrito por um modelo $ARIMA$ então, dada a sua não estacionaridade, não existe função de autocorrelação. No entanto, sendo processos de 2ª ordem, existe sempre a correlação entre X_t e X_{t+h} , que se prova tender para 1 quando t tende para $+\infty$. Assim, se as autocorrelações empíricas da série observada permanecem próximas de 1 para um número suficientemente grande de instantes (por exemplo, se o seu decréscimo, para instantes positivos, é lento), é natural diferenciar a série a fim de a tornar estacionária. O número de vezes, d , que devemos diferenciar é obtido aplicando o critério anterior às sucessivas séries diferenciadas, tantas vezes quantas as necessárias.

A detecção de factores sazonais também é feita com o recurso ao comportamento das autocorrelações e autocorrelações parciais empíricas. Neste caso, se estamos em presença de uma sazonalidade de período S , tais funções tomam valores grandes, em módulo, para os índices múltiplos de S .

4 Processo de erro na modelação de séries financeiras

A evolução dos modelos anteriormente considerados está limitada a uma formulação linear pelo que se torna evidente o carácter restritivo do seu campo de aplicação, quando pretendemos obter bons ajustamentos para certos sistemas reais. Além disso, não tendo tais modelos qualquer outro tipo de especificação, por exemplo informação sobre a evolução no tempo dos seus momentos condicionais, revelam-se, em particular, insuficientes para o tratamento de certos problemas financeiros e monetários (índices da bolsa de valores, taxas de juro e de câmbio, inflação...) nos quais a variabilidade instantânea (ou volatilidade) das séries de valores associados depende de modo significativo do passado. Este problema revela-se nos resíduos da estimação de tais séries por modelos do tipo $ARIMA$ quando, havendo compatibilidade entre as funções de correlação e de correlação parcial da série de dados e as de um tal modelo linear, a estimação resultante conduz a um resíduo com características diferentes das de um ruído branco clássico.

Os ruídos brancos clássicos são em geral considerados independentes ou mesmo Gaussianos, não sendo formulada qualquer hipótese sobre a forma como evolui no tempo a sua variabilidade instantânea que, como já foi referido, em dados de natureza financeira depende de modo significativo do passado. Esta característica, reconhecida pelo menos desde Mandelbrot (1963) que, sobre dados relativos à inflação e a taxas de juros, afirmou *...large changes tend to be followed by large changes - of either sign - and small changes tend to be followed by small changes...*, é também constatada por Friedman que, na sua Nobel Lecture (1977), considera que *as mais altas taxas de inflação estão geralmente associadas à sua maior variabilidade e, presumivelmente, a uma maior incerteza sobre as taxas futuras*.

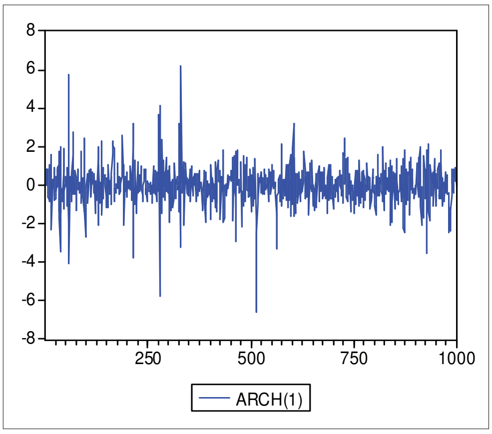
Este tipo de séries apresenta também características de não normalidade. De facto, as observações, não correlacionadas ao longo do tempo, são em geral bem descritas por uma distribuição simétrica, unimodal e com caudas mais pesadas do que a normal (leptocúrtica).

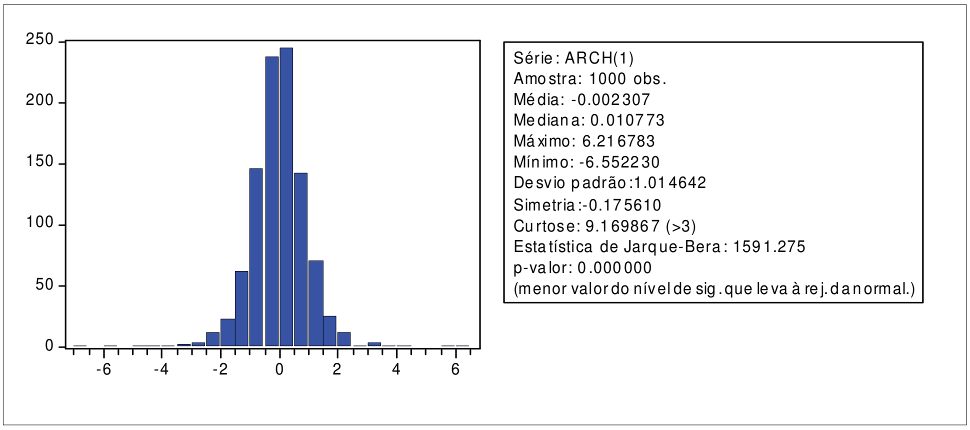
Tais constatações empíricas levam Robert Engle a propor, em 1982, uma classe de modelos para séries temporais, com características de processos de erro, que prevêem uma evolução no tempo da respectiva variância condicional. Tais modelos, ditos com heteroscedasticidade condicional auto-regressiva de ordem q ($ARCH(q)$), definem a variância condicional ao passado do processo no instante t (volatilidade) como uma função linear dos quadrados dos valores do processo anteriores àquele instante t .

As trajectórias destes processos, que revelam um comportamento compatível com a observação de

Mandelbrot, bem como a análise das respectivas distribuições empíricas, ilustram bem a sua adequação a tal tipo de dados.

Nas figuras abaixo tais aspectos são ilustrados quer com a trajectória de 1000 observações de uma série gerada de acordo com o modelo $ARCH(1)$ verificando $E\left(\varepsilon_t^2 \middle| \underline{\varepsilon}_{t-1}\right) = 0.3 + 0.7\varepsilon_{t-1}^2$ ([2]) quer com a correspondente análise estatística empírica, que inclui, em particular, um teste à normalidade da sua lei.





Na tentativa de encontrar formulações mais adequadas para a variabilidade instantânea surgiram inúmeras generalizações e extensões dos modelos $ARCH$, que podemos incluir numa classe geral de processos de erro condicionalmente heteroscedásticos (CH) com a seguinte definição:

Definição Diz-se que $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ segue *um modelo condicionalmente heteroscedástico de ordens* p *e* q, $CH(p,q)$, se

$$E\left(\varepsilon_t \middle| \underline{\varepsilon}_{t-1}\right) = 0 \text{ e } V\left(\varepsilon_t \middle| \underline{\varepsilon}_{t-1}\right) = h_t = H\left(\varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-q}, h_{t-1}, \ldots, h_{t-p}\right),$$

onde H é uma função real definida sobre $\mathbb{R}^{p+q}$, estritamente positiva e Borel - mensurável.

Observe-se que, é solução de um modelo $\mathrm{CH}(p,q)$ todo o processo ε da forma $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} Z_t$, com $h_t = H\left(\varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-q}, h_{t-1}, \ldots, h_{t-p}\right) = G\left(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\right)$, sendo G uma função real, estritamente positiva e mensurável, e $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ uma sucessão de variáveis aleatórias reais (v.a.r.) independentes e identicamente distribuídas, centradas e reduzidas e tais que Z_t é independente de $\underline{\varepsilon}_{t-1}$.

Algumas características interessantes destes modelos podem ser de imediato obtidas como consequência da definição anterior e reforçam a sua boa adequação a dados financeiros. De facto, a condição $E\left(\varepsilon_t \middle| \underline{\varepsilon}_{t-1}\right) = 0$, que pode interpretar-se como uma condição de ortogonalidade ao passado do processo, permite-nos concluir ainda a ortogonalidade e a inexistência de correlações condicionais a

[2]Designa-se por $\underline{\varepsilon}_t$ a σ-álgebra gerada por $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$, i.e., $\underline{\varepsilon}_t = \sigma(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$.

qualquer passado do processo. Além disso, tais processos verificam propriedades de ruído branco (não necessariamente homoscedástico) relativamente à lei condicional e são ruídos brancos, no sentido clássico, desde que sejam estacionários. Permitem também modelar inovações não Gaussianas, sendo, em particular, leptocúrticos.

A especificação da forma funcional H conduz à obtenção das múltiplas classes de modelos que, desde os já referidos processos $ARCH$ de Engle, têm surgido na literatura, e que permitem ter em conta outras características particulares eventualmente presentes nas séries reais a modelar. Os processos $GARCH$ e $GTARCH$ parecem-nos representar classes de modelos de grande utilidade prática e com características suficientemente diferenciadas.

Os modelos *ARCH generalizados de ordens* p *e* q, $GARCH\ (p,q)$, introduzidos por Bollerslev em 1986, são a generalização mais natural dos $ARCH$ (ou $GARCH\ (0,q)$) e a sua variância condicional é dada por $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}$, onde $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0,\ i = 1,...,q,$ e $\beta_j \geq 0,$ $j = 1,..., p.$

Com esta formulação procurou-se ir ao encontro de uma dinâmica auto-regressiva/média móvel para o quadrado do processo e assim minimizar a ordem de atrasos associada à dinâmica, simplesmente auto-regressiva, presente no quadrado de um processo $ARCH$.

Esta classe de modelos apresenta uma importante limitação, resultante da formulação quadrática retida para a expressão da variância condicional. Com efeito, a influência dos valores passados do processo na variabilidade instantânea da série não tem em conta os seus sinais, mas apenas os seus valores absolutos. Ora, em particular no caso das séries financeiras, surgem frequentemente assimetrias na variabilidade; por exemplo, a variabilidade é em geral maior depois de um decréscimo do que após um acréscimo de igual valor absoluto. Os modelos *threshold ARCH* (*ARCH com limiares*), introduzidos em Zakoian (1990), permitem modelar assimetrias na variabilidade tendo em conta, de modo distinto, a influência de valores simétricos do processo subjacente.

Em Rabemananjara e Zakoian (1993) surge uma generalização destes, os modelos $GTARCH$ (*ARCH com limiares generalizados*), onde, seguindo a ideia de Bollerslev, se introduziu uma dinâmica endógena na variância condicional por forma a minimizar a já referida ordem de atrasos e consequente perda de informação. A variância condicional de tais processos $GTARCH(p,q)$ é definida pela função

$$h_t = \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{i,+}\, \varepsilon_{t-i}^{+} - \sum_{i=1}^{q} \alpha_{i,-}\, \varepsilon_{t-i}^{-} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\, h_{t-j} \right)^2,$$

com $\alpha_0 > 0,\ \alpha_{i,+} \geq 0,\ \alpha_{i,-} \geq 0,\ i = 1,...,q,$ e $\beta_j \geq 0,\ j = 1,..., p.$ Se $p = 0$, encontramos os já referidos modelos $TARCH$ de ordem q.

O estudo das propriedades de estacionaridade destes modelos é fundamental para averiguar da sua correcta adequação a dados estacionários ou tornados estacionários. Podemos desde já afirmar que para todos estes modelos existem soluções estacionárias únicas.

A análise da estacionaridade fraca foi inicialmente desenvolvida a partir das formulações lineares que foram obtidas para certas funções do processo e do estudo correspondente para modelos lineares. Ora, a determinação destas funções, muito simples no caso dos modelos $GARCH$, complica-se enormemente quando passamos a modelos com limiares não tendo sido mesmo encontradas no caso dos modelos com limiares generalizados. Tal facto, levou à descoberta de uma outra metodologia que permitiu resolver, em simultâneo, a estacionaridade forte e fraca bem como a ergodicidade de tais modelos.

Tal metodologia baseia-se fundamentalmente na obtenção de uma representação Markoviana multivariada do tipo auto-regressivo com coeficientes aleatórios para uma função vectorial do processo ε da qual se deduz a solução estacionária para ε. Nomeadamente, são obtidas condições necessárias e suficientes de estacionaridade forte e fraca para processos ε, seguindo modelos $GTARCH(p,q)$, solução da anteriormente referida equação do tipo $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} Z_t$. Além disso, sob as mesmas condições, tais modelos são ergódicos. Constata-se ainda que todo o modelo fracamente estacionário é fortemente estacionário, isto é, a condição de existência de momentos de 2ª ordem é mais exigente que a de estacionaridade da lei.

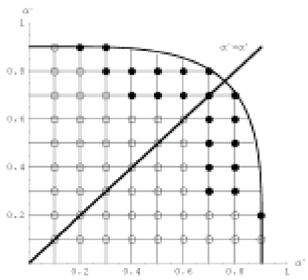
Em particular, no caso de um modelo $TARCH(1)$ condicionalmente Gaussiano, isto é, tal que $\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha_{1,+}\varepsilon_{t-1}^{+} - \alpha_{1,-}\varepsilon_{t-1}^{-}$, com $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ ruído branco Gaussiano, se as v.a.r. $A_t = \alpha_{1,+}Z_t^{+} - \alpha_{1,-}Z_t^{-}$ são tais que $E(\ln A_t)$ existe e é estritamente negativa então existe uma solução forte e fracamente estacionária única, que também é ergódica desde que $\alpha_{1,+}^2 + \alpha_{1,-}^2 < 2$. No entanto, basta que $\alpha_{1,+}\ \alpha_{1,-} < \frac{1}{2}\exp\left(-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cong 3.5619...$, para que tal solução exista e seja fortemente estacionária e ergódica. Nota-se que o estudo é desenvolvido a partir da representação Markoviana de coeficientes aleatórios, facilmente dedutível, $\sqrt{h_t} = \alpha_0 + A_{t-1}\sqrt{h_{t-1}}$.

Estudos teóricos que permitam identificar propriedades para estes modelos compatíveis com novas constatações empíricas sobre os dados a modelar continuam a ser preocupação dos investigadores nestes domínios. Em 1986, ao estudar várias séries de retornos financeiros, Taylor observou que, na maior parte delas, a autocorrelação empírica dos retornos em valor absoluto é maior do que a autocorrelação empírica do quadrado de tais retornos. Outros estudos, de que citamos por exemplo Granger e Ding (1995) e Granger *et al* (2000), permitiram também observar a presença de tal relação empírica noutras séries de retornos reais. Assim, perante a já destacada boa adequação dos modelos condicionalmente heteroscedásticos às series financeiras, impôs-se analisar esta propriedade teórica para tais processos. Mais precisamente, têm-se vindo a desenvolver estudos que permitam concluir sobre a validade da relação, conhecida por *propriedade de Taylor*,

$$corr(|\varepsilon_t|, |\varepsilon_{t-1}|) > corr(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2),$$

quando $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo condicionalmente heteroscedástico.

Podemos afirmar que estes estudos estão ainda em fase muito inicial e têm sido sobretudo baseados em simulações. De facto, as expressões teóricas daquelas autocorrelações só foram conhecidas, e apenas para alguns modelos, a partir do trabalho de He e Teräsvirta (1999) e, além disso, o grau de complexidade que apresentam limita fortemente o seu desenvolvimento. Tanto quanto é do nosso conhecimento, os estudos teóricos sobre esta propriedade estavam, até há pouco, circunscritos ao já referido trabalho de He e Teräsvirta e garantiam apenas a existência de um subconjunto de modelos $ARCH(1)$ de valor absoluto, isto é, modelos $TARCH(1)$ em que $\alpha_{1,+} = \alpha_{1,-}$, verificando a propriedade de Taylor. Recentemente, esta propriedade foi estabelecida em Gonçalves, Leite e Mendes Lopes (2007) na classe geral dos modelos $TARCH(1)$, sendo explicitamente exibida a região de valores dos parâmetros a que correspondem modelos verificando tal propriedade. Em particular, se o modelo é um $TARCH(1)$ condicionalmente Gaussiano, uma discretização do conjunto de parametrizações que verificam a propriedade de Taylor está representada pelos círculos a preto na figura abaixo.



Em resumo, a investigação desenvolvida sobre a propriedade de Taylor permite-nos afirmar que esta não é uma característica comum aos modelos condicionalmente heteroscedásticos. Revela, no entanto, que ela poderá estar presente em subconjuntos de parametrizações de todas as classes de modelos deste tipo.

É nossa convicção que o estudo deste problema tem muito ainda a revelar. Em particular, os estudos que desenvolvemos permitem conjecturar que a verificação desta propriedade está muito ligada à cauda da distribuição parente do processo estacionário e sobre a qual tem papel relevante a distribuição do processo gerador, $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$, acima referido.

5 Em jeito de conclusão

No desenvolvimento deste artigo procuramos realçar a importância da dialéctica que é indispensável estabelecer entre o comportamento empírico das séries a descrever e as propriedades teóricas dos modelos a adequar ou a definir. De facto, fica patente não só a importância de procurar, na classe dos modelos conhecidos, aqueles que em cada momento conjugam propriedades teóricas próximas das correspondentes propriedades empíricas dos dados, mas também quão fundamental é, para a criação de novos modelos, a detecção de outros comportamentos empíricos não tidos em conta nos já existentes.

A dinâmica do processo de ajustamento de um modelo estocástico a uma série de dados observada é também particularmente evidente quando tomamos como referência a já clássica metodologia de Box-Jenkins associada à classe dos modelos lineares gerais do tipo *SARIMA*. De facto, partindo do comportamento das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial empíricas da série de dados a ajustar, procuramos o modelo naquela classe que melhor a representa. A aceitação de um tal modelo não é, no entanto, tácita, passando por um controlo de qualidade, por meio de testes estatísticos, que avaliarão, em particular, se o resíduo resultante de uma tal modelação tem propriedades de processo de erro. Caso tal não aconteça, a procura anterior volta ao início mantendo-se esta dinâmica até que uma tal condição mínima seja verificada. Este processo ganha obviamente um maior dinamismo com o aparecimento de novos modelos, designadamente com os processos de erro condicionalmente heteroscedásticos. Não basta agora verificar se o resíduo resultante é um processo de erro pois sabemos que, por exemplo em dados de natureza financeira, pode estar presente uma volatilidade instantânea que os modelos lineares não conseguem incorporar. Há então a possibilidade de, recorrendo de novo a um teste estatístico, questionar a significância da presença de tal volatilidade ou heteroscedasticidade condicional. Confirmada a sua presença, é o recurso à metodologia de Box-Jenkins, agora aplicada aos modelos lineares associados a certas funções do processo de erro (por exemplo, ao quadrado do resíduo no caso *GARCH*), que nos irá conduzir ao modelo mais adequado. Claro que, em qualquer caso, o que temos sempre é uma resposta que tendo muito para ser boa será certamente, no mínimo, aceitável.

Em conclusão, um modelo estocástico para um certo fenómeno é apenas uma representação matemática aceite desse mesmo fenómeno e não uma sua caracterização. Captar as características essenciais dos dados a representar é muitas vezes o mais importante e indispensável, não necessariamente para chegar a uma boa previsão pontual mas, sobretudo, para deduzir sobre o fenómeno em causa um bom intervalo de previsão.

O desenvolvimento teórico e prático dos assuntos sintetizados neste texto pode, por exemplo, ser encontrado em Gonçalves e Mendes-Lopes (2008).

6 Bibliografia

Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 37, 307-327.

Droesbeke, J., B. Fichet et Ph. Tassi (1989) *Séries Chronologiques - Théorie et pratique des modèles ARIMA*, Economica, Paris.

Engle, R. (1982) Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of the U.K. inflation, *Econometrica*, 50, 987-1008.

