

Controlo Estatístico da Qualidade¹

M. Ivette Gomes

D.E.I.O. e C.E.A.U.L., Universidade de Lisboa

Fernanda Figueiredo

*C.E.A.U.L., Universidade de Lisboa,
Faculdade de Economia, Universidade do Porto*

M. Isabel Barão

D.E.I.O. e C.M.A.F., Universidade de Lisboa

¹Investigação parcialmente financiada por FCT/POCI 2010/FEDER

Prefácio à segunda edição

Finalmente apresentamos uma segunda edição desta monografia, associada a um mini-curso ministrado no VII *Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, e esgotada há mais de oito anos. A monografia tem servido essencialmente como texto de apoio a unidades curriculares de estudos graduados e pós-graduados na área de *Gestão e Controlo Estatístico da Qualidade*.

Esta segunda edição é pois uma edição revista e aumentada, com uma autora adicional, doutorada na área de *Controlo Estatístico da Qualidade*. Fizemos ajustamentos ao longo de todo o texto, no sentido de clarificar algumas questões e corrigir gralhas (possivelmente cometendo outras, o que é sempre inevitável). Procedemos ainda a um investimento adicional no Capítulo 5, em particular na abordagem às cartas de controlo CUSUM, de *cumulative sum*, às políticas amostrais, e a uma descrição actualizada dos desenvolvimentos mais recentes (Secção 5.6). Incluímos ainda um novo capítulo, o Capítulo 10, com exercícios que cobrem uma grande parte da teoria exposta, os quais permitem aos estudantes aplicar os conhecimentos adquiridos sobre os diferentes temas abordados.

Finalizamos com um agradecimento ao actual Presidente da *Sociedade Portuguesa de Estatística* (SPE), Professor Carlos Braumann, e a toda a Direcção da SPE, pela iniciativa de proceder ao lançamento destas novas edições e pelo encorajamento manifestado em prol desta segunda edição da monografia em *Controlo Estatístico da Qualidade*.

M. Ivette Gomes
Fernanda Figueiredo
M. Isabel Barão

Prefácio

Neste texto procedemos a uma compilação do material leccionado na cadeira de *Controlo da Qualidade* da licenciatura em Probabilidades e Estatística. Trata-se de um manual de trabalho, ainda em fase embrionária, em que se procurou encontrar um compromisso entre o rigor teórico e uma abordagem intuitiva às Probabilidades e Estatística, disseminando técnicas simples, mas poderosas, que têm sido largamente utilizadas nas mais variadas indústrias e nos mais diversos países, de modo a melhorar a qualidade dos produtos e serviços e a reduzir custos. O uso eficiente destas técnicas depende obviamente de elas serem bem conhecidas pelos operadores de produção e inspeção, pelos engenheiros, e pelo pessoal médio e superior da área da *Gestão*.

Este livro é essencialmente sobre alguma da metodologia estatística usual em *Qualidade*, e a ênfase principal foi colocada no uso, e por vezes mau uso, da metodologia de *cartas de controlo*, metodologia básica da área de *Controlo Estatístico de Processos* (o chamado SPC, de *Statistical Process Control*). O Capítulo 1 é um capítulo introdutório, sobre as metodologias estatísticas usuais em *Controlo da Qualidade, em linha de produção e fora de linha de produção*, e os Capítulos 2 e 3 são essencialmente capítulos básicos de temas elementares da área de *Probabilidade e Estatística*, importantes para várias das técnicas usuais em *Qualidade*. No Capítulo 5 abordaremos com algum detalhe a metodologia de *Cartas de Controlo*, referindo as cartas clássicas de médias e amplitudes, e as menos clássicas cartas de máximo/mínimo, CUSUM e EWMA. Com grande utilidade em toda a metodologia de cartas de controlo, e mais geralmente em SPC e *Fiabilidade*, estudaremos no Capítulo 4 alguns rudimentos de *Estatísticas Ordinais* e dedicar-nos-emos no Capítulo 6 aos *Testes de Aleatoriedade*, muito usuais na área da *Qualidade*, como complemento à regra universal de fora de controlo (*característica de qualidade* fora dos chamados *limites de tolerância* que lhe

estão associados). A *Inspecção de Aceitação* é uma componente necessária em qualquer processo de manufactura, podendo e devendo ser aplicada à matéria prima, antes de entrada em linha de produção, e será abordada no Capítulo 7. A amostragem de aceitação é no entanto também utilizada posteriormente à linha de produção, por exemplo pelo comprador dos produtos manufacturados. No Capítulo 8 referiremos alguns rudimentos da *Teoria da Fiabilidade*, outro dos temas da *Estatística* importante em *Controlo Estatístico da Qualidade* fora da linha de produção, com desenvolvimento de *Testes de Vida* em modelo Exponencial. Finalmente, no Capítulo 9, referiremos de forma muito ligeira a *abordagem de Taguchi à Qualidade*, e procuraremos fazer uma descrição não apaixonada dos elementos principais da muito em voga *Gestão da Qualidade Total*, designada por TQM, de *Total Quality Management*, analisando alguns dos seus campos de aplicação e algumas das suas limitações.

M. Ivette Gomes
M. Isabel Barão

Conteúdo

1	O que é o Controlo da Qualidade?	1
1.1	Objectivos Fundamentais	1
1.2	Técnicas Estatísticas Usuais em Qualidade	3
1.3	Breve Introdução Histórica	4
1.4	Processos e Qualidade	9
1.4.1	A Gestão e a Qualidade	10
1.4.2	ISO 9000 e Qualidade	10
1.4.3	Ciclo de Garantia da Qualidade	12
1.5	Instrumentos de Controlo da Qualidade	14
1.5.1	Fluxogramas ou Organigramas	14
1.5.2	Diagramas de Causa-e-efeito	16
2	Descrição de Dados	19
2.1	Dados Qualitativos	21
2.1.1	Tabelas de Frequências	22
2.1.2	Gráficos de Barras	23
2.1.3	Diagramas de Pareto	24
2.2	Dados Quantitativos	25
2.2.1	Estatísticas Descritivas	27
	Medidas de localização	28
	Medidas de dispersão ou escala	29
	Medidas de forma	30
2.2.2	Caixas-de-bigodes	31
2.2.3	Diagramas de Pontos	32
2.2.4	Diagramas de Caule-e-folhas	34

2.2.5	Histogramas	35
2.2.6	Cartas de Controlo — Gráficos Sequenciais	37
2.2.7	Método Gráfico de Selecção de Modelos — Papel de Probabilidade	38
2.3	Regras para Descrição de Dados	