Gonçalves, E. e N. Mendes-Lopes (2008) *Séries temporais - Modelações lineares e não lineares*, Ed. da Sociedade Portuguesa de Estatística, Lisboa.

Gonçalves, E., J. Leite e N. Mendes-Lopes (2007) Taylor property in the threshold ARCH models, *Proceedings of the 56th ISI Session*, Lisboa (http://www.isi2007.com.pt/isi2007/).

Gouriéroux, Ch. et A. Monfort (1990) *Séries Temporelles et Modèles Dynamiques*, Economica, Paris.

Gouriéroux, Ch. et A. Monfort (1992) *Modèles ARCH et applications financières*, Economica, Paris.

Granger, C.W.J. and Z. Ding (1995) Some properties of absolute return: an alternative measure of risk, *Annales d'Économie et de Statistique*, 40, 67-95.

Granger, C.W.J., S. Spear and Z. Ding (2000) Stylized facts on the temporal and distributional properties of absolute return: an update, *Proceedings of the Hong Kong International Workshop on Statistics and Finance: An Interface* (GChan, W., W. Li and H. Tong, eds.), 97-120, Imperial College Press.

He, C. and T. Teräsvirta (1999) Properties of moments of a family of GARCH processes, *Journal of Econometrics, 92*, 173-192.

Murteira, B., D. Muller, e K. F. Turkman (1993) *Análise das sucessões cronológicas*, McGraw-Hill, Lisboa.

Rabemananjara, R. and J.M. Zakoian (1993) Threshold ARCH models and asymmetries in volatility, *Journal of Applied Econometrics*, 8, 31-49.

Taylor, S. (1986) *Modelling Financial Time Series*, Wiley.

Processos estocásticos aplicados às finanças

João Nicolau, *nicolau@iseg.utl.pt*
Instituto Superior de Economia e Gestão / Universidade Técnica de Lisboa

Introdução

Este artigo foca a ligação entre os processos estocásticos e as finanças. Concretamente, a) procura-se explicar o forte crescimento dos processos estocásticos ligados às finanças, b) exemplificam-se algumas ligações entre a teoria financeira e os processos estocásticos, c) argumenta-se que a área financeira tem contribuído para o desenvolvimento da teoria dos processos estocásticos e, finalmente, d) faz-se uma breve nota sobre o ensino das séries temporais financeiras e disciplinas afins.Bachelier, um matemático Francês na viragem do século XX, é visto por muitos como o fundador da moderna Matemática Financeira. Na sua tese de doutoramento ("Teoria da Especulação") lança as bases do movimento Browniano[1] como modelo do comportamento das cotações em bolsa e usa esse modelo para avaliar opções sobre acções. Historicamente, é um dos primeiros trabalhos a usar explicitamente processos estocásticos no âmbito das finanças. Passado mais de um século sobre a "Teoria da Especulação", pode-se dizer que os processos estocásticos, em tempo discreto e contínuo, estão na base da economia financeira, por uma razão simples: tempo, risco e incerteza são os elementos centrais que influenciam o comportamento dos agentes económicos e dos mercados financeiros em geral e, por essa via são indissociáveis da teoria financeira.

A área dos processos estocásticos, em geral, é vastíssima, e tem sido aplicada em quase todos os ramos da ciência e da tecnologia. Neste artigo detenho-me apenas sobre os desenvolvimentos recentes que têm ocorrido no âmbito das finanças. Estes desenvolvimentos têm sido muito significativos e, como resultado, têm aparecido disciplinas novas, como por exemplo, Econometria Financeira, Séries Temporais Financeiras, Finanças Computacionais (a Matemática Financeira, como disciplina, é mais antiga e deve a sua projecção e visibilidade fundamentalmente aos trabalhos de Fisher Black, Eugene Fama, Harry Markowitz, Robert Merton, Myron Scholes, entre outros).

Forte Desenvolvimento dos Processos Estocásticos no âmbito das Finanças

É incontestável o crescimento extraordinário dos processos estocásticos ligados às finanças. Nenhuma outra área da economia se desenvolveu tão rapidamente nos últimos anos como a dos processos estocásticos aplicados a problemas financeiros. Procurarei a seguir, de forma muito breve, avançar com algumas explicações.

1. Tem-se assistido em muitos países, sobretudo desde a década de 60/70, a uma liberalização e globalização progressiva dos mercados financeiros e não financeiros. Como resultado, o sistema financeiro cresceu exponencialmente. Mas aumentou também de complexidade (na relação entre os agentes, na diversidade produtos financeiros, etc.). Esta crescente complexidade do sistema financeiro, foi acompanhada pelo desenvolvimento de métodos quantitativos adequados à natureza das transacções financeiras e dos instrumentos financeiros criados. Estes métodos têm sido desenvolvidos nas universidades e, sobretudo, nas grandes

[1] Bachelier explorou as ideias do teorema do limite central e, assumindo que o ruído de mercado não possuía memória, deduziu que os incrementos dos preços deviam ser independentes e ter distribuição normal.

instituições financeiras. Na indústria financeira são bem conhecidos os *quants* (ou *quantitative analysts*). Tratam-se de indivíduos com forte formação matemática que se dedicam aos problemas financeiros de base quantitativa. Uma característica singular destes métodos quantitativos é o de se basearem em grande parte em processos estocásticos porque o risco e a incerteza estão presentes em todos os mercados financeiros.

2. Assistiram-se também a progressos muito significativos na modelação quantitativa dos mercados financeiros. Merecem especial destaque autores como Fisher Black, John Cox, Eugene Fama, John Lintner, Harry Markowitz, Robert Merton, Franco Modigliani, Merton Miller, Stephen Ross, Paul Samuelson, Myron Scholes, William Sharpe, Rober Engle, entre outros, cujas contribuições lançaram as fundações da moderna análise financeira quantitativa. Todas as principais contribuições envolveram explicitamente os processos estocásticos, porque (como já argumentámos) o risco e a incerteza, presentes em todos os mercados financeiros, não podem ser dissociados das finanças.

3. O progresso informático nas suas vertentes *hardware* e *software* tem sido muito importante em todas as áreas da estatística. Muitas das técnicas e métodos estatísticos propostos nos últimos anos teriam sido complemente irrelevantes e, certamente, condenados ao esquecimento sem os recursos informáticos existentes. Naturalmente, este argumento justifica o desenvolvimento dos métodos estatísticos em geral, mas é particularmente válido no âmbito das séries temporais financeiras.

4. Outro factor relevante para o desenvolvimento dos processos estocásticos no âmbito das finanças é a grande oferta de séries financeiras. Nenhuma outra área da economia dispõe de tantas e variadas séries temporais como a área financeira. É possível, hoje em dia, obter sem custos séries financeiras longas com periodicidades extremamente elevadas (e.g. observações diárias e intradiárias) praticamente isentas de erros de observação. Por exemplo, o *website* da *Yahoo Finance* fornece, a título gratuito, centenas de milhares de cotações nacionais e estrangeiras com periodicidade diária, semanal ou mensal. É possível também, a baixo custo, adquirir bases de dados de cotações *tick-by-tick* de títulos de acções, taxas de câmbio e taxas de juro compostas por milhões de observações. Esta disponibilidade de dados permite ao investigador validar, confirmar e experimentar novas técnicas e métodos e descobrir novas regularidades empíricas.

A Teoria Financeira e os Processos Estocásticos

O objecto de estudo pertinente em Séries Temporais Financeiras (STF) e áreas afins (e.g. Econometria Financeira) é o preço financeiro observado ao longo do tempo (poderá ser, por exemplo, uma cotação de uma acção, um índice bolsista, uma taxa de câmbio, uma taxa de juro, etc.)[2]. Este preço poderá depois ser convertido em rendibilidade ou retorno caso se trabalhe em tempo discreto. Quase sempre este preço é estudado no quadro de uma teoria financeira. Esta interligação entre finanças e os processos estocásticos é ilustrada a seguir.

1. Uma das aplicações mais importantes da teoria dos processos estocásticos às finanças é a que respeita à determinação do preço *justo* ou prémio de uma *opção*. Uma opção *call* europeia confere ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar um activo (por exemplo uma acção cotada na bolsa) na data de expiração do contrato T, por um preço K previamente fixado. A cotação do activo evolui estocasticamente ao longo do tempo e pode ser

[2] Mais geralmente, o *preço* poderá representar o valor a que um intermediário financeiro informa estar disposto a pagar pela compra de um determinado activo, opção ou futuro, o valor a que um intermediário financeiro informa estar disposto a receber pela venda de um determinado activo, opção ou futuro, o valor final da transacção, o valor definido num mercado de futuros, entre outros.

genericamente caracterizado como um processo estocástico $\{S_t: 0 \leq t \leq T\}$ definido num espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (onde Ω é o espaço amostral, podendo ser identificado como o conjunto de todos os cenários de mercado, $\mathcal{F}$ é a álgebra-σ dos subconjuntos de Ω e P é a medida de probabilidade). No instante T o detentor da opção pode comprar o activo pelo preço K, previamente estabelecido, e vender imediatamente por S_T, supondo obviamente que $S_T > K$. Se $S_T < K$ o detentor da opção não exerce o direito de compra. Desta forma a *receita* (*payoff*) é $max\{S_T - K, 0\}$. Nestas circunstâncias, qual o valor justo do prémio da opção no momento $t < T$? Naturalmente, o valor $max\{S_T - K, 0\}$ depende crucialmente do processo estocástico $\{S_t: 0 \leq t \leq T\}$. Fisher Black e Myron Scholes, assumindo um movimento Browniano geométrico, deduziram uma fórmula matemática para o prémio da opção. Esta fórmula, simples e extremamente útil ainda nos dias de hoje, é considerada por muitos economistas como uma das maiores realizações da teoria financeira.

2. A volatilidade é um tópico fundamental em finanças. O conceito de volatilidade está presente na gestão do risco, na afectação e selecção de activos, na valorização e *hedging* das opções e derivados e em muitas outras operações e estratégias financeiras (no exemplo anterior, o parâmetro mais importante que condiciona o valor $max\{S_T - K, 0\}$ é, precisamente, a volatilidade do processo $\{S_t: 0 \leq t \leq T\}$). A área da modelação e da previsão da volatilidade assenta, naturalmente, em processos estocásticos. A literatura é muita vasta nesta área, e inclui variadíssimos modelos em tempo discreto (e.g. modelos ARCH e modelos de volatilidade estocástica) e em tempo contínuo (e.g. processos de difusão univariados com coeficiente de difusão não constante e processos de difusão de segunda ordem de volatilidade estocástica).

3. A gestão do risco consiste, grosso modo, em identificar as fontes de risco e em medir, controlar e gerir esse mesmo risco. Nesta área, um conceito fundamental é o *Value at Risk* ou VaR (como é usualmente conhecido na literatura). O VaR representa a perda que pode ocorrer num lapso de tempo determinado, com uma certa probabilidade α, supondo que o *portfolio* não é gerido durante o período de análise. Em termos probabilísticos, o VaR é o quantil de ordem α da distribuição teórica de ganhos e perdas. Estes ganhos e perdas evoluem ao longo do tempo e, portanto, são susceptíveis de serem modelados através de processos estocásticos.

4. Uma discussão já longa na literatura debate a eficiência dos mercados financeiros. O mercado de capitais diz-se eficiente se os preços dos produtos financeiros reflectirem toda a informação disponível. Quando é libertada uma informação relevante (por exemplo, um anúncio de distribuição de dividendos de valor superior ao esperado, um anúncio de fusões ou aquisições, etc.) num mercado eficiente os agentes reagem imediatamente comprando ou vendendo de acordo com a informação e os preços ajustam-se imediatamente. Se o mercado é eficiente o preço ajusta-se rapidamente e não há oportunidades para a realização de rendibilidades anormais. Neste caso, o retorno não é previsível e, portanto, deverá ser não autocorrelacionado. Naturalmente esta discussão faz-se no âmbito de um modelo probabilístico de processos estocásticos.

5. Um problema importante em finanças é o da selecção e constituição de *portfolios* de acordo com o princípio geral da obtenção da máxima rendibilidade com a menor volatilidade (risco) possível. Existem várias abordagens para obter a rendibilidade e a volatilidade mas a mais conveniente e adequada diz respeito às previsões (temporais) de rendibilidade e volatilidades associadas aos activos que constituem o *portfolio*. Com efeito, a decisão sobre constituição de *portfolio* dependerá da rendibilidade e da volatilidade futura dos activos financeiros que constituem o portfolio. Trata-se, portanto, de um problema de previsão que deve ser tratado, naturalmente, no âmbito dos processos estocásticos.

As Finanças e o Desenvolvimento da Teoria dos Processos Estocásticos

Os exemplos discutidos no ponto anterior ilustram a forte ligação entre as finanças e a teoria dos processos estocásticos. No entanto, a teoria financeira não se tem limitado a aplicar métodos e procedimentos já estabelecidos na teoria dos processos estocásticos. Tem também expandido a análise dos processos estocásticos, quer propondo novos modelos ou processos estocásticos quer propondo novas metodologias de estimação e inferência. Para ilustrar este tópico tomam-se alguns exemplos.

1. Como referimos anteriormente, a volatilidade é uma das variáveis mais importante em finanças. A questão é como medir, estimar e prever a volatilidade. O modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), devido a Robert Engle, é um produto das séries temporais financeiras. O modelo, definido em tempo discreto, propõe uma especificação dinâmica para a variância condicional de um processo estocástico. A estimação do modelo, normalmente realizada no quadro da estimação de máxima verosimilhança, permite medir, estimar e prever a volatilidade. Não é exagero dizer-se que têm sido produzidos centenas de artigos sobre estas questões. Muitos destes artigos têm refinado a abordagem ARCH, por exemplo, propondo especificações alternativas e testes estatísticos, discutindo as propriedades assimptóticas dos estimadores e testes, etc. Outros modelos de volatilidade, baseados em pressupostos alternativos, têm sido propostos, sendo, provavelmente o mais importante, o modelo de volatilidade estocástica. Estes modelos envolvem questões difíceis de estimação[3] que também têm sido tratados por investigadores da área das finanças.

2. As transacções nos mercados financeiros não ocorrem, naturalmente, de forma espaçada. Se registarmos todas as alterações do preço de um activo, obtemos, para mercados suficientemente líquidos, uma sucessão de observações, de altíssima frequência onde o intervalo entre observações consecutivas pode ser encarado como um processo estocástico, susceptível de ser modelado. Na área das Séries Temporais Financeiras vários modelos têm sido propostos para modelarem o intervalo entre observações, sendo talvez o mais relevante o modelo *autoregressive conditional duration*.

3. Processos estocásticos em tempo contínuo, especialmente processos de difusão tem sido largamente empregues em finanças. Todavia, todos os modelos envolvem parâmetros ou funções desconhecidas que devem ser estimados a partir de observações discretas do processo. A inferência estatística é, pois, crucial em todas as aplicações, particularmente em finanças. Sob certas condições gerais, o método da máxima verosimilhança para processos de difusão baseados em observações discretas apresenta as habituais boas propriedades (consistência, eficiência e distribuição assimptótica normal dos estimadores). Infelizmente, as densidades de transição necessárias para construir a função de verosimilhança são geralmente desconhecidas. Nestas circunstâncias, várias abordagens alternativas têm sido propostas, muitas delas vindas da área das finanças. A título de exemplo, citam-se as seguintes abordagens: método dos momentos generalizados baseados no operador infinitesimal; função martingala de estimação; aproximação da verosimilhança via expansão de Hermite; aproximação da verosimilhança via aproximação numérica da equação progressiva de Kolmogorov; aproximação da verosimilhança via simulação; métodos Bayesianos; métodos baseados em modelos auxiliares (inferência indirecta e método dos momentos eficientes).

4. Os investigadores matemáticos da área das finanças têm expandido os modelos em tempo contínuo, focando sobretudo o caso em que o coeficiente de difusão da equação dos preços é modelado através de uma outra equação diferencial estocástica, governada por outro processo de Wiener, eventualmente correlacionado com o processo de Wiener associado à equação dos preços. Este tipo de modelos é adequado para modelar preços de activos onde se suspeite que a volatilidade dos preços é ela também uma função estocástica. Ainda na área da modelação dos preços, tem sido dada especial atenção aos processos de difusão com saltos de Poisson, por se

[3] Nestes modelos a volatilidade é uma variável latente, não observável, dependente de um erro aleatório, o que impede a utilização dos métodos habituais de estimação.

entender que estes modelos se adequam aos processos sujeitos a alterações bruscas da trajectória, devido, por exemplo, a *crashes* bolsistas ou ataques especulativos súbitos. Estes modelos têm sido aplicados no *apreçamento* das opções e na estimação e previsão da volatilidade.

5. Como referimos, nenhuma outra área da economia dispõe de tantas e variadas séries temporais como a área financeira. É possível obter sem custos, séries financeiras longas com periodicidades extremamente altas (por exemplo, de segundo a segundo). A disponibilidade destas novas séries mostrou novas regularidades empíricas e lançou as bases da teoria da microestrutura de mercado. Em particular foi revelado a existência de um ruído de mercado impossível de detectar com frequência de amostragem inferior. Esta questão tem sido discutida no âmbito da *realized volatility* que é uma medida da volatilidade baseada na variação quadrática de uma semimartingala.

6. Importantes contribuições têm também surgido no âmbito dos processos estocásticos não lineares na média em tempo discreto (nota: interpretamos modelos não lineares na média quando a média condicional é uma função não linear dos seus argumentos). Estas contribuições têm incidido sobretudo nos modelos do tipo *regime-switching*. Estes tipos de modelos adequam-se, por exemplo, em situações onde existem alterações bruscas e inesperadas nas trajectórias dos processos (e.g., ataques especulativos, *crashes* bolsistas, anúncios públicos de medidas do governo, eventos políticos e, em geral, eventos extraordinários não antecipados) ou onde existem alterações da dinâmica do processo sem alterações bruscas nas trajectórias. Para este tipo de fenómenos, têm sido discutidos dois tipos de modelos: 1) modelos onde a mudança de regime é função de uma variável observável, como por exemplo, os modelos com variáveis impulso, os modelos limiares ou *threshold* AR (TAR), os modelos onde os coeficientes associados às componentes AR são funções não lineares dos valores passados (STAR, *smoothed transition* AR), entre outros; 2) modelos onde a mudança de regime não é observada, incluindo-se, nesta classe, os modelos onde os regimes são independentes entre si (como, por exemplo, os modelos *simple switching* ou de Bernoulli) e os modelos onde existe dependência entre os regimes (como por exemplo, os modelos *Markov-Switching*).

7. A área da estimação não paramétrica tem estado também muito activa em finanças. Em certos casos, a teoria e os dados são insuficientes para especificar parametricamente o modelo de interesse. Nestes casos considera-se uma abordagem não paramétrica. No âmbito dos modelos de difusão, tem sido particularmente estudada a estimação dos coeficientes infinitesimais (tendência e difusão) e das densidades de transição e estacionárias (quando existam). Estas estimativas têm sido empregues para testar a especificação paramétrica de vários modelos. Outras aplicações incluem, por exemplo, o estudo da homogeneidade dos coeficientes (concretamente, serão os coeficientes infinitesimais dependentes apenas do estado do processo ou, eventualmente, dependem também do tempo?) e do *apreçamento* das opções (concretamente estuda-se se o preço das opções é consistente com os seus valores teóricos, baseados em modelos paramétricos).

Muitos outros exemplos poderiam ser acrescentados (por exemplo, na teoria dos valores extremos para modelar cenários de risco e valores em perda, redes neuronais, etc.).

O Ensino das Séries Temporais Financeiras e disciplinas Afins

Dada a importância dos processos estocásticos no âmbito das finanças, é pois natural que o ensino o das séries temporais financeiras e disciplinas afins (econometria financeira, métodos de previsão para finanças, etc.) estejam já firmemente presentes nas principais faculdades de economia, gestão e finanças do mundo, em todos os níveis do ensino superior (licenciatura, mestrado e doutoramento). Uma breve consulta na Internet mostra que centenas de universidades em todo o mundo oferecem Séries Temporais Financeiras, Econometria Financeira ou Matemática Financeira. Apresenta-se a seguir uma lista de algumas universidades que leccionam a unidade curricular *Financial*

Econometrics: Harvard University, EUA; London School of Economics, Reino Unido; School of Economics and Business Administration University of Navarre, Espanha; University of Washington, Seattle, Washington, EUA; Aarhus School of Business, Dinamarca; New York Stern School of Business, EUA; University of Wales Swansea, Reino Unido; Macquarie University, Austrália. Entre nós várias universidades oferecem também unidades curriculares na área de ligação entre as finanças e os processos estocásticos. No ISEG/UTL (Instituto Superior de Economia e Gestão) têm sido leccionadas as seguintes unidades curriculares: Econometria Financeira (licenciatura), Séries Temporais para Finanças (mestrado) e Métodos de Previsão para Finanças (mestrado); na Universidade Nova de Economia, *Introduction to Financial Econometrics* (mestrado); no ISCTE (Instituto Superior das Ciências do Trabalho e da Empresa), Métodos e Estudos Empíricos em Finanças (Doutoramento); na Faculdade de Economia da Universidade de Algarve, Econometria Financeira (MBA); na Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, Análise de Séries Financeiras (mestrado).

Bibliografia[4]

Aït-Sahalia, Y., (1996), "Nonparametric Princing of Interest Rate Derivative Securities", *Econometrica*, 64, 527-560.

Aït-Sahalia, Y., (2002), *"Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-form Approximation Approach." Econometrica, 70(1), 223-262.*

Amin, K. e V. Ng, (1993), "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility", *Journal of Finance,* 48(3), 881-910.

Andersen, T.G., T. Bollerslev, F.X. Diebold e H. Ebens, (2001), "The distribution of realized stock return volatility", *Journal of Financial Economics*, 61, 43-76.

Bachelier, L., (1900), *Théorie de la Spéculation*, thèse de Mathématique, Paris.

Barndorff-Nielsen, O.E. e N. Shephard, (2006), "Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation", *Journal of Financial Econometrics*, 4, 1-30.

Bibby, B., e M. Sorensen, (1995), "Martingale Estimation Function for Discretely Observed Diffusion Process", *Bernoulli, 1, 17-39.*

Black, F., e M. Scholes, (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*", *81, pp. 637-654.*

Bollerslev, T., (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity", *Journal of Econometrics* 31, 307-327.

Bollerslev, T., R.Y. Chou e K.F. Kroner, (1992), "ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence", *Journal of Econometrics,* 52, 5-59.

Cox, J., Ingersoll J., Ross S. , (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 385-407.

Danielsson, J., (1994), "Stochastic Volatility in Asset Prices - Estimation With Simulated Maximum Likelihood", *Journal of Econometrics*, 64, 375-400.

Duffie, D., (1988), *Security Markets : Stochastic Models*, Academic Press.

[4] Lista necessariamente incompleta de artigos muito relevantes na área dos processos estocásticos em finanças. Inclui também algumas publicações do autor na área dos processos com aplicações às finanças.

Engle, R., (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, 987-1008.

Engle, R., (2001), "GARCH101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics", *Journal of Economic Perspectives,* 15, 157-168

Engle, R., e J. Russell, (1998), " Autoregressive Conditional Duration: A New Model for Irregularly Spaced Transaction Data", *Econometrica* 66.

Eraker, B., (2001), "MCMC Analysis of Diffusion Models With Application to Finance", *Journal of Business & Economic Statistics*, 19, 177-191.

Fama, E., (1976), "Forward Rates as Predictors of Future Spot Rates", *Journal of Financial Economics*, 361-77.

Gallant A., e G. Tauchen, (1996), "Which moments to match?", *Econometric Theory*, 12, 657-681.

Hansen, L., (1982), "Large Sample Properties of Generalized Methods of Moments", *Econometrica*, 50.

Hansen, L., e J. Scheinkman, (1995), *"Back to the Future: Generating Moment Implications for Continuous-Time Markov Processes", Econometrica, 63, 767-804.*

Hull J, e A. White, (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, 281-300.

Jacquier, e., N. Polson, e P. Rossi, (1994), "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models", *Journal of Business and Economic Statistics,* 12,371-389

Kessler, M., (1997), "Estimation of an Ergodic Diffusion from Discrete Observations", *Scandinavian Journal of Statistics*, 24, 211- 229.

Lintner, J., (1965), "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.

Lo, A., (1988), "Maximum likelihood estimation of generalized Ito processes with discretely sampled data", *Econometric Theory*, 4, 231--247.

Marakowitz, H., (1952), "Portfolio selection", *Journal of Finance,* 7, 77-91.

Merton, R., 1990, *Continuous Time Finance,* Cambridge, M.A. Blackwell.

Merton, R., (1973), *"Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183.*

Nelson, D., (1990), "ARCH Models as Diffusion Approximations", *Journal of Econometrics*, 45, 7-38.

Nelson, D., (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, 59.

Nicolau, J., (2002) "New Technique for Simulating the Likelihood of Stochastic Differential Equations", *The Econometrics Journal*, 5, 2002.

Nicolau, J., (2002) "Stationary Processes that Look Like Random Walks -- the Bounded Random Walk Process in Discrete and Continuous Time", *Econometric Theory,* 18.

Nicolau, J., (2003) "Bias Reduction in Nonparametric Diffusion Coefficient Estimation", *Econometric Theory,* 19.

Nicolau, J., (2005), "Processes with Volatility-Induced Stationarity. An Application for Interest Rates", *Statistica Neerlandica*, 59, 376-396.

Nicolau, J., (2005). "A Method for Simulating Non-Linear Stochastic Differential Equations in R1". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 75, 595-609.

Nicolau, J., (2007), "A Discrete and a Continuous-Time Model Based on a Technical Trading Rule", *Journal of Financial Econometrics,* 5, 266-284.

Nicolau, J., (2007), "Non-Parametric Estimation of Second Order Stochastic Difference Equations", *Econometric Theory,* 23.

Nicolau, J., (2008), "Modeling Financial Time Series Through Second Order Stochastic Differential Equations", *Statistics and Probability Letters*, to appear.

Pedersen, A., (1995), "A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations", *Scandinavian Journal of Statistics,* 22, 55-71.

Sharpe, W., (1963), "A simplified model for portfolio analysis", *Management Science,* 9, 277-93.

Sharpe, W., (1964), "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of Finance,* 19.

Sørensen, M., (1995), "Martingale Estimation Function for Discretely Observed Diffusion Process", *Bernoulli*, 1.

Taylor, S., (2008), *Modelling Financial Time Series*, Second Edition, John Wiley & Sons.

Yoshida, N., (1992), "Estimation for Diffusion Processes from Discrete Observations", *Journal of Multivariate Analysis* 41, 220-242.

Algumas noções de dependência positiva

Paulo Eduardo Oliveira, *paulo@mat.uc.pt*
CMUC, Departamento de Matemática, Universodade de Coimbra

1 Introdução

A Teoria da Probabilidades começou por evoluir tratando essencialmente variáveis aleatórias independentes. No entanto, se do ponto de vista teórico é satisfatória a construção de um corpo de conhecimentos coerente, do ponto de vista da modelização de fenómenos físicos, ou outros que foram surgindo, a independência era claramente insuficiente. Daí que, naturalmente, fossem surgindo abordagens ao tratamento da dependência. Assim, foram-se introduzindo noções que controlavam o grau de dependência, começando por ser populares as noções de mistura. Foram introduzidas várias noções deste tipo, tentando responder às necessidades de controlo da dependência que surgiam em diversos contextos. A ideia base subjacente às noções de mistura é simples: há um parâmetro que descreve a distância a que se encontram as variáveis dentro da família considerada e exige-se que quanto mais afastadas as variáveis estiverem menos dependentes estão serão. No essencial, o que distingue as diferentes noções de mistura é a forma como se mede o grau de dependência. Sendo conhecidos diversos parâmetros que podem dar indicações sobre a independência, facilmente se imagina que as noções de mistura se podem multiplicar. Existe uma vasta literatura sobre a utilização de noções de mistura em modelos probabilísticos, estabelecendo relações entre as diversas noções, quando isso é possível.

As noções de dependência positiva pretendem controlar o grau de dependência deixando cair esta ideia de distância entre variáveis aleatórias. É, por isso, uma noção de dependência mais global traduzindo um comportamento do conjunto de variáveis aleatórias, independente da ordenação destas. As primeiras referências a dependência positiva surgem em Lehman (1966) e depois, na sua forma mais definitiva, conhecida como *associação*, em Esary, Proschan, Walkup (1967). Os conceitos de dependência positiva atraíram pouca atenção dos probabilistas e estatísticos durante bastantes anos: Barlow, Porschan (1975), que utilizam a dependência positiva para tirar partido das suas propriedades por transformações monótonas para estudar modelos em fiabilidade e análise de sobrevivência, é das poucas referências que se encontram. O tema só volta a aparecer com as contribuições de Newman (1980, 1984), Newman, Wright (1981) que abordam os problemas clássicos de teoremas centrais limites. Em Joag-Dev, Proschan (1983) introduzem-se condições de dependência negativa, que acabaram por só atrair alguma atenção ainda mais tarde na literatura. Posteriormente, Lindqvist (1988) e Evans (1990) estendem os conceitos a espaços abstractos colocando em evidência algumas subtilezas deste género de dependência. Em paralelo a esta literatura o conceito de associação desenvolve-se de forma completamente independente em física matemática, onde é conhecido como *desigualdades FKG* (Fortuin, Kasteleyn, Ginibre (1971)), com aplicações à teoria da percolação e modelos de Ising, por exemplo.

A partir do início dos anos 1990 o interesse por dependência positiva cresce aparecendo então contribuições que estabelecem de forma mais completa o estudo dos teoremas limites clássicos e se estendem progressivamente a questões de velocidades de convergência ou grandes desvios.

2 Associação e primeiras propriedades

A primeira noção de dependência positiva surge em Lehman 1966.

Definição 2.1 (Lehamn (1966)) *Duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 dizem-se <u>positivamente dependentes</u> se*

$$\mathbf{P}(X_1 > x, X_2 > y) - \mathbf{P}(X_1 > x)\mathbf{P}(X_2 > y) \geq 0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

É imediato verificar que podemos substituir o sinal “$>$” por “$\leq$”. A ideia consistia em tirar partido da representação seguinte para variáveis de quadrado integrável, conhecida como Lemma de Hoeffding,

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\iint \mathbf{P}(X_1>x,X_2>y)-\mathbf{P}(X_1>x)\mathbf{P}(X_2>y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Por exemplo, é imediato que o seguinte resultado se verifica.

Proposição 2.2 *Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias de quadrado integrável positivamente dependentes. Estas variáveis são independentes se e só se $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$.*

A noção seguinte acabou por se revelar mais útil para o estudo de resultados limites.

Definição 2.3 (Esary, Proschan, Walkup (1967)) *Um conjunto de variáveis aleatórias $X_1,\ldots,X_n$ diz--se (positivamente) associado se dadas duas quaisquer funções $f,g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ crescentes coordenada a coordenada se tiver*

$$\mathrm{Cov}\Big(f(X_1,\ldots,X_n),g(X_1,\ldots,X_n)\Big)\geq 0, \tag{2}$$

sempre que esta covariância exista.

Uma sucessão de variáveis aleatórias X_k, $k\geq 1$, diz-se (positivamente) associada se, para todo o $n\in\mathbb{N}$, $X_1,\ldots,X_n$ é um conjunto (positivamente) associado de variáveis aleatórias.

É óbvio que a propriedade de associação de variáveis aleatórias não se altera se operarmos uma permutação das variáveis. Note-se ainda que se define associação de conjuntos de variáveis aleatórias reais, utilizando funções reais crescentes. Esta noção depende, portanto, da estrutura de ordem dos reais, o que torna sua generalização a espaços mais abstractos delicada.

Antes de apresentar alguns exemplos, vejamos uma simplificação desta definição à custa do Lema de Hoeffding (1). De facto, dadas duas funções f e g, podemos escrever

$$\mathrm{Cov}\Big(f(X_1,\ldots,X_n),g(X_1,\ldots,X_n)\Big)=\iint \mathrm{Cov}\Big(\mathbf{I}_{\{f(X_1,\ldots,X_n)>s\}},\mathbf{I}_{\{g(X_1,\ldots,X_n)>t\}}\Big)\,ds\,dt,$$

onde $\mathbf{I}_A$ representa a função indicatriz do conjunto A. Note-se que, para s e t fixos, $\gamma_s(X_1,\ldots,X_n)=\mathbf{I}_{\{f(X_1,\ldots,X_n)>s\}}$ e $\delta_t(X_1,\ldots,X_n)=\mathbf{I}_{\{g(X_1,\ldots,X_n)>t\}}$ são crescentes coordenada a coordenada.

Teorema 2.4 *$X_1,\ldots,X_n$ são associadas se e só se, para todas as funções γ e δ crescentes coordenada a coordenada e tomando valores em $\{0,1\}$,*

$$\mathrm{Cov}\Big(\gamma(X_1,\ldots,X_n),\delta(X_1,\ldots,X_n)\Big)\geq 0.$$

Utilizando esta caracterização podemos agora deduzir o seguinte resultado.

Proposição 2.5 *Uma variável aleatória X é associada consigo mesma.*

A verificação desta proposição recorre ao Teorema 2.4 e ao facto das funções reais nele consideradas serem da forma $\mathbf{I}_{[s,+\infty)}$, pelo que duas destas funções são ordenáveis. Uma vez efectuada esta observação, o resultado é imediato.

Caso pretendêssemos estender a noção definindo uma família de vectores aleatórios de dimensão k associados deveríamos considerar funções definidas em $\mathbb{R}^k\times\cdots\times\mathbb{R}^k$ crescentes em cada uma das suas n coordenadas, isto é, crescentes enquanto função definida em $\mathbb{R}^k$. Se o Teorema 2.4 continua válido, já que apenas depende da representação integral da covariância, a forma das funções crescentes não permite a sua ordenação completa não se podendo, portanto, repetir a argumentação anterior. Isto é, um vector aleatório não é necessariamente associado consigo mesmo.

Decorrem agora da Proposição 2.5 as propriedades seguintes.

Teorema 2.6 *Se dois conjuntos de variáveis associadas são independentes um do outro, a sua união é um conjunto de variáveis associadas.*

Se as variáveis $X_1,\ldots,X_n$ são associadas e $f_1,\ldots,f_k$ são funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$ todas crescentes (ou todas decrescentes), então as variáveis aleatórias $f_1(X_1,\ldots,X_n)$, …, $f_k(X_1,\ldots,X_n)$ são associadas.

Estamos agora em condições de apresentar de forma mais simples alguns exemplos de variáveis aleatórias associadas.

Exemplo 2.7 *Considerem-se variáveis aleatórias X_n, $n \geq 1$, e fixe-se um natural $m > 1$. Definam-se $Y_i = \max(X_i, \ldots, X_{i+m})$. Como o conjunto $Y_1, \ldots, Y_k$ é obtido por transformações crescentes de $X_1, \ldots, X_{k+m}$, segue-se que a família Y_n, $n \geq 1$, é associada.*

Exemplo 2.8 *Se considerarmos um modelo auto-regressivo $X_n = \sum_{i=1}^{k} c_i X_{n-i}$ em que os coeficientes $c_1, \ldots, c_k > 0$, então a sucessão X_n, $n \geq 1$, é associada.*

Exemplo 2.9 *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis associadas e, para $k = 1, \ldots, n$, $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Atendendo ao teorema anterior segue-se que $S_1, \ldots, S_n$ são associadas. Analogamente, as estatísticas de ordem $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ são associadas. Para o justificar basta invocar o Teorema 2.6. (Note-se que isto inclui o caso em que as variáveis iniciais são independentes.)*

Um exemplo importante foi demonstrado em Pitt (1982).

Proposição 2.10 *Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ um vector aleatório de dimensão n gaussiano. Se, para todos os $i, j = 1, \ldots, n$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \geq 0$ então as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ são associadas.*

A demonstração exige uma caracterização alternativa de associação, reduzindo a família de funções crescentes para as quais é necessário verificar (2) àquelas com derivadas parciais contínuas e limitadas.

Os exemplos anteriores exploram a segunda parte do Teorema 2.6. Este implica que sempre que se operem transformações com o mesmo sentido de monotonia sobre variáveis independentes, obtemos uma família de variáveis associadas. É, portanto, natural que este conceito de independência apareça em modelos de fiabilidade ou análise de sobrevivência, como é explorado em Barlow, Proschan (1975).

Escolhendo convenientemente mais uma família de funções crescentes que caracteriza a associação, mostra-se que esta forma de dependência é preservada pela convergência en distribuição.

Teorema 2.11 (Esary, Proschan, Walkup (1967)) *Sejam, para cada k, $X_{k,1}, \ldots, X_{k,n}$ variáveis associadas tais que o vector $(X_{k,1}, \ldots, X_{k,n})$ converge em distribuição (quando $k \to +\infty$) para $(X_1, \ldots, X_n)$. Então as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ são associadas.*

Para terminar esta apresentação de resultados básicos, faz-se agora referência um pouco mais detalhada à questão da estrutura de ordem do espaço em que as variáveis tomam valores, já abordada após a Proposição 2.5. Seja E um espaço métrico separável e completo no qual está definida uma estrutura de ordem parcial "$\leq$". Um conjunto $A \subset E$ diz-se *crescente* se sempre que $x \in A$ e $x \leq y$ então também $y \in A$. O espaço E diz-se totalmente ordenado se dados $x, y \in E$ se tiver que $x \leq y$ ou $y \leq x$. Evidentemente, se $E = \mathbb{R}^n$ com a ordenação lexicográfica habitual, o espaço não é totalmente ordenado. Consideremos variáveis aleatórias X_n que assumem valores em E. Para efectuar a extensão da noção de associação necessitamos de definir o que se entende por função ou conjunto crescente em E.

Definição 2.12 *Dado um espaço métrico separável e completo parcialmente ordenado,*

1. *uma variável aleatória com valores em E diz-se <u>associada</u> se, dados dois conjuntos crescentes $C_1, C_2 \subset E$, se tiver*
$$\mathbf{P}(X \in C_1 \cap C_2) \geq \mathbf{P}(X \in C_1)\mathbf{P}(X \in C_2);$$

2. *uma sucessão de variáveis aleatórias X_k, $k \geq 1$, com valores em E diz-se <u>associada</u> se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, dados $C_1, \ldots, C_n \subset E$ crescentes, se tiver*
$$\mathbf{P}(X_1 \in C_1, \cdots, X_n \in C_n) \geq \mathbf{P}(X_1 \in C_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in C_n).$$

Como se vê, a estrutura de ordem do espaço E e forma de a estender ao produto cartesiano E^n é essencial para a caracterização da associação. Pode-se agora mostrar que as propriedades básicas referidas atrás, no que diz respeito à transformação por funções crescentes se mantêm válidas. Isto é, se efectuarmos transformações crescentes sobre variáveis associadas continuamos com uma família de variáveis associadas. No entanto, há uma diferença fundamental no que respeita à extensão da Proposição 2.5.

Proposição 2.13 (Lindqvist (1988)) *Uma variável com valores num espaço métrico separável e completo parcialmente ordenado é associada consigo mesma se e só se existe um subconjunto mensurável totalmente ordenado $A \in E$ tal que $\mathbf{P}(X \in A) = 1$. Em particular, as variáveis aleatórias sobre E serão associadas com elas próprias se e só se E for um espaço totalmente ordenado.*

Este resultado de associação deixa claro o papel que tem a estrutura de ordenação na caracterização da associação. Por exemplo, se alterarmos a representação de uma família de variáveis aleatórias, passando por um espaço distinto do inicial, isso poderá ter consequências sobre a eventual associação da família em estudo. Este comportamento não se observa ao manipular as noções de mistura. Um exemplo do que se descreve acontece na utilização de processos pontuais.

Exemplo 2.14 *Considere-se uma família de variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ e definam-se as medidas de Dirac $\delta_{X_1}, \ldots, \delta_{X_n}$ (massas pontuais nos pontos definidos pelas variáveis aleatórias). Esta família de medidas de Dirac define um conjunto de variáveis aleatórias com valores no espaço do processos pontuais discretos $\mathcal{N} = \{\mu \text{ medida sobre } \mathbb{R} : \mu(A) \in \mathbb{N},\ A \text{ boreliano de } \mathbb{R}\}$. Este conjunto é evidentemente apenas parcialmente ordenado. Um elemento $\mu \in \mathcal{N}$ é representável na forma $\mu = \sum_k \delta_{x_k}$, onde $x_k \in \mathbb{R}$ não são necessariamente distintos. Se designarmos por suporte de μ, $\operatorname{supp}(\mu) = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ o conjunto de pontos em que se concentram as massas pontuais, podemos definir $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \operatorname{supp}(\mu_1) \subset \operatorname{supp}(\mu_2)$ (note-se que esta relação de ordem não tem em conta a grandeza da massas pontuais). Esta relação de ordem é apenas parcial: não é possível ordenar elementos de $\mathcal{N}$ cujos suportes não verifiquem uma relação de inclusão. Assim, o facto da família de variáveis aleatórias reais $X_1, \ldots, X_n$ ser associada não significa que a família de processos pontuais $\delta_{X_1}, \ldots, \delta_{X_n}$ seja associada, e vice-versa.*

Para mais resultados sobre as questões topológicas e de ordenação e suas influências na noção de associação reenvia-se o leitor para Lindqvist (1988).

3 Associação e desigualdades

O estudo de resultados limites depende, normalmente, do estabelecimento de desigualdade adequadas para o controlo de momentos de somas ou de desigualdades que permitam limitar alguma noção de distância ao que observaríamos no caso de estudarmos sucessões independentes. Esta última aproximação foi a utilizada para estabelecer versões do Teorema Limite Central, nas suas versões clássica e funcional. As desigualdades sobre momentos de somas surgiram um pouco mais tarde e têm-se tornado mais populares nos últimos anos na caracterização de velocidades de convergência. As primeiras desigualdades demonstradas diziam respeito a majorações de probabilidades de cauda, veja-se Esary, Proschan, Walkup (1967) e Lebowitz (1972). A desigualdade mais importante para o estudo da convergência em distribuição controla a distância entre distribuições conjuntas e distribuições produto, que corresponderiam ao caso independente.

Teorema 3.1 (Newman (1980)) *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes de quadrado integrável. Então, dados $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$,*

$$\left| \varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) - \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t_j) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} |t_j t_k| \operatorname{Cov}(X_j, X_k), \tag{3}$$

onde φ representa a função característica do vector ou variável em índice.

A demonstração deste resultado é surpreendentemente simples. Uma vez verificada para o caso de duas variáveis, o que se reduz a uma integração por partes, uma argumentação por indução permite obter a majoração enunciada. De acordo com (3), a estrutura de covariâncias descreve por completo o comportamento de variáveis associadas, pelo menos no que à convergência em distribuição diz respeito. Esta desigualdade está na base de resultados do tipo Teorema Limite Central, como o apresentado no Teorema 4.1.

Só em Birkel (1988) aparecem as primeiras desigualdades para momentos de somas de variáveis associadas. Assume agora um papel central o controlo de

$$u(n) = \sum_{j:|k-j|\geq n} \mathrm{Cov}(X_j, X_k).$$

Teorema 3.2 (Birkel (1988)) *Sejam X_n, $n \geq 1$, variáveis aleatórias centradas e associadas. Designemos por $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Se $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}(|X_n|^s) < +\infty,\ s > 2$ e $u(n) = O(n^{-\rho}),\ \rho > 0$, então existe $r \in (2, s)$ tal que $\sup_{m\geq 0} \mathbf{E}(|S_{m+n} - S_m|^r) \leq Bn^{r/2}$, onde B é independente de n.*

Esta desigualdade do tipo Rosenthal foi estendida em Shao, Yu (1996), aligeirando as hipóteses, nomeadamente sobre a velocidade de convergência de $u(n)$. O seu enunciado é complexo e um pouco técnico, pelo que não o incluiremos neste texto. A condição sobre $u(n)$ significa que os termos da matriz de covariâncias que estão longe da diagonal principal são negligenciáveis. O controlo adequado do decrescimento de $u(n)$ tornou-se num instrumento comum no estudo de resultados limites.

Importantes para o estudo das velocidades de convergência em leis dos grandes números, que permitem o tratamento da convergência de estimadores estatísticos, por exemplo, são as desigualdades maximais e as exponenciais do tipo Bernstein. A não negatividade das covariâncias permite utilizar um argumento simples de indução para mostrar uma desigualdade maximal de ordem 2.

Teorema 3.3 (Newman, Wright (1981)) *Sejam X_n, $n \geq 1$, variáveis aleatórias centradas, de quadrado integrável e associadas. Designemos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e $M_n = \max(S_1, \ldots, S_n)$. Então $\mathbf{E}(M_n^2) \leq \mathrm{Var}(S_n) = \mathbf{E}(S_n^2)$. Em consequência*

$$\mathbf{P}\left(\max(|S_1|, \ldots, |S_n|) \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}(S_n).$$

Isto é, a desigualdade de Kolmogorov para variáveis independentes continua válida, a menos do factor 2. A extensão a desigualdades maximais de ordem superior, tentando a analogia ao caso independente, não parece simples. De facto, o argumento indutivo utilizado na decomposição das variâncias deixa de funcionar já que faz aparecer momentos de todas as ordens inferiores e, em particular as de ordem par não são controláveis, à custa da associação, já que não definem funções crescentes das variáveis originais.

Foi necessário esperar até Ioannides, Roussas (1999) para que fosse provada uma desigualdade do tipo Bernstein. Esta versão assumia que as variáveis eram estacionárias e uniformemente limitadas e utilizava na demonstração um argumento indutivo para analisar momentos exponenciais das somas parciais. A limitação das variáveis era justificada pelo contexto em que a questão era analisada, já que se tratava do estudo de estimadores do tipo núcleo em que as expressões intervenientes eram, de facto, uniformemente limitadas. A extensão ao caso geral, sob estacionaridade, foi demonstrada em Oliveira (2005), simplificando ainda a técnica de demonstração ao substituir o argumento indutivo pela utilização de uma variante da desigualdade (3).

Teorema 3.4 (Oliveira (2005)) *Sejam X_n, $n \geq 1$, variáveis centradas, estritamente estacionárias e associadas tais que, para algum $\alpha > 0$,*

$$\frac{\log n}{p_n c_n^2} \exp\left(\left(\frac{\alpha n \log n}{2p_n}\right)^{1/2}\right) \sum_{j=p_n+2}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_1, X_j) \leq C_0 < \infty, \tag{4}$$

onde $p_n < \frac{n}{2}$ e c_n convergem para $+\infty$. Suponhamos que

$$\varepsilon_n = 9\sqrt{2}\left(\frac{\alpha p_n \log n}{n}\right)^{1/2} c_n,$$

e que existe $\delta > \alpha$ tal que $\sup_{|t|\leq\delta} \mathbf{E}(e^{tX_1}) \leq M_\delta < +\infty$. Então, para n suficientemente grande,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(X_i - \mathbf{E}(X_i)\Big)\right| > \varepsilon\right) \leq \left(2(1+\frac{4}{\alpha}C_0) + \frac{2M_\delta n^2}{9\alpha^3 p_n \log^3 n}\right)\exp\left(-\alpha\log n\right). \tag{5}$$

As condições do tipo (4) são, para variáveis estacionárias, equivalentes às condições sobre $u(n)$ já referidas atrás. Portanto, o essencial continua a ser um controlo adequado sobre o decrescimento das covariâncias. É de realçar que (4) impõe um decrescimento rápido das covariâncias já que são estas que têm que compensar o crescimento deo termo exponencial que aparece como factor.

4 Convergência em distribuição

O primeiro Teorema Limite Central para variáveis associadas demonstra-se utilizando a desigualdade (3), comparando com o que acontece no caso de variáveis independentes.

Teorema 4.1 (Newman (1980)) *Sejam X_n, $n \geq 1$, variáveis aleatórias centradas de quadrado integrável associadas e estritamente estacionárias tais que*

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) + 2\sum_{j=2}^{\infty}\mathrm{Cov}(X_1, X_j) < +\infty.$$

Então $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j$ converge em distribuição para uma variável com distribuição $\mathcal{N}(0,1)$.

Este resultado foi estendido por Cox, Grimmett (1984) para variáveis com momentos de ordem 3 finitos, deixando cair a estacionaridade estrita, e impondo $u(n) \longrightarrow 0$. Em Birkel (1993) encontramos versões do Teorema Limite Central assumindo apenas a existência de momentos de ordem 2 e, em Oliveira, Suquet (1996), o controlo das covariâncias é um pouco mais flexível, permitindo a existência de algumas covariâncias significativamente grandes perto da diagonal principal (o enunciado é demasiado técnico para caber neste artigo).

Estes resultados têm sempre versões funcionais, essencialmente sob as mesmas condições, que podem ser encontrados em Newman, Wright (1981) ou Birkel (1993).

No que respeita à velocidade de convergência para o Teorema Limite Central, o primeiro resultado do tipo Berry-Esséen, majorando uniformemente a distância entre as funções de distribuição, foi demonstrado em Wood (1983) assumindo a estacionaridade da sucessão. A expressão para a velocidade é complicada, mas sempre mais lenta do que $n^{1/5}$. Esta velocidade é provada adaptando a demonstração clássica de Berry-Esséen. Um controlo mais preciso do decrescimento de $u(n)$ permite obter uma melhor velocidade de convergência.

Teorema 4.2 (Birkel (1988)) *Sejam X_n, $n \geq 1$, variáveis centradas e associadas, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e $\sigma_n^2 = \mathbf{E}(S_n^2)$. Suponhamos que*

$$u(n) = O(e^{-\lambda n}),\ \lambda > 0, \qquad \inf_{n\geq 1}\frac{\sigma_n^2}{n} > 0, \qquad \sup_{n\geq 1}\mathbf{E}(|X_n|^3) < \infty.$$

Então existe uma constante B, independente de $n \geq 1$, tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sigma_n}S_n^2 \leq x\right) - \Phi(x)\right| \leq Bn^{-1/2}\log^2 n,$$

onde Φ representa a função de distribuição de uma variável com distribuição $\mathcal{N}(0,1)$.

A demonstração baseia-se numa variante da desigualdade (3) que permite uma adaptação da técnica habitual para provar a desigualdade de Berry-Esséen. No mesmo artigo se mostra que podemos substituir o termo $\log^2 n$ por $\log n$ no majorante, caso existam momentos de ordem superior a 3. Noutra direcção, Suquet (1995) obtém um majorante substituindo a distância uniforme por uma distância do tipo L^2 entre as funções de distribuição.

5 Processos empíricos

Dada uma sucessão de variáveis aleatórias associadas e com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$, tem interesse estatístico o comportamento da sucessão de funções

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{I}_{[X_i,1]}(t) - t\right), \qquad t \in [0,1].$$

Como é bem sabido, basta estudar estas funções para variáveis uniformes, já que o caso geral se obtém por transformação pela função de distribuição das variáveis. O comportamento limite destas funções intervém na caracterização assimptótica de testes de hipóteses, daí a motivação estatística para o estudo. A convergência em distribuição desta sucessão sob a hipótese de associação aparece em Yu (1993).

Teorema 5.1 (Yu (1993)) *Sejam X_n, $n \geq 1$ variáveis com distribuição uniforme em $[0,1]$, estacionárias e associadas, tais que para algum $a > 0$,*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^{\frac{13}{2}+a}\mathrm{Cov}(X_1, X_n) < +\infty \tag{6}$$

então a sucessão ξ_n converge em distribuição no espaço $D(0,1)$, das funções contínuas à direita e com limites à esquerda, para um processo gaussiano centrado e com covariância

$$\Gamma(s,t) = s \wedge t - st + 2\sum_{k=2}^{+\infty}\Big(\mathbf{P}(X_1 \leq s, X_k \leq t) - st\Big).$$

O interesse nesta convergência provém das transformações que é possível operar, mantendo a convergência em distribuição. De facto, a topologia habitual em $D[0,1]$ é suficientemente forte para tornar contínuas uma família de operadores bastante alargada, contendo, por exemplo, transformações como $\sup_{t\in[0,1]}\xi_n(t)$ (veja-se Billingsley (1968)), utilizadas em alguns testes de hipóteses não paramétricos. A velocidade de decrescimento das covariâncias exigida pelo resultado anterior é grande. De facto, tem que acontecer que $\mathrm{Cov}(X_1, X_n) = O(n^{-r})$, com $r > 7.5$. Como habitualmente no espaço $D[0,1]$ a maior parte do esforço é passada a mostrar a compacidade da sucessão por forma a garantir a existência do limite. Este resultado foi sucessivamente melhorado, baixando a velocidade de decrescimento exigida às covariâncias para $\mathrm{Cov}(X_1, X_n) = O(n^{-r})$, com $r > 4$, em Louhichi (2000).

Tendo em atenção que vários dos referidos testes não necessitam da transformações contínuas num espaço com topologia tão forte, a convergência do processo empírico foi estudada nos espaços $L^p[0,1]$. Por exemplo, os testes de Anderson-Darling apenas necessitam da convergência do processo empírico relativamente à topologia do espaço L^2. Como seria de esperar, a caracterização da compacidade da sucessão fica substancialmente facilitada.

Teorema 5.2 (Oliveira, Suquet (1998)) *Nas condições do Teorema 5.1 o processo empírico converge em distribuição no espaço $L^p[0,1]$ desde que $\mathrm{Cov}(X_1, X_n) = 0(n^{-r})$, com $r > \frac{3p}{2}$.*

Nota-se nas condições para a convergência do processo empírico uma maior exigência quanto ao decrescimento das covariâncias relativamente às condições para a resultados do tipo limite central. Uma boa parte da explicação para esta diferença deve-se à necessidade de, no estudo do processo empírico, controlar covariâncias entre variáveis do tipo $\mathbf{I}_{\{X_n \leq s\}}$. A tradução deste controlo para covariâncias entre as variáveis originais faz-se à custa da desigualdade seguinte, válida para variáveis associadas (veja-se Roussas (1995) para os detalhes)

$$\text{Cov}\Big(\mathbf{I}_{\{X_0 \leq s\}}, \mathbf{I}_{\{X_n \leq t\}}\Big) \leq B\text{Cov}^{1/3}(X_0, X_n).$$

6 Leis dos grandes números

Os primeiros resultados do tipo leis dos grandes números aparecem em Newman (1984) e Birkel (1998a).

Teorema 6.1 *A lei forte dos grandes números é válida se*

- ***(Newman (1984))*** *as variáveis são associadas, estacionárias e* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\text{Cov}(X_1, X_n) \longrightarrow 0$*;*
- ***(Birkel (1988a))*** *as variáveis são associadas e* $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{Cov}(X_n, S_n) < \infty$.

As demonstrações utilizam o controlo das covariâncias através de $u(n)$, definido atrás, ou utilizando desigualdades para momentos de somas de variáveis no caso de Birkel (1988a). As abordagens não permitem contudo caracterizações de velocidades de convergência.

Só com o aparecimento de desigualdades exponenciais para variáveis associadas se obtiveram as primeiras caracterizações de velocidades de convergência em leis dos grandes números. Estas passam pela condição (4) o que obriga a decrescimento geométrico das covariâncias.

Teorema 6.2 (Ioannides, Roussas (1999)) *Sejam* X_n, $n \geq 1$, *variáveis aleatórias limitadas, centradas e associadas tais que* $\text{Cov}(X_1, X_n) = \rho_0\rho^n$, *onde* $\rho_0 > 0$ *e* $\rho \in (0, 1)$. *Então* $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \longrightarrow 0$ *quase certamente com velocidade de convergência de ordem* $\frac{\log^{2/3} n}{n^{1/3}}$.

Este resultado é uma consequência directa da versão do Teorema 3.4 provada em Ioannides, Roussas (1999). Neste mesmo artigo se mostra que caso $\text{Cov}(X_1, X_n) = c_0 n^{-a}$, com $a > 0$, então utilizando (4) não é possível deduzir uma velocidade de convergência para a lei dos grandes números. No caso de decrescimento geométrico, a velocidade foi sendo melhorada, à custa da utilização de versões optimizadas para o efeito das desigualdades exponenciais, como em Sung (2007), até obter a velocidade $\frac{\log^2 n\,(\log\log n)^{1/2}}{n^{1/2}}$ em Xing, Yang (2008) e $\frac{\log^2 n}{n^{1/2}}$ em Henriques, Oliveira (2008).

Mais recentemente obtiveram-se caracterizações para as velocidades de convergência utilizando desigualdades maximais.

Teorema 6.3 *Sejam* X_n, $n \geq 1$, *variáveis centradas, e associadas.*

- ***(Yang, Su, Yu (2008))*** *Suponhamos que as variáveis aleatórias são de quadrado integrável e* $\sum_{i=1}^{\infty} u^{1/2}(2^i) < \infty$, *então* $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \longrightarrow 0$ *com velocidade de convergência da ordem* $\frac{\log^{1/2} n\,(\log\log n)^{\delta/2}}{n^{1/2}}$, *onde* $\delta > 1$.
- ***(Henriques, Oliveira (2008))*** *Suponhamos que as variáveis aleatórias são estacionárias,* $\mathbf{E}(X_1^r) < \infty$, *para algum* $r > 4$, $u(n) \leq c\,n^{-1}$ e $\mathbf{E}(X_iX_j|\sigma(X_1, \ldots, X_i)) \geq 0$, *para todos os* $i < j$. *Então* $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \longrightarrow 0$ *com velocidade de convergência da ordem* $\frac{(\log n)^{1/4+\delta}}{n^{1/2}}$, *onde* $\delta > 0$.

A segunda velocidade de convergência é ligeiramente melhor que a primeira, embora à custa de condições um pouco mais restritivas. A condição sobre as esperanças condicionais pode ser interpretada como uma espécie de dependência positiva condicional. Vale a pena referir que os modelos introduzidos no Exemplo 2.7 satisfazem esta condição. A primeira destas velocidades de convergência é menos exigente e parece ter sido o primeiro resultado deste tipo baseado em desigualdades maximais.

Referências

[1] Barlow, R., Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*. Holt, Rinehart and Winston, New York.

[2] Billingsley, P. (1968). *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney.

[3] Birkel, T. (1988). On the Convergence Rate in the Central Limit Theorem for Associated Processes. Ann. Probab. 16, 1685–1698.

[4] Birkel, T. (1988a). A note on the strong law of large numbers for positively dependent random variables, Statist. Probab. Lett. 7, 17-20.

[5] Birkel, T. (1993). A functional central limit theorem for positively dependent random variables. J. Multivariate Anal. 44, 314–320.

[6] Cox, J., Grimmett, G. (1984). Central Limit Theorems for Associated Random Variables and the Percolation Model. Ann. Probab. 12, 514–528.

[7] Esary, J., Proschan, F., Walkup, D. (1967). Association of random variables with applications. Ann. Math. Statist. 38, 1466–1474.

[8] Evans, S. (1990). Association and random measures. Probab. Theory Related Fields 86, 1–19.

[9] Fortuin, C., Kasteleyn, P., Ginibre, J. (1971). Correlation inqualities on some partially ordered sets. Comm. Math. Phys. 22, 89–103.

[10] Henriques, C., Oliveira, P. (2008). Convergence rates for the Strong Law of Large Numbers under Association. Pré-Publicações do Dep. Matemática Univ. Coimbra 08-14.

[11] Ioannides, D., Roussas, G. (1999). Exponential inequality for associated random variables. Statist. Probab. Lett. 42, 423–431.

[12] Lehman, E. (1966). Some concepts of dependence. Ann. Math. Statist. 37, 1137–1153.

[13] Lindqvist, B. (1988). Association of probability measures on partially ordered spaces. J. Multivariate Anal. 26, 111–132.

[14] Louhichi, S. (2000). Weak convergence for empirical processes of associated sequences. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 36, 547–567.

[15] Newman, C. (1980). Normal fluctuations and the FKG inequalities. Comm. Math. Phys. 74, 119–128.

[16] Newman, C. (1984). Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. In: Tong, Y. (ed.), *Inequalities in Statistics and Probability*, IMS Lecture Notes - Monograph Series vol. 5, 127–140.

[17] Newman, C. Wright, A. (1981). An invariance principle for certain dependent sequences. Ann. Probab. 9, 671–675.

[18] Oliveira, P. (2005). An exponential inequality for associated variables, Statist. Probab. Lett. 73, 189–197.

[19] Oliveira, P., Suquet, C. (1996). An $L^2[0,1]$ invariance principle for LPQD random variables. Portugal. Math. 53, 367–379.

[20] Oliveira, P., Suquet, C. (1998). Weak convergence in $L^p(0,1)$ of the uniform empirical process under dependence. Statist. Probab. Lett. 39, 363–370

[21] Pitt, L. (1982). Positively correlated normal variables are associated. Ann. Probab. 10, 496–499.

[22] Roussas, G. (1995). Asymptotic normality of a smooth estimate of a random field distribution function under association, Statist. Probab. Letters 24, 77-90.

[23] Shao, Q., Yu, H. (1996). Weak convergence for weighted empirical processes of dependent sequences. Ann. Probab. 24, 2098–2127.

[24] Suquet, C. (1995). Distances euclidiennes sur les mesures signées et application à des théorèmes de Berry-Esséen. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 2, 161–181.

[25] Sung, S.H. (2007), A note on the exponential inequality for associated random variables, Statist. Probab. Letters 77, 1730–1736.

[26] Wood, T. (1983). A Berry-Esséen theorem for associated variables. Ann. Probab. 11, 1042–1047.

[27] Xing, G., Yang, S. (2008). Exponential inequalities for positively associated random variables and application, J. Inequal. Appl.

[28] Yang, S., Su, C., Yu, K. (2007). A general method to the strong law of large numbers and its applications. Statist. Probab. Letters 78, 794–803, doi:10.1016/j.spl.2007.09.046.

[29] Yu, H. (1993). A Glivenko-Cantelli lemma and weak convergence for empirical processes of associated sequences. Probab. Theory Relat. Fields 95, 357–370.

Processos estocásticos em dinâmica de estruturas de engenharia

Paula Milheiro Oliveira, *poliv@fe.up.pt*
CEC, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

1 Introdução

Em estudos sobre o comportamento dinâmico de estruturas na engenharia civil e mecânica, considera-se habitualmente fontes de aleatoriedade ou incerteza, que se repartem em 3 tipos: (a) a aleatoridade devida a causas naturais ou operacionais; (b) a incerteza sobre as propriedades mecânicas dos materiais utilizados na construção; (c) as incertezas sobre os modelos matemáticos adoptados quer para a resposta da estrutura quer para a resistência dos mecanismos estruturais.

Para produzir conhecimento de modo a reduzir a variabilidade que resulta destas incertezas são realizadas simulações e, sobretudo, testes sobre as próprias estruturas ou modelos físicos (à escala reduzida) destas estruturas.

Os testes que se realizam para estudar o comportamento de uma estrutura podem ser de vários tipos. Os testes em que se simulam condições várias de funcionamento real envolvem a reprodução de meios aleatórios, nomeadamente acções de ventos, cargas devidas ao movimento dos veículos no caso das pontes ou do funcionamento de máquinas pesadas no caso de instalações industriais e, nomeadamente, a acção de sismos, entre outras acções. Podemos distinguir dois tipos de acções: acções de natureza ambiental (como o vento, a temperatura, a humidade, os sismos, as ondas do mar) e acções de natureza operacional (como as cargas a que estão sujeitas). É aqui que aparecem de imediato os primeiros processos estocásticos, logo à entrada. Na teoria de sistemas diríamos que são o *input* do sistema. No contexto da engenharia de estruturas preferem chamar-lhes excitação. Na sua forma mais simples estes processos podem surgir como ruído branco gaussiano. Significa isto, portanto, que um dos testes a que se sujeita uma estrutura, quando se pretende estudar a sua dinâmica, é um teste em que se simula uma excitação de entrada segundo um ruído branco gaussiano. Este teste, muitas vezes realizado em laboratório sobre modelos físicos, permite observar e avaliar respostas da estrutura e algo que interessa especialmente aos engenheiros de estruturas, que é estimar parâmetros que descrevem a estrutura. São exemplo destes parâmetros os chamados modos de vibração, que não são mais do que transformações dos parâmetros do modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico da estrutura. Um dos aspectos que interessa também ao engenheiro de estruturas é a análise de indicadores de degradação da estrutura.

Podemos distinguir vários tópicos que nos permitem clarificar áreas de conhecimento e áreas de trabalho para quem pretende investigar ou simplesmente articular saberes, a um nível avançado, no campo da dinâmica de estruturas: é, primeiro que tudo, necessário conhecer ou desenvolver modelos de excitação e de resposta adequados à situação concreta em estudo; é necessário conhecer e adaptar métodos existentes de simulação da resposta; é necessário ser capaz de aplicar, e sobretudo desenvolver, métodos de estimação de parâmetros e de estado e, finalmente, podemos ainda encontrar-nos perante problemas de controlo da estrutura, para os quais é necessário explorar técnicas de controlo estocástico.

2 Modelos para a excitação

Pode dizer-se que acções como o vento, os sismos ou as ondas do mar são duplamente aleatórios, no sentido em que a sua ocorrência é estocástica no tempo mas também as trajectórias que caracterizam

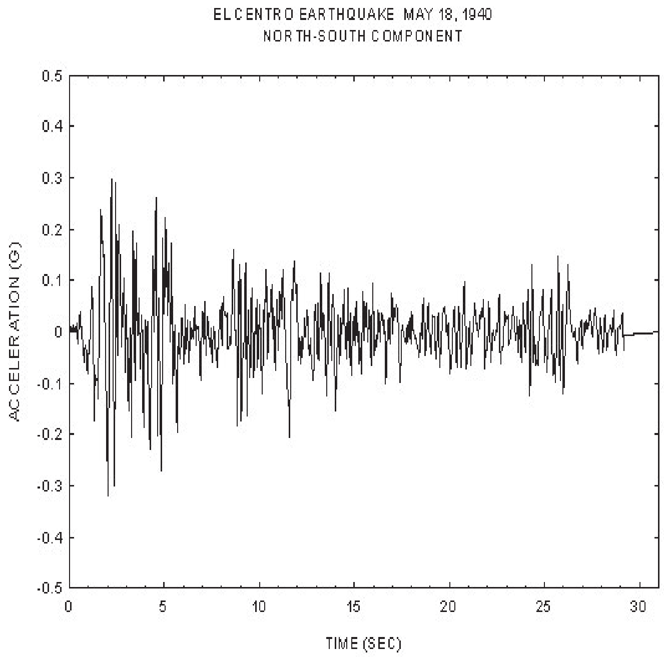


Figura 1: Registo do terramoto El Centro (Imperial Valley, EUA, costa do Pacífico). A aceleração foi medida na base do edifício El Centro Terminal Substation e está representada em cm/s^2.

estas acções exibem padrões aleatórios. Acções como a temperatura, a humidade ou as cargas a que a estrutura está sujeita na sua operação são mais naturalmente vistas como processos contínuos no tempo.

Ao longo das últimas décadas, estas acções têm vindo a ser examinadas na engenharia estrutural sobretudo do ponto de vista estocástico. Naturalmente que encontramos quer processos estocásticos estacionários quer não estacionários, talvez com uma maior predominância destes últimos. Os registos sísmicos, por exemplo, permitem-nos dizer que as acções sísmicas são processos estocásticos hoje reconhecidos como fortemente não estacionários (e.g. Figura 1), devido a diferenças entre frequências e tempos de chegada das suas ondas componentes. Podem ser modelados de duas formas distintas: (a) processos estocásticos não estacionários unicamente em amplitude (resultam da transformação de um processo estacionário através de uma função determinística do tempo, na prática estimada com base nos registos sísmicos); (b) processos estocásticos com uma densidade espectral de potência evolutiva (como resultado de diferentes velocidades e energias das diversas ondas que compõem o movimento e de múltiplas reflecções, refracções e difracções).

No primeiro caso, temos modelos da forma:

$$A_t = \xi(t) M_t$$

onde A_t representa a aceleração do solo no instante t, $\xi(t)$ é a função de modelação (determinística) e $\{M_t\}_t$ é um processo estocástico gaussiano estacionário. São muito usados os modelos de Shinozuka–Sato (1967), em que $\xi(t)$ é da forma

$$\xi(t) = \frac{1}{c}(e^{-at} - e^{-bt}),$$

Aming–Ang (1966):

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1}, & t \le t_1 \\ 1, & t_1 \le t \le t_2 \\ e^{-c(t-t_2)}, & t_2 \le t \end{cases},$$

e Yeh–Wen (1990):

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{at^{-b}e^{-ct}}{d+t^h}},$$

em que a, b, c, d, h, t_1 e t_2 são parâmetros, cujos valores são atribuidos com base em argumentos de natureza física ou em registos, perante cada situação concreta.

No segundo caso, temos modelos muito variados, dos quais destacamos o modelo de Yeh–Wen (1990):

$$A_t = \xi(t) M_{k(t)},$$

agora com $k(t) = \frac{n(t)}{\dot{n}(t_s)}$, onde $n(t)$ é uma função polinomial que pretende representar a acumulação de passagens por 0 no registo sísmico e t_s o instante em que as fortes movimentações do solo ocorrem (Figura 2). Outros modelos podem ser encontrados em Priestley (1981), Grigoriu *et al.* (1988), Spanos *et al.* (1992), Fan–Ahmadi (1990), Kameda–Nojima (1988), Faravelli (1988) e Carli (1992, 1995), entre outros.

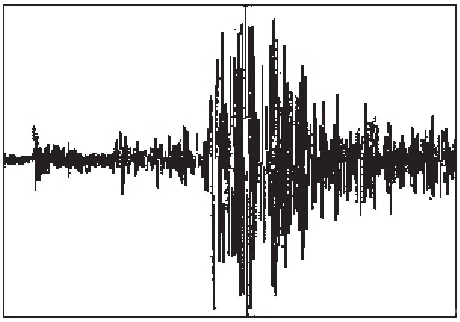


Figura 2: Registo do terramoto de 1971 na Baía de São Francisco (EUA). A aceleração foi medida em San Fernando e está representada em cm/s^2.

3 Modelos para a resposta

A dinâmica de uma estrutura com comportamento linear e N graus de liberdade[1], pode ser modelada pelo seguinte sistema diferencial estocástico no sentido de Ito (Clough e Penzien, 1993):

$$\begin{cases} dx_t^{(1)} &= x_t^{(2)} dt \\ dx_t^{(2)} &= M^{-1}(-Cx_t^{(2)} - Kx_t^{(1)})dt + M^{-1}dW_t \end{cases}, \tag{1}$$

em que $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ são vectores de deslocamento e velocidade, respectivamente, M é a matriz de massa da estrutura, C a sua matriz de amortecimento viscoso, K a sua matriz de rigidez e $\{W_t\}_t$ é o processo estocático que modela a excitação externa a que está sujeita a estrutura.

No entanto, nem todas as estruturas apresentam um comportamento linear, encontrando-se por exemplo modelos da forma (Wen, 1973):

$$\begin{cases} dx_t^{(1)} &= x_t^{(2)} dt \\ dx_t^{(2)} &= M^{-1}\left(-Cx_t^{(2)} - \alpha K x_t^{(1)} - (1-\alpha)Kz_t\right)dt + M^{-1}dW_t \\ dz_t &= \left(Ax_t^{(2)} - \beta|x_t^{(2)}|\,|z_t|^{n-1}z_t - \gamma x_t^{(2)}|z_t|^n\right)dt \end{cases}, \tag{2}$$

[1]Se se tratar da estrutura muito elementar como uma estrutura porticada, os N graus de liberdade corresponderão a N pisos. Em estruturas mais complexas como edifícios, cada piso, só por si, corresponderá a vários graus de liberdade.

em que $\{z_t\}_t$ é um processo estocástico habitualmente designado por componente histerética do sistema, α é um coeficiente relacionado com a rigidez pós-cedência e A, n, β e γ são parâmetros que caracterizam o tamanho e forma dos ciclos de histeresis, que são estocásticos.

Nos modelos (1) e (2) o tempo é considerado como contínuo. No entanto as medições da resposta da estrutura são de facto obtidas em instantes discretos. Pode haver conveniência em que o modelo da estrutura seja também descrito em tempo discreto. Os defensores desta abordagem usam modelos em espaço de estados e por vezes modelos ARMA, que provêm de uma formulação prévia da dinâmica da estrutura via Elementos Finitos (ver, por exemplo, Peeters–Ventura, 2003). Um exemplo desta abordagem consiste no modelo seguinte, que respeita a uma estrutura em mastro (Figura 3):

$$X_k = FX_{k-1} + GU_k\,. \tag{3}$$

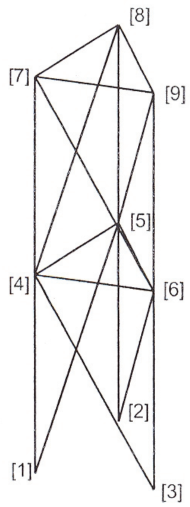


Figura 3: Exemplo de uma estrutura em mastro.

A estrutura é composta por 9 nós ligados por barras, dos quais os 3 primeiros estão ligados ao solo, e sofre o efeito de uma acção aleatória, representada pelo processos estocástico $\{U_k\}_k$, em todos os seus nós, quer na direcção horizontal quer na vertical, de forma independente. F é uma matriz 18×18 construída a partir das matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez. G é uma matriz construída a partir da matriz de massa, de uma matriz 18×12 consistindo de zeros e uns nas posições apropriadas e de uma matriz nula. $\{X_k\}_k$ é um processo estocástico vectorial de dimensão 18, cujas coordenadas representam deslocamentos e velocidades no instante t_k. Nos modelos ARMA são as acelerações nos nós da estrutura que são modeladas.

É muito comum encontrarmos aplicações práticas em que a dimensão dos processos estocásticos envolvidos é elevada, colocando-nos perante problemas computacionais consideráveis.

4 Simulação da excitação e da resposta

Os métodos de simulação da resposta são muitas vezes usados para análise da estrutura, uma vez que a simulação de um grande número de trajectórias no tempo permite efectuar resumos, com valor estatístico, úteis para o engenheiro.

Dependendo do tipo de modelo adoptado para a excitação e para a dinâmica da estrutura encontramos métodos adequados à simulação da excitação e da resposta. Sempre que se parte de um modelo em tempo contínuo há, naturalmente, que o discretizar primeiro. É assim que aparecem métodos já nossos conhecidos da discretização de equações diferenciais estocásticas a serem usados neste contexto, como por exemplo, os esquemas de Euler, Milshtein e Runge-Kutta estocástico (Milstein, 1995; Kloeden–Platen, 1999; Tocino–Ardanuy, 2002) mas aparecem também novos métodos, como o esquema de Newmark estocástico (Roy–Dash, 2005; Zhang et al., 1999), que explora particularidades dos processos estocásticos envolvidos na modelação da estrutura vibratória, procurando fazer intervir no procedimento de discretização parâmetros com significado físico, que são cuidadosamente calibrados segundo a aplicação a que se destinam.

5 Estimação de parâmetros

No caso das estruturas com comportamento linear, são de particular importância para os engenheiros de estruturas os chamados parâmetros modais. Nestes casos admite-se que a estrutura está sujeita a uma excitação do tipo ruído branco, da qual não se observa a trajectória. No exemplo de uma torre como a estrutura citada na Secção 3 (equação (3) e Figura 3), os parâmetros modais são alguns dos valores próprios da matriz F, matriz esta que é desconhecida e que teremos de estimar.

Mais uma vez, dependendo do tipo de modelo adoptado para a dinâmica da estrutura, teremos diferentes métodos de estimação. São muito populares, pela qualidade que demonstraram em aplicações práticas, os chamados métodos de sub-espaço (Van Overschee–De Moor, 1996; Ljung, 1999).

De entre os métodos baseados no espectro da resposta destaca-se o método Peak-Picking, pela sua simplicidade (Bendat–Piersol, 1993). A ideia chave deste método reside na estimação das frequências próprias da estrutura (valores próprios da matriz de deriva na equação (1)) através dos picos da representação espectral.

O Método de Máxima Verosimilhança tem também sido usado para estimar parâmetros de modelos no domínio da frequência (Guillaume *et al.*, 1998).

6 Estimação de estado

Este problema está de facto, muitas vezes, relacionado com o anterior, uma vez que alguns dos métodos de estimação de parâmetros incorporam uma fase de estimação de estado.

Na formulação de problemas de estimação do estado de uma estrutura, ou da resposta de uma estrutura, ao modelo de dinâmica da estrutura, do tipo dos apresentados na Secção 3, é acrescentado um modelo para as observações obtidas dos sensores:

$$y_k = DX_k + v_k\,,$$

onde D é uma matriz que especifica a localização dos sensores e $\{v_k\}_k$ é um processo estocástico que representa o ruído de medição (ou erro de medida). Embora seja menos comum[2], o modelo das observações também pode ser escrito em tempo contínuo:

$$dY_t = DX_t + dV_t$$

e podemos, embora mais raramente, encontrar-nos perante modelos de observação não lineares.

A estimação do estado, X_k (ou X_{t_k}, nos modelos contínuos), faz-se sobre a σ-álgebra das observações até ao instante t_k, da qual dispomos de uma trajectória, resultante da recolha das observações dos sensores ao longo do tempo.

O problema de estimação de estado pode ser resolvido de forma óptima pelo Filtro de Kalman, se o modelo for linear, e de forma sub-óptima, sob determinadas condições, pelo Filtro de Kalman

[2]Também porque será menos realista.

Estendido (EKF), se o modelo for não linear (Ljung, 1999). Outros métodos aproximados como o Filtro de Partículas (Ching *et al.*, 2006; Tang–Sato, 2005) podem ser também usados, com vantagens em termos computacionais e com menos restrições do que o EKF.

7 Controlo da estrutura

Os problemas de controlo da estrutura são talvez aqueles em que o investimento do esforço de investigação é mais recente. Porque as excitações a que uma estrutura está habitualmente sujeita no meio em que está inserida se comportam como processos estocásticos, o controlo terá de ter em conta um comportamento estocástico, devendo por isso ser entendido como um controlo estocástico também. Quando falamos em controlo estocástico estamos a falar em acções (processos estocásticos) que são provocadas pelo controlador (equipamento de controlo), ao longo do tempo, para levar a estrutura a um determinado estado desejado, geralmente um estado que garante estabilidade e outras condições optimizadas de funcionamento (ver, por exemplo, Ikhouane–Rodellar, 2007).

8 Comentários finais

Em muitos domínios, modelos estocásticos representando uma dinâmica complexa são necessários para descrever processos que se desenvolvem no tempo de forma aleatória, exibindo interacções no tempo que se tornam fundamentais para um verdadeiro conhecimento do fenómeno em estudo e algumas vezes apresentando ainda interacções com outros processos. Muitas vezes a premência do estudo vem da necessidade de adequirir alguma previsibilidade sobre o comportamento do sistema. Exemplos concretos de processos estocásticos deste tipo encontram-se na dinâmica das estruturas da engenharia da construção (ver, por exemplo, Muscolino, 2001).

As elevadas velocidades permitidas pelos computadores dos nossos dias não fizeram mais do que tornar o uso de modelos estocásticos bastante sofisticados cada vez mais praticáveis, ao mesmo tempo que desenvolvimentos importantes na teoria das probabilidades, em particular na área do cálculo estocástico, foram explorados por estatísticos e outros profissionais apenas numa sua pequena extensão, no desenvolvimento de métodos estatísticos para processos estocásticos.

Há pois muito espaço para contribuições de jovens investigadores e para equipas que se queiram dedicar a estes aspectos dos processos estocásticos e da estatística. O comportamento dinâmico de estruturas deixa desafios vários para quem sobre esses problemas se queira debruçar.

BIBLIOGRAFIA

Bendat, J.S. and Piersol, A.G. (1993). *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, 2nd Ed., John Wiley.

Carli, F. (1995). Smooth frequency modulating functions for strong ground motions, *Proc. 10th Eur. Conf. Earthquake Engineering*, Vienna, 1994, Balkema, 155–160.

Carli, F. (1992). Nonstationary models of earthquake accelerograms *Proc. of the World Conf. on Earthquake Engineering*, Madrid, 1992, Balkema, 829–834.

Ching, J., Beck, J.L. and Porter, K.A. (2006). Bayesian state and parameter estimation of uncertain dynamical systems, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **21**(1), 81–96.

Chiostrini, S. and Facchini, L. (1999). Response analysis under stochastic loading in presence of structural uncertainties, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 853–870.

Clough, R.W. and Penzien, J. (1993). *Dynamics of Structures*, 2nd edition, Civil Engineering Series, Mc-Graw Hill Int. Ed.

Fan, F.G. and Ahmadi, G. (1990). Nonstationary Kanai-Tajimi models for El Centro 1940 and Mexico City 1985 earthquakes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **5**(4), 171–181.

Faravelli, L. (1988). Source-to-site seismic models in structural dynamics. *Proc. of the 3rd International Conf. on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton (UK), 1021–1032.

Grigoriu, M., Ruiz, S.E. and Rosenblueth, E. (1988). Mexico earthquake of September 19, 1985 — nonstationary models of seismic ground acceleration, *Earthquake Spectra*, **4**(3), 551–568.

Guillaume, P., Verbove, P. and Vanlanduit, S. (1998). Frequency-domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals, *Proc. of the 23rd International Conf. on Noise and Vibration Engineering*, ISMA, 955–962.

Hampl, N.C. and Shueller, G.I. (1989). Probability densities of the response of nonlinear structures under stochastic dynamic excitation, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **4**, 1–9.

Ikhouane, F. and Rodellar, J. (2007). *Systems with Hysteresis: Analysis, Identification and Control Using the Bouc-Wen Model*, Wiley.

Iwan, W.D. and Huang, C.T. (1996). On the dynamic response of non-linear systems with parameter uncertainties, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **31**, 631–645.

Jensen, H. and Iwan, W.D. (1991). Response variability in structural dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **20**, 949–959.

Jensen, H. and Iwan, W.D. (1992). Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation, *Journal of Engineering Mechanics*, **118**, 1012–1025.

Kameda, H. and Nojima, N. (1988). Simulation of risk-consistent earthquake motion, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **16**(7), 1007–1019.

Kloeden, P.E. and Platen, E. (1999). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin.

Lin, Y.K. (1976). *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, Kriegher, Malabor (USA).

Ljung L. (1999). *System Identification — Theory for the User*, 2nd ed., PTR Prentice Hall.

Lutes, L.D. and Sarkani, S. (1997). *Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations*, Prentice Hall, N.J.

Milstein, G.N. (1995). *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Muscolino, G. (2001). Stochastic dynamics for structural engineering problems: a review. *Civil and Structural Engineering Computing: 2001*, B.H. Topping, Ed., Saxe-Coburg Publications, 287–318.

Nigam, N.C. (1983). *Introduction to Random Vibrations*, MIT Press, Cambridge MA.

Peeters, B. and Ventura, C.E. (2003). Comparative study of modal analysis techniques for bridge dynamic characteristics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **17**(5), 965-988.

Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press.

Roy, D. and Dash, M.K. (2005). Explorations of a family of stochastic Newmark methods in engineering dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**(45-47), 4758-4796.

Schüeller, G.I. (1997). A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics — Simulation techniques. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Special issue IASSAR Report, **12**, 203-229.

Soong, T.T. and Grigoriu, M. (1993). *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice Hall Englewood Cliffs, N. J.

Spanos, P.D., Tein, W.Y. and Ghanem, R. (1992). Spectral estimation of bivariate non-stationary processes. *Proc. of the World Conf. on Earthquake Engineering*, 839.

Tang, H.S. and Sato, T. (2005). Auxiliary particle filtering for structural system identification, *Proc. SPIE*, **5765** (710).

Tocino, A. and Ardanuy, R. (2002). Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **138** , 219-241.

Van Overschee, P. and De Moor, B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory Implementation — Applications*, Kluwer Academic Publishers.

Zhang, L., Zu, J.W. and Zheng, Z. (1999). The stochastic Newmark algorithm for random analysis of multi-degree-of-freedom non-linear systems, *Computers and Structures*, **70**, 557–568.

Equações diferenciais estocásticas e aplicações biológicas

Carlos A. Braumann, *braumann@uevora.pt*
Departamento de Matemática e Centro de Investigação em Matemática e Aplicações
Universidade de Évora

1. Introdução

O objectivo deste texto é dar uma panorâmica de algumas das principais aplicações biológicas das equações diferenciais estocásticas.

É bem sabido que as equações diferenciais ordinárias (EDO) têm uma longa tradição e grande sucesso como modelos matemáticos do comportamento de fenómenos dinâmicos nas mais variadas áreas da Ciência e da Tecnologia. De facto, é por vezes mais fácil descrever regras de comportamento da taxa de variação (derivada) de uma variável temporal (regras que podem envolver essa variável e/ou outras variáveis com as quais interage) do que descrever directamente as regras de evolução da própria variável. Obtém-se assim uma EDO que, por integração, permite obter o comportamento da variável de interesse e fazer previsões sobre a sua evolução futura.

No caso de uma só variável $X(t)$ teremos um modelo da forma

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) \quad \text{ou} \quad dX(t) = f(t, X(t))dt \tag{1}$$

com uma condição inicial $X(0)=X_0$. A extensão a várias variáveis é relativamente simples, trabalhando-se com um vector de variáveis e usando também um vector de funções em vez de uma função escalar f. Para não complicar a notação, consideraremos aqui o caso unidimensional.

Raramente, porém conseguimos introduzir nesses modelos todas as variáveis intervenientes, quer por desconhecimento de factores que podem afectar o fenómeno dinâmico em causa, quer por impossibilidade de os medir ou prever, quer ainda porque o seu efeito é menos relevante (ainda que não despiciendo para certos objectivos) para justificar o investimento necessário à sua inclusão detalhada. É, pois, natural, que esses factores sejam agrupados numa única variável temporal cujo comportamento é necessariamente aleatório, isto é, um processo estocástico, processo esse que se deve incluir como um termo adicional que perturba a dinâmica determinística dos factores intervenientes explicitamente considerados no modelo. Tão natural como o tratamento probabilístico que usamos para descrever o resultado do lançamento de uma moeda ao ar em vez de pretendermos introduzir de forma determinística as diversas forças resultantes da gravidade e da forma exacta como posicionamos e movimentamos a mão ao lançar a moeda e ao recolhê-la. Se admitirmos que esses factores agrupados são em número elevado, natural será que, usando e quiçá abusando do teorema do limite central, o seu efeito cumulativo possa ser aproximadamente descrito por um processo estocástico gaussiano. Normalmente, é mais fácil considerar o efeito acumulado dessas perturbações entre o instante 0 e o instante t. Se admitirmos que as perturbações que actuam num intervalo de tempo são aproximadamente independentes das que actuam noutros intervalos de tempo que se lhe não sobreponham, então é natural que o efeito acumulado das perturbações seja um processo com incrementos independentes. E se admitirmos que as perturbações, aproximadamente independentes entre si, ocorrem com uma frequência relativamente uniforme e têm efeitos que se adicionam, então é razoável supor que o seu número é aproximadamente proporcional ao intervalo de tempo a que nos reportamos e, portanto, a variância do seu efeito acumulado num certo intervalo de tempo é proporcional à duração desse intervalo. Mesmo que a proporcionalidade não seja correcta e a "constante" de proporcionalidade seja afinal variável, podemos incorporar essa variabilidade num factor multiplicativo que represente a variação do desvio-padrão com as variáveis consideradas no modelo e/ou com o tempo, e, nesse caso, nada impede escolher para o processo perturbador de base (a ser depois multiplicado por aquele factor) uma constante de proporcionalidade unitária. Disto tudo resulta que, admitindo no limite a continuidade temporal das perturbações (também é possível considerar perturbações descontínuas mas disso não falaremos aqui), podemos usar como efeito acumulado (entre 0 e t) de base o processo de Wiener padrão $W(t)$ (único que conjuga as propriedades de ser contínuo, gaussiano, ter incrementos independentes e os seus incrementos terem variância proporcional, no caso padrão com constante de proporcionalidade unitária, ao comprimento do intervalo). Claro que, num intervalo infinitesimal dt, o efeito das perturbações de base referentes a esse intervalo será $dW(t)$ e, se representarmos por $g(t,X(t))$ o desvio-padrão das perturbações, obtemos a equação diferencial estocástica (EDE)

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \qquad (2)$$

com a mesma condição inicial $X(0)=X_0$ (como o valor inicial pode ser desconhecido, nada impede que X_0 seja uma variável aleatória, desde que seja independente de $W(t)$).

Note-se que podemos generalizar, sem dificuldades, ao caso de várias variáveis e vários processos de Wiener. Também podemos generalizar, embora disso não tratemos aqui, ao caso de processos com saltos.

Naturalmente, pressupõe-se um espaço de probabilidade subjacente $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ e, representando por $\omega\in\Omega$ o "acaso", convém lembrar que $W(t)$ é um processo estocástico, isto é depende do tempo e do acaso, pelo que rigorosamente deveríamos escrever (mas não o fazemos habitualmente) $W(t,\omega)$. Podemos pensar que um ω concreto representa um estado concreto da natureza que determina os valores concretos (ao longo de toda a história do processo) dos factores perturbadores do nosso fenómeno; então Ω representará o conjunto de todos os possíveis estados da natureza, a qual "escolhe ao acaso" um deles de acordo com a lei de probabilidade P. Para t fixo, temos uma variável aleatória (função mensurável-$\mathfrak{F}$ do acaso). Para ω fixo, $W(t,\omega)$ representa uma função do tempo (uma trajectória ou realização do processo) que descreve a evolução do efeito acumulado (entre 0 e t) das perturbações de base quando o estado da natureza é ω. Claro que, a diferentes estados da natureza, podem corresponder trajectórias diferentes. Também $X_0=X_0(\omega)$ pode depender do estado da natureza e, obviamente a solução da EDE, se existir, também depende do estado da natureza, isto é, $X(t)=X(t,\omega)$ também é um processo estocástico.

Claro que agora, as previsões futuras dos valores de $X(t)$ são de natureza probabilística, já que, para t fixo, $X(t)$ é uma variável aleatória.

Natural é que as EDE tenham um campo de aplicação muito vasto, correspondente no essencial ao campo de aplicação das EDO, já que haverá quase sempre factores perturbadores não explicitamente considerados na EDO. Mas é óbvio que só valerá a pena usar EDE se esses factores perturbadores provocarem alterações relevantes relativamente aos resultados que se obteria usando EDO, como sucede frequentemente nos fenómenos biológicos. Convém ter em atenção, porém, que, mesmo para g pequenas, os resultados podem ser quantitativamente e até qualitativamente muito diferentes dos resultados obtidos trabalhando com EDO e valores médios de variáveis ou parâmetros. Mas o campo de aplicação das EDE é, de facto, mais vasto do que o das EDO já que há situações em que os factores aleatórios assumem um papel fundamental. É o caso de muitas aplicações financeiras (bolsas, futuros, opções, etc.), da sismologia ou das telecomunicações, em que modelos baseados em EDO seriam inúteis.

2. Breve introdução às equações diferenciais estocásticas

Naturalmente, entende-se por solução da EDE (2), a solução $X(t)=X(t,\omega)$ da correspondente equação integral

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dw(s). \qquad (3)$$

Sob condições de regularidade adequadas, para cada trajectória ω fixa, o primeiro integral pode ser interpretado como um vulgar integral de Riemann. Porém, o segundo integral não pode ser interpretado como integral de Riemann-Stieltjes porque o processo integrador $W(t)$ tem variação ilimitada para quase todas as trajectórias, pelo que o limite das somas de Riemann-Stieltjes para uma sucessão de decomposições (com diâmetro convergente para zero) do intervalo de integração depende da escolha dos pontos intermédios onde é calculada a função integranda $g(s,X(s))$. Se fizermos a escolha (não-antecipativa) dos pontos iniciais de cada subintervalo (a escolha em que a dinâmica presente não é afectada pelas perturbações aleatórias futuras), temos o integral de Itô, que tem excelentes propriedades probabilísticas mas não segue as regras usuais de cálculo Tal obriga a um novo cálculo, o cálculo estocástico de Itô. Aqui usa-se a convergência em média quadrática (convergência L^2 com respeito a ω) para a obtenção do limite das somas de Riemann-Stieltjes, embora, ao generalizar a uma classe mais vasta de funções integrandas, se possa substituir essa convergência por uma convergência em probabilidade. Há outros integrais correspondentes a outras escolhas ou combinações de escolhas dos pontos intermédios, sendo o mais popular deles o integral de Stratonovich que, não tendo tão boas propriedades probabilísticas, segue as regras usuais de cálculo. Como é natural, as EDE de Itô e de Stratonovich com idênticas funções f e g, têm em geral soluções diferentes. Aliás, a EDE de Itô $dX=fdt+gdW$ é equivalente à (tem a mesma solução da) EDE de Stratonovich (S) $dX=f^{*}dt+gdW$ (o "(S)" é para assinalar que se usa o cálculo de Stratonovich) em que $f^{*}=f-(1/4)\partial g^2/\partial x$. Em qualquer dos cálculos, as funções f e g devem satisfazer certas condições de regularidade para se poder garantir a existência e unicidade de solução da EDE; felizmente, com condições de regularidade adequadas, a solução é um processo de difusão que satisfaz as equações de Kolmogorov e, portanto, é um processo de Markov. Se a EDE for autónoma ($f(t,x)=f(x)$ e $g(t,x)=g(x)$), a solução é mesmo um processo de difusão homogéneo. Mais pormenores podem ver-se nos livros, como Braumann (2005) ou Øksendal (2003) ou ainda, para uma versão resumida, em Braumann (1998).

Devo referir que tem havido uma certa controvérsia na literatura sobre qual dos cálculos, Itô ou Stratonovich, é mais adequado em cada tipo de aplicações, uma vez que eles dão resultados que, até do ponto de vista qualitativo, são aparentemente diferentes. Por exemplo, em certos modelos de crescimento populacional e em certas condições, um cálculo prevê que a população se extingue com probabilidade um e o outro que a probabilidade de extinção é nula. Braumann (2007a,b,c), ilustrando com modelos de crescimento populacional e de pesca, resolve a controvérsia mostrando que a razão da aparente discrepância de resultados resulta da suposição implícita feita na literatura de que $f(t,x)$ (taxa "média" de crescimento) tem o mesmo significado para os dois cálculos. Isso é falso pois $f(t,x)$ representa médias diferentes da taxa de crescimento. Para uma classe muito ampla de modelos usados em crescimento populacional, representa a taxa média aritmética para o cálculo de Itô e a taxa média geométrica para o cálculo de Stratonovich. Se atendermos às diferenças entre as médias, os resultados coincidem. A moral da história é que temos de ter cuidado ao escolher a função $f(t,x)$. Por exemplo, no caso referido, se usarmos o cálculo de Itô, devemos naturalmente escolher para $f(t,x)$ a expressão correcta para a taxa média aritmética de crescimento. Se, porém, usarmos o cálculo de Stratonovich, devemos escolher a expressão correcta para a taxa média geométrica de crescimento. Se tivermos esse cuidado elementar, os dois cálculos dão resultados totalmente coincidentes.

Daremos agora alguns exemplos ilustrativos da variedade de aplicações biológicas, na esperança de atrair alguns futuros investigadores numa área que está em intensa actividade. Escusado será dizer que muitos progressos teóricos que têm sido feitos no estudo das EDE têm sido suscitados por questões que surgem nas aplicações.

3. Aplicações em dinâmica de populações

Esta é área em que mais tenho trabalhado. Agora $X(t)$ representa o tamanho (número de indivíduos, biomassa ou densidade) da população (de animais, plantas ou bactérias) no instante t.

No caso determinístico, a taxa de crescimento *per capita* $r=\dfrac{dX(t)/dt}{X(t)}$ pode depender do tamanho da população x e do instante t [$r=r(t,x)$]. Admitindo um ambiente estável, podemos supor um modelo autónomo em que $r=r(x)$, podendo, se os recursos forem ilimitados, a função ser constante; mas, geralmente, os recursos são limitados pelo que os recursos disponíveis *per capita* tendem a diminuir quando a população aumenta, o que provoca que $r(x)$ seja estritamente decrescente. Vários modelos com esta propriedade têm sido propostos, tais como o modelo logístico $r(x)=r(1-x/K)$ ou o modelo de Gompertz $r(x)= r\ln(K/x)$, onde K (capacidade de sustento do meio) é, caso $r>0$ and $K>0$, a população de equilíbrio estável para a qual o tamanho da população converge quando $t\to+\infty$.

Se o ambiente estiver sujeito a flutuações aleatórias, em vez de o crescimento *per capita* no intervalo infinitesimal dt ser descrito pelo modelo determinístico $\frac{dX(t)}{X(t)} = r(X(t))dt$, teremos, supondo que, em termos cumulativos, as flutuações aleatórias são impulsionadas por um processo de Wiener $W(t)$ que afecta directamente o crescimento *per capita*, a EDE

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = r(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \tag{4}$$

onde $\sigma(x)$ mede a intensidade do efeito dessas flutuações no crescimento *per capita* (os modelos propostos na literatura consideram habitualmente $\sigma(x)$ constante ou proporcional a $r(x)$).

Na literatura, os artigos consideram modelos específicos correspondendo a casos particulares das funções $r(x)$ e $\sigma(x)$. Entre os artigos pioneiros mais relevantes contam-se Levins (1969), May (1973), Capocelli e Ricciardi (1974), Goel e Richter-Dyn (1974), Kiester e Barakat (1974), Tuckwell (1974), Roughgarden (1975), mas muitos outros se seguiram.

Dado que as propriedades deduzidas poderiam ser específicas dos modelos considerados, havia interesse em obter propriedades que fossem robustas relativamente ao modelo. Tinham particular interesse nas propriedades relativas a haver ou não extinção da população e, em caso negativo, existir uma densidade estacionária, isto é, uma distribuição de equilíbrio com densidade para a qual convergisse a distribuição de probabilidade do tamanho da população quando $t\to+\infty$. Em Braumann (1999b) considera-se, para $\sigma(x)$ constante, o caso geral de $r(x)$: $(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ ser uma função arbitrária de classe C^1, satisfazendo, contudo, algumas hipóteses biologicamente realistas como ser estritamente decrescente, verificar $r(+\infty)<0$ (o que significa que os recursos não permitem sustentar uma população demasiado grande) e $R(0^+)=0$ com $R(x)=r(x)x$ (população sem imigração). Foi possível mostrar que, se $r(0^+)<0$, a extinção ocorre com probabilidade um e que, se $r(0^+)>0$, a extinção tem probabilidade nula de ocorrer e existe uma densidade estacionária. Em Braumann (2001c) generaliza-se para o caso de $\sigma(x)$ arbitrária, desde que sempre positiva e satisfazendo algumas condições técnicas pouco restritivas.

Na realidade, quando falámos de extinção, referíamo-nos a termos população nula ou a convergir para zero. Mas, se pensarmos o que significa uma população de, por exemplo, 0,4 indivíduos (não esquecer que a variável de estado X é contínua no modelo mas não na realidade), talvez seja preferível adoptar como critério mais realista de extinção, a população alguma vez atingir um tamanho $a>0$ com $a<X_0$, embora pequeno, isto é, fixarmos um limiar absorvente de extinção a. Interessa, então determinar a probabilidade de ocorrer esta extinção realista e a distribuição do tempo de extinção, aspectos que tem interessantes aplicações na gestão de espécies em perigo. Estas matérias podem ser vistas em, por exemplo, Braumann (1995), Lange, Engen e Sæther (2003) e Carlos e Braumann (2005, 2006). Claro que também se pode estudar a probabilidade de atingir um limite elevado $b>X_0$ e a distribuição do tempo para o atingir, o que, além de ser relevante em termos de preservação de espécies, também é importante para a prevenção de surtos de pragas agrícolas.

Uma outra aplicação é em espécies sujeitas a capturas (pesca, caça, florestação), em que, aos modelos anteriormente considerados, se acrescenta a mortalidade provocada pelas capturas:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = r(X(t))dt - h(t)dt + \sigma(X(t))dW(t), \tag{5}$$

onde $h(t)$ é a esforço de captura (esforço de pesca, etc.) e $h(t)X(t)$ é a taxa de capturas (por unidade de tempo). Claro que $h(t)$ pode, em geral ser controlado pelos operadores da exploração (definindo assim uma política de capturas) e têm aparecido vários artigos, usando técnicas de controlo óptimo estocástico, para, relativamente a modelos específicos de $r(x)$ e $\sigma(x)$, determinar a política de capturas que optimiza uma função objectivo, usualmente o valor esperado do lucro (a preços constantes, isto é afectando o lucro com uma taxa de depreciação) acumulado num certo horizonte temporal. Veja-se, por exemplo, Lungu e Øksendal (1997), Alvarez e Shepp (1997) e Alvarez (2000). Estas políticas, ao contrário do que sucede nos modelos determinísticos, são inaplicáveis porque implicam uma rápida alternância entre parar as capturas e capturar ao maior ritmo possível. Os trabalhos pioneiros de Beddington e May (1977), Gleit (1978) e May *et al.* (1978) optaram antes por considerar modelos em que o esforço de pesca é determinado exclusivamente pelo tamanho da população explorada $h(t)=H(X(t))$ (um exemplo especial é o de esforço constante, situação em que as capturas são proporcionais à população existente), caso em que é possível, em certas condições, obter densidades estacionárias, isto é, um equilíbrio estocástico sustentável. Estudaram o comportamento dos modelos para $r(x)$, $h(x)$ e $\sigma(x)$ específicos, tal como também fez Braumann (1985, 1993), onde se procuraram, dentro de certa classe de políticas, as que optimizassem as capturas esperadas num regime sustentável e sem extinção. O estudo para modelos gerais (com algumas restrições biologicamente razoáveis), em termos de extinção e de existência de densidade estacionária, foi feito em Braumann (1999, 2001a, 2002). Em Braumann (2001b) estudam-se modelos que combinam dois tipos de políticas (as de quota constante e as esforço constante).

Sobre os problemas estatísticos de estimação (quer dos parâmetros de $r(x)$ e $\sigma(x)$ e, se houver capturas, de $h(x)$, quer da estimação não-paramétrica destas funções), de escolha de modelos e de previsão de tamanhos futuros da população, muito haveria a dizer, mas optamos por não o fazer aqui por limitações de espaço, apesar da serem fundamentais para a aplicação dos modelos. Só queremos referir que normalmente dispomos apenas de observações de uma única trajectória do processo (não é geralmente viável ter repetições, em condições idênticas, de populações em crescimento) e que, mesmo nessa trajectória, as observações são feitas (por vezes com erro) num número finito de instantes $0=t_0<t_1<t_2<...<t_n$. Naturalmente que só alguma forma de ergodicidade (da solução ou de um processo relacionado com a solução) permite de alguma maneira usar certas "médias" temporais (ao longo da única trajectória) em substituição das médias de conjunto (médias ao longo do conjunto das trajectórias) de que não podemos dispor. Obviamente que as observações não são variáveis aleatórias independentes mas, como a solução da EDE é (sob condições de regularidade adequadas) um processo de Markov, a verosimilhança pode obter-se multiplicando as densidades de transição entre instantes de observação consecutivos. Sucede, porém, que é frequente não se conseguir obter uma expressão explícita para as densidades de transição, tendo que se usar aproximações adequadas ou técnicas alternativas. A consistência dos estimadores é muitas difícil de comprovar e exige normalmente que o número de observações tenda para infinito e o espaçamento entre elas tenda para zero, além de uma ligação entre as velocidades de convergência destas duas grandezas. Estas dificuldades têm vindo a ser engenhosa e gradualmente ultrapassadas.

4. Aplicações ao crescimento individual

Uma área recente de trabalho é a da utilização de EDE para modelar o crescimento de um indivíduo (animal ou planta) desde o nascimento até à maturidade (em termos de peso, volume, comprimento ou outra medida de tamanho), quando esse crescimento é influenciado por variações aleatórias no ambiente em que o indivíduo cresce. Seja $X(t)$ o tamanho do indivíduo no instante t. Os modelos determinísticos mais utilizados podem geralmente escrever-se na forma $dY(t)=\beta(\alpha-Y(t))dt$, onde $Y(t)=h(X(t))$, com $h(x)$ função de classe C^1 estritamente crescente. Por exemplo, o modelo de Mitscherlich corresponde a $h(x)=x$, o de Bertalanffy-Richards a $h(x)=x^c$ (com $c>0$) e o de Gompertz a $h(x)=\ln x$. Note-se que $A=h^{-1}(\alpha)$ é o tamanho assintótico que o animal atinge na maturidade. No caso estocástico podemos adoptar a classe de modelos baseada no modelo de Ornstein-Uhlenbeck (que nasceu na Física para descrever o movimento browniano de uma partícula)

$$dY(t)=\beta(\alpha-Y(t))dt+\sigma dW(t), \qquad (6)$$

passando $A=h^{-1}(\alpha)$ a ser o tamanho assintótico médio. O caso particular do modelo de Bertalanffy-Richards foi aplicado crescimento de árvores em Garcia (1983). Estranhamente este tipo de modelos não tem sido muito pouco utilizado, preferindo os que trabalham com estes dados usar modelos de regressão, que são adequados para erros de observação, mas que são totalmente inadequados para alterações provocadas por flutuações ambientais. De facto, os modelos de regressão tomam, como base de previsão do tamanho futuro, o tamanho da curva determinística, mesmo que muito diferente do tamanho actual do indivíduo, enquanto os modelos baseados em EDE partem do tamanho actual. Isso impede a situação pouco realista dos modelos de regressão, que, por não terem memória, prevêem, por exemplo, elevada probabilidade de recuperações milagrosas e quase instantâneas do peso de animais muito magros.

A classe geral de modelos foi estudada em Filipe, Braumann e Roquete (2007a,b) e Filipe e Braumann (2007, 2008), com aplicação a dados de bovinos mertolengos. Foi também tratado, no caso de termos vários animais (várias trajectórias) o caso mais complexo em que se admite que α pode variar de animal para animal (pois não são geneticamente idênticos), pelo que se pode considerar também uma variável aleatória. Os problemas de estimação e de previsão (para uma ou várias trajectórias e, neste último caso, para α comum a todos os animais ou para α aleatório) foram também tratados.

Uma quantidade de particular interesse é o tempo necessário para que o animal atinja um determinado tamanho L adequado pata a sua venda no mercado.

Claro que estes resultados têm implicações interessantes na optimização financeira de explorações pecuárias ou silvícolas, por exemplo.

5. Aplicações demográficas

Um correcto conhecimento das taxas de mortalidade é essencial para o planeamento dos sistemas de segurança social (pensões e fundos de reforma) e para a gestão de carteiras de seguros de vida ou de planos de poupança reforma. Em Portugal, recentes alterações legislativas incorporam já no cálculo das pensões um factor de sustentabilidade que tem em conta precisamente as alterações da esperança de vida da população. De facto, a redução das taxas de mortalidade que se tem vindo a observar graças aos progressos sociais e à evolução da Medicina, tem provocado o aumento da esperança de vida. Consequentemente, a utilização de taxas de mortalidade correntes, sem prever a sua actualização futura, pode dar origem a subavaliações dos encargos futuros da segurança social ou de instituições financeiras com o pagamento de pensões e de responsabilidades assumidas com planos de poupança reforma. Já no que se refere a seguros de vida, a consequência será a sobreavaliação dos encargos.

Há várias maneiras de modelar a evolução das taxas de mortalidade, sendo correntes os modelos determinísticos. Na verdade, porém, a evolução temporal das taxas de mortalidade, está sujeita a perturbações aleatórias decorrentes de problemas de saúde pública imprevistos (como, por exemplo, epidemias ou alterações climáticas), evolução não determinística dos progressos médicos, alterações económicas e sociais que afectam os riscos de morte, etc. Faz, pois, todo o sentido que as taxas de mortalidade evoluam de acordo com uma certa tendência essencialmente determinística, a que se sobrepõem alterações aleatórias, pelo que podem ser descritas por equações diferenciais estocásticas apropriadas, normalmente mais gerais do que as aqui descritas, incluindo a possibilidade de saltos (para descrever possíveis evoluções abruptas das condições de vida). Mas é de notar que há que combinar esta fonte de aleatoriedade ambiental que afecta as taxas de mortalidade com a aleatoriedade demográfica em que, mesmo para taxas fixas, que devem interpretar-se como probabilidades de morte para cada grupo etário, a mortalidade efectivamente observada num ano resulta da amostragem realizada sobre o grupo (de pensionistas ou de segurados) em estudo (cada indivíduo do grupo tem certa probabilidade de morrer nesse ano, contando para a mortalidade observada se morrer e não contando em caso contrário). Os riscos financeiros decorrentes do efeito demográfico, que tem a natureza de erro amostral, podem ser reduzidos aumentando a amostra, isto é, o tamanho do grupo. Já os riscos decorrentes da variabilidade ambiental, pelo contrário, ficam ampliados pelo aumento do tamanho do grupo. Um problema ainda em aberto é como fazer a cobertura do risco, já que, apesar de se usarem modelos de EDE relativamente semelhantes aos usados para os produtos financeiros transaccionados no mercado, não se dispõe de instrumentos semelhantes de cobertura e avaliação do risco. Por outro lado, não se prevê que seja fácil a criação e aceitação pública de produtos financeiros derivados baseados na evolução das taxas de mortalidade.

Em Bravo e Braumann (2007) pode ver-se o enquadramento e resultados gerais deste estudo, mas, para uma análise detalhada de vários modelos e uma aplicação à realidade portuguesa, deve consultar-se Bravo (2007).

Uma outra alternativa é supor que as taxas de mortalidade evoluem de acordo com modelos essencialmente determinísticos mas em que os parâmetros sofrem perturbações aleatórias, isto é, são processos estocásticos cuja evolução é descrita por equações diferenciais estocásticas.

6. Outras aplicações biológicas

Naturalmente, os modelos de crescimento populacional podem aplicar-se, usando EDE em dimensão superior a um, a conjuntos de populações interactuantes. Um exemplo interessante é a do estudo de um sistema presa-predador feito por Rudnicki (2003).

Uma outra aplicação interessante refere-se à epidemiologia, onde o clássico modelo determinístico SIR que estuda a evolução do número de susceptíveis ($S(t)$), infectados ($I(t)$) e recuperados ($R(t)$) tem uma versão estocástica em forma de EDE tridimensionais (mas na verdade vivendo num espaço a duas dimensões porque $S(t)+I(t)+R(t)$ é o tamanho, considerado fixo neste modelo, da população). Veja-se Tornatore e Buccellato (2007).

Uma aplicação que tem já uma tradição antiga e um corpo de literatura extenso é o do estudo do comportamento eléctrico dos neurónios. Os chamados modelos neuronais que descrevem a evolução do potencial $X(t)$ da membrana do neurónio são intrinsecamente estocásticos, já que são bastante imprevisíveis os impulsos eléctricos recebidos pelas ligações a múltiplos outros neurónios. Normalmente considera-se que, quando $X(t)$ atinge um determinado limiar $S>X_0$, o neurónio dispara transmitindo sinais a outros neurónios e reduzindo o seu potencial a X_0. Até disparar, a dinâmica de $X(t)$ é descrita por uma equação diferencial estocástica, sendo o modelo de Ornstein-Uhlenbeck talvez o mais popular. Uma variável com particular interesse é o tempo até disparar, cuja distribuição e momentos têm sido muito estudados para este e outros modelos alternativos. Pode encontrar uma boa abordagem no livro de Ricciardi (1977). Como o comportamento dos disparos é um pouco mais complexo do que aqui se descreveu, a literatura está cheia de refinamentos que colocam problemas teóricos muito interessantes.

As aplicações em genética de populações são também importantes, usando processos de difusão como boas aproximações à evolução das frequências génicas quando se incorporam os efeitos da deriva genética (variação amostral das frequências). Estes estudos têm importantes implicações no estudo das teorias de evolução das espécies e na datação da origem de espécies e de colonizações de populações. A apresentação em forma de processo de difusão, que é mais tradicional na literatura especializada desta área, é equivalente à utilização de EDE, pois, em condições de regularidade adequadas, as soluções de EDE são processos de difusão e vice-versa. Um clássico é o livro de Crow e Kimura (1970).

Mas a lista de aplicações é bastante mais vasta e inclui a análise de modelos imunológicos e fisiológicos, como, por exemplo, os modelos de evolução da concentração de insulina e glucose (e de outros químicos que com eles interagem), que têm muita importância para determinar o melhor doseamento da administração da insulina em diabéticos e para o desenvolvimento em curso de sistemas automáticos de administração de insulina. Veja-se, por exemplo, Picchini *et al.* (2006).

E é melhor parar por aqui, deixando de fora várias outras aplicações também interessantes, para além daquelas de que ninguém ainda se lembrou e que o leitor poderá vir a descobrir.

Agradecimentos

O autor é membro do CIMA-U.E., centro de investigação financiado pelo Programa de Financiamento Plurianual da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT). Os resultados reportados sobre modelos de crescimento individual foram desenvolvidos no âmbito do projecto PTDC/MAT/64297/2006, financiado pela FCT.

Referências

Alvarez, L. H. R. (2000). On the option interpretation of rational harvesting planning. *J. Math. Biol.* **40**: 383-405.

Alvarez, L. H. R., Shepp, L. A. (1997). Optimal harvesting of stochastically fluctuating populations. *J. Math. Biol.* **37:** 155-177.

Beddington, J. R., May, R. M. (1977). Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment. *Science* 197: 463-465.

Braumann, C. A. (1985). Stochastic differential equation models of fisheries in an uncertain world: extinction probabilities, optimal fishing effort, and parameter estimation. Em *Mathematics in Biology and Medicine*, Capasso, V., Grosso, E., Paveri-Fontana, S. L. (eds.), Springer, Berlin.

Braumann, C. A. (1993). General models of fishing with random growth parameters. Em *Mathematics Applied to Biology and Medicine*, Demongeot, J., Capasso, V. (eds.), Wuerz Publ. Ltd., Winnipegp.

Braumann, C. A. (1995). Threshold crossing probabilities for population growth models in random environments. *J. Biological Systems* 3: 505-517.

Braumann, C. A. (1998). O Acaso, a bolsa e a vida. Em *Estatística: A Diversidade na Unidade. Actas do V Congresso Anual da SPE,* Souto de Miranda, M., Pereira, I. (eds.), p. 29-55, Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, Lisboa.

Braumann, C. A. (1999). Variable effort fishing models in random environments. *Math. Biosci.* 156: 1-19.

Braumann, C. A. (1999b). Applications of stochastic differential equations to population growth. Em *Proc. 9th International Colloquium on Differential Equations*, Bainov, D. (ed.), VSP, Utrecht, p. 47-52 (invited paper).

Braumann, C. A. (2001a). General stochastic differential equation model of population growth and fishing in a random environment. *Bull. Internat. Statistical Inst*. LIX CP3: 111-112.

Braumann, C. A. (2001b). Constant effort and constant quota fishing policies with cut-offs in random environments. *Natural Resource Modelling* 14 (2): 199-232.

Braumann, C. A. (2001c). Crescimento de populações em ambiente aleatório: generalização a intensidades de ruído dependentes da densidade da população. Em *A Estatística em Movimento*, Neves, M. M., Cadima, J., Martins, M. J., Rosado, F. (eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística, Lisboa, p. 119-128.

Braumann, C. A. (2002). Variable effort harvesting models in random environments: generalization to density-dependent noise intensities. *Math. Biosci.* 177 & 178: 229-245.

Braumann, C. A. (2005). *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*. Edições SPE, Lisboa.

Braumann, C. A. (2007a). Itô versus Stratonovich calculus in random population growth. *Math. Biosci.* 206: 81-107.

Braumann, C. A. (2007b) Harvesting in a random environment: Itô or Stratonovich calculus. J. Theoret. Biol. 244: 424-432.

Braumann, C. A. (2007c). Population growth in random environments: which stochastic calculus? *Bull. Internat. Statistical Inst*. LXII (Proc. 56th Session of the ISI, electronic publication, printed version of the journal in press).

Bravo, J. M. (2007). *Tábuas de Mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Modelos Estocásticos, Aplicações Actuariais e Cobertura do Risco de Longevidade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Évora, p. xxvi+565.

Bravo, J. M., Braumann, C. A. (2007). The value of a random life: modelling survival probabilities in a stochastic environment. *Bull. Internat. Statistical Inst*. LXII (Proc. 56th Session of the ISI, electronic publication, printed version of the journal in press).

Capocelli, R. M., Ricciardi, L. M. (1974). A diffusion model for population growth in random environments. *Theoret. Popul. Biol.* 5: 28-41.

Carlos, C., Braumann, C. A. (2005). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório. Em *Estatística Jubilar*, Braumann, C. A., Infante, P., Oliveira, M. M., Alpízar-Jara, R., Rosado, F. (eds). Edições SPE, Lisboa p. 133-142.

Carlos, C., Braumann, C. A. (2006). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório e cálculos de Itô e Stratonovich. Em *Ciência Estatística*, Canto e Castro, L., Martins, R. G., Rocha, C., Oliveira, M. F., Leal, M. M., Rosado, F. (eds), Edições SPE, Lisboa, p. 229-238.

Crow, J. F., Kimura, M. (1970). *An Introduction to Population Genetics Theory*. Harper and Row, New York.

Filipe, P.A., Braumann, C.A. (2008). Modelling individual animal growth in random environments. In *Proc. 23d International Workshop on Statistical Modelling,* Eilers, P. H. C. (ed.), p. 232-237.

Filipe, P.A., Braumann, C. A. (2007). Animal growth in random environments: estimation with several paths. *Bull. Internat. Statistical Inst*. LXII (Proc. 56th Session of the ISI, electronic publication, printed version of the journal in press).

Filipe, P.A., Braumann, C.A., Roquete, C.J. (2007a). Modelos de crescimento de animais em ambiente aleatório. Em *Estatística Ciência Interdisciplinar,* Ferrão, M.E., Nunes, C., Braumann, C.A. (eds.), Edições SPE, Lisboa, p. 401-440.

Filipe, P.A., Braumann, C.A., Roquete, C.J. (2007b). Crescimento individual em ambiente aleatório: várias trajectórias. Em *Actas do XV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatísti*ca, Edições SPE, Lisboa (aceite para publicação).

Garcia, O., (1983). A stochastic differential equation model for the height of forest stands. *Biometrics* 39: 1059-1072.

Gleit, A. (1978). Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth. *Math. Biosci.* 41: 112-123.

Goel, N. S., Richter-Dyn, N. (1974). *Stochastic Models in Biology.* Academic Press, N. Y.

Kiester, A. R., Barakat, R. (1974). Exact solutions to certain stochastic differential equation models of population growth. *Theoret. Popul. Biol.* 6: 199-216.

Lange, R., Engen, S. e Sæther, B.-E. (2003). Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation. Oxford University Press, Oxford.

Levins, R. (1969). The effect of random variations of different types on population growth. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 62: 1061-1065.

Lungu, E. M., Øksendal, B. (1997). Optimal harvesting from a population in a stochastic crowded environment. *Math. Biosci.* 145**:** 47-75.

May, R. M. (1973). Stability in randomly fluctuating versus deterministic environments. *Amer. Natur.* 107: 621-650.

May, R. M., Beddington, J. R., Horwood, J. H. Shepherd, J. G. (1978). Exploiting natural populations in an uncertain world. *Math. Biosci.* 42: 219-252.

Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications.* (6^{th} edition). Springer, Berlin.

Picchini, U., Ditlevsen, S., De Gaetano, A. (2006). Modeling the euglycemic hiperinsulinemic clamp by stochastic differential equations. *J. Math. Biol.* 53: 771-796.

Ricciardi, L. M. (1977). *Diffusion Problems and Related Topics in Biology*. Lecture Nores in Biomathematics 14, Springer, Berlin.

Roughgarden, J. (1975). A simple model for population dynamics in stochastic environments. *Amer.Natur.* 109: 713-736.

Rudnicki, R. (2003). Long-rime behaviour of a predator-prey model. Stochastic Processes Appl. 108: 93-107.

Tornatore, E., Buccellato, S. M. (2007). On a stochastic SIR model. *Applicationes Mathematicae* 34: 389-400.

Tuckwell, H. C. (1974). A study of some diffusion models of population growth. *Theoret. Popul. Biol.* 5: 345-357.

Ciência Estatística

• Artigos Científicos Publicados

Beirlant, B., Figueiredo, F., Gomes, M.I. and Vandewalle, B. (2008). Improved reduced bias tail index and quantile estimators. *J. Statistical Planning and Inference* **138**, 1851-1870, DOI:10.1016/j.jspi.2007.07.015, 2007**.**

Braumann, C. A. (2008). Growth and extinction of populations in randomly varying environments. Computer & Mathematics with Applications **56**: 631-644.

Braumann, C. A. (2007). Itô versus Stratonovich calculus in random population growth. Mathematical Biosciences **206**: 81-107.

Braumann, C. A. (2007). Harvesting in a random environment: Itô or Stratonovich calculus? J. Theoretical Biology **244**: 424-432.

Caeiro, F. and Gomes, M.I. (2008). Minumum-variance reduced-bias tail index and high quantile estimation. *Revstat* **6**:1, 1-20**.**

Ferreira, M. and Canto e Castro, L. (2008). Tail and dependence behavior of levels that persist for a fixed period of time. *Extremes* **11**;2, 113-133, DOI: 10.1007/s10687-007-0046-y**,** 2007.

Gomes, M.I. Canto e Castro, L., Fraga Alves, M.I., and Pestana, D. (2008). Statistics of extremes for iid data and breakthroughs in the estimation of the extreme value índex: Laurens de Haan leading contributions. *Extremes* **11**:1, 3-34, DOI: 10.1007/s 10687-007-0048-9, 2007.

Gomes, M.I., de Haan, L. and Henriques Rodrigues, L. (2008). Tail Index estimation for heavy-tailed models: accommodation of bias in weighted log-excesses. *J. Royal Statistical Society* **B70**, Issue 1, 31-52, DOI: 10.1111/j.1467-9869.2007.00620.x, 2007.

Gomes, M. I., L. Henriques Rodrigues, B. Vandewalle and C. Viseu (2008). A Heuristic Adaptive Choice of the Threshold for Bias-Corrected Hill Estimators. *J. Statist. Comput. and Simulation* **78**:2, 133-150, DOI: 10.1080 / 10629360600954000, 2007**.**

Gomes, M.I. and Neves, C. (2008). Asymptotic comparison of the mixed moment and other extreme value index estimators. *Statistics and Probability Letters*, Vol **78**:6 pp 643-653, 2008, DOI: 10.1016/j,spl.2007.07.026, 2007**.**

Gomes, M.I., Hall, A. e Miranda, C. (2008). Subsampling techniques and the Jackknife methodology in the estimation of the extremal index. *J. Comput. Statist. And Data Analysis* **52**:4, 2022-2041, DOI: 1016 / j.csda.2007.06.023, 2007.

de Haan, L. and Zhou, C. (2008). On extreme value abalysis of a spatial process. *Revstat* **6**:1, 71-81**.**

Martins, A., Ferreira, H. and Pereira, L. (2008). Multidimensional outlier-proneness of dependent data and the extremal index. *Statistical Methodology* **5**, 72-82.

Neves, C. and Fraga Alves, M.I. (2008). Testing extreme value conditions - an overview and recent approaches. *Revstat* **6**:1, 83-100**.**

• Livros

Título: Séries temporais. Modelações lineares e não lineares. 2ª edição, revista e aumentada.
Autoras: Esmeralda Gonçalves e Nazaré Mendes Lopes
Editora: Sociedade Portuguesa de Estatística **Ano:** 2008

Título: Análise de Dados Espaciais
Autoras: M. Lucília Carvalho e Isabel C. Natário
Editora: Sociedade Portuguesa de Estatística **Ano:** 2008

Título: Estatística - da teoria à prática. Actas do XV Congresso Anual da SPE.
Editores: M. M. Hill, M. A. Ferreira, J. G. Dias, M. F. Salgueiro, H. Carvalho, P. Vicente e C. Braumann.
Editora: Sociedade Portuguesa de Estatística **Ano:** 2008

• Teses de Doutoramento

Título: O Papel de Distribuições Condicionalmente Especificadas em Estatística Bayesiana
Autora: Elisete Correia, *ecorreia@utad.pt*
Orientadora: Maria Antónia Amaral Turkman

Na minha tese, tendo como motivação os trabalhos de Arnold, Castillo e Sarabia (1997) sobre a especificação da distribuição conjunta de vectores aleatórios bidimensionais através das distribuições condicionadas e os trabalhos de Berger e Bernardo (1974) sobre a especificação de distribuições *a priori* de referência, comparamos as distribuições *a posteriori* marginais para um parâmetro de interesse, obtidas por estes métodos e pelo método de Jeffreys. Consideramos diferentes modelos e diferentes parâmetros de interesse, nomeadamente, razão de dispersões, razão de médias e razão de proporções.
Argumentando que a eliciação *a priori* deve ser feita sobre o parâmetro de interesse e não sobre os parâmetros iniciais indexadores do modelo, comparamos os resultados obtidos para a distribuição *a posteriori* marginal do parâmetro de interesse, quando esses dois tipos de eliciação são considerados.
Na sequência do nosso estudo encontramos várias distribuições que, tanto quanto sabemos, não costumam ser mencionadas na literatura. Estão neste caso a distribuição *a posteriori* marginal resultante da razão de duas distribuições normais independentes com parâmetros distintos, isto é não identicamente distribuídas, a distribuição *a posteriori* marginal resultante da razão de duas distribuições Student não centrais independentes, não identicamente distribuídas, a distribuição *a posteriori* marginal resultante da razão de betas independentes com ambos os parâmetros distintos e a distribuição *a posteriori* condicional para o parâmetro perturbador, cujo núcleo é o da função integranda da representação integral da função hipergeométrica.
Surgiram ainda versões ponderadas de certas distribuições (normal e Student) com função de ponderação $|x|$.

Elisete Correia

Título: Estabilidade em Análise Conjunta de Regressões e Condução Dinâmica de Planos de Melhoramento
Autor: Amílcar Manuel do Rosário Oliveira, *aoliveira@univ-ab.pt*
Orientador: João Tiago Mexia

A minha tese incide sobre a análise conjunta de regressões, ACR, técnica que tem sido utilizada na análise conjunta de ensaios para a avaliação e comparação de cultivares. Inicialmente a técnica foi utilizada para ensaios sempre com os mesmos cultivares, sendo posteriormente estendida à condução de planos de melhoramento.
A aplicação da técnica consistia até agora, no ajustamento de regressões lineares da produção numa variável não observável, designada por índice ambiental, que mede a capacidade produtiva.
Neste estudo procedeu-se à extensão da aplicação da técnica ACR, na medida em que passamos duma análise clássica – na qual se tem apenas em atenção a produção de cada cultivar - para o caso alargado em que se considera o valor económico.
Foi usada a técnica da quase-normalidade multiplicativa, onde através das simulações efectuadas foi possível concluir que o produto de duas variáveis normais independentes, uma das quais com baixo coeficiente de variação, é aproximadamente normal. Estes resultados permitiram tirar conclusões importantes tendo em vista a aplicação prática.
É estabelecida a aplicação da técnica da ACR completada, considerando-se a informação adicional.
A técnica desenvolvida foi aplicada ao plano português de melhoramento de aveia (1984-2004).

Amílcar Oliveira

SOCIEDADE PORTUGUESA DE ESTATÍSTICA

PRÉMIOS "ESTATÍSTICO JÚNIOR 2008"

Trabalho classificado em 1º lugar (Ensino Secundário)

Título: Exames Nacionais do 9º ano
Autoria: Mariana Pinto Marques, Marta Isabel Nunes Vieira Fernandes e Rui Tavares Godinho
Estabelecimento de Ensino: Escola Secundária do Entroncamento
Ano de Escolaridade: 10º Ano
Professor orientador: Dulce Marina Bugalho Monteiro

Trabalhos classificados em 2º lugar (ex æquo) (Ensino Secundário)

Título: Como melhorar a educação nos próximos anos
Autoria: Vanda Catarina Ribeiro Gameiro, Ana Catarina Morgado e Cátia Sofia Guedes Pinto
Estabelecimento de Ensino: Escola Secundária do Entroncamento
Ano de Escolaridade: 10º Ano
Professor orientador: Dulce Marina Bugalho Monteiro

Título: Caracterização sócio-económica dos alunos desta escola
Autoria: Ricardo Simões e Vítor Pereira
Estabelecimento de Ensino: Escola EB/S Padre Martins Capela, Terras de Bouro
Ano de Escolaridade: 10º Ano
Professor orientador: Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro Sampaio

Trabalho classificado em 3º lugar (Ensino Secundário)

Título: Aplicando a distribuição bidimensional – Estudo da relação entre a CIF e a CE na disciplina de Matemática A do 12º Ano
Autoria: Duarte José Baptista Pereira Alves e Dinis Cambraia Lopes Sarmento Pereira
Estabelecimento de Ensino: Escola Secundária Carlos Amarante-Braga
Ano de Escolaridade: 11º Ano
Professor orientador: Tomé António Mendes Torres

Trabalho classificado em 2º lugar (Ensino Básico)

Título: Hábitos alimentares dos alunos de 9º ano da Escola Artur Gonçalves
Autoria: Inês Oliveira Pedro dos Santos, Leonor Oliveira Pedro e Ana Beatriz Correia Lopes
Estabelecimento de Ensino: Escola Artur Gonçalves, Torres Novas
Ano de Escolaridade: 7º Ano
Professor orientador: Teresa de Jesus Poço Isabel

Trabalho classificado em 3º lugar (Ensino Básico)

Título: Segurança na nossa Escola
Autoria: Catarina Mafalda Correia da Costa e Verónica Panea
Estabelecimento de Ensino: Escola Básica Integrada da Mexilhoeira Grande
Ano de Escolaridade: 8º Ano
Professor orientador: Clara Maria Lourenço Marquês

SOCIEDADE PORTUGUESA DE ESTATÍSTICA

PRÉMIOS "ESTATÍSTICO JÚNIOR 2008"

Trabalho classificado em 1º lugar (Ensino Secundário)

PRÉMIO SPE 2008

Abordagem por penetrâncias alélicas: uma nova modelação estatística para a análise de fenótipos binários complexos[1]

Nuno Sepúlveda, nunosep@igc.gulbenkian.pt
Instituto Gulbenkian de Ciência e CEAUL

Fenótipos binários complexos são o resultado de uma rede intrincada de factores genéticos e ambientais. Desta complexidade decorre a incerteza na expressão fenotípica para qualquer genótipo, suscitando a consideração da probabilidade de um indivíduo manifestar o fenótipo dado o seu genótipo, que na literatura genética é conhecida por penetrância. Diversos modelos lineares generalizados têm sido propostos para dissecar geneticamente este tipo de fenótipos. Em geral, estes modelos pressupõem uma escala conveniente para a penetrância e efeitos lineares dos genes em estudo, seguindo de perto a filosofia dos populares modelos lineares para a análise de fenótipos quantitativos. Contudo, estes modelos apresentam algumas lacunas em termos de interpretação genética: (i) os alelos que conferem o fenótipo não são explicitamente especificados nos modelos; (ii) a modelação de dominância e recessividade não decorre de uma concepção biológica desses conceitos; (iii) a escolha da escala para a penetrância obedece mais a critérios estatísticos do que biológicos, nomeadamente, o bom ajustamento de um modelo aos dados; (iv) os modelos não permitem por si só extrair mecanismos genéticos que possam explicar a herança do fenótipo. Tais deficiências justificam a necessidade premente de desenvolver novos modelos mais apropriados para a análise de fenótipos binários complexos [1].
Tentando suprir as deficiências enumeradas acima, propõe-se a *abordagem por penetrâncias alélicas* para modelar a penetrância em populações experimentais [2,3]. Nesta nova modelação, admite-se que os alelos do genótipo têm uma probabilidade de se expressarem ao nível do fenótipo. Deste modo, vários modelos de acção genética podem ser facilmente obtidos por diferentes condições de expressão alélica. Neste trabalho revêem-se os modelos de penetrância alélica propostos para fenótipos binários complexos, nomeadamente, os modelos de dominância e recessividade para a acção de um gene, e os modelos de acção independente, inibitória e cumulativa para dois genes. A sua análise estatística processa-se segundo métodos bayesianos, não só por serem teoricamente coerentes e permitirem a incorporação de informação *a priori*, mas também por estarem a tornar-se cada vez mais acessíveis aos geneticistas. Dois exemplos de aplicação são apresentados: um referente à acção do haplótipo [HLA-B8,SC01,DR3] na herança genética das deficiências de imunoglobulinas D e G4 numa população caucasiana, e um outro relacionado com a acção de dois *loci* no controlo da susceptibilidade à infecção por *Listeria monocytogenes* em murganhos.

Referências:
[1] Cordell, H., Todd, J., Hill, N., Lord, C., Lyons, P., Peterson, L., Wicker, L. and Clayton, D. (2001). Statistical Modeling of Interlocus Interactions in a Complex Disease: Rejection of the Multiplicative Model of Epistasis in Type I Diabetes. *Genetics* **158**:357-367.
[2] Sepúlveda, N. (2004). Modelos estatísticos para a acção conjunta de dois loci em fenótipos binários complexos. Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico.
[3] Sepúlveda, N., Paulino, C. D., Carneiro, J. and Penha-Gonçalves, C. (2007). Allelic penetrance approach as a tool to model two-locus interaction in complex binary traits. *Heredity* **99**:173-184.

Nuno Sepúlveda, **galardoado com o prémio SPE 2008**, licenciou-se em Matemática Aplicada e Computação (ramo de Probabilidades e Estatística) pelo Instituto Superior Técnico. Mestre em Matemática Aplicada pela mesma instituição sob a supervisão do Professor Doutor Carlos Daniel Paulino, encontra-se no Instituto Gulbenkian de Ciência a terminar o doutoramento em Ciências Biológicas, sob a orientação do Professor Doutor Jorge Carneiro. É docente convidado na Escola Superior de Saúde Egas Moniz e no Instituto Superior de Ciências da Saúde Egas Moniz.

---

[1]Trabalho financiado pelo Instituto Gulbenkian de Ciência e pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/19810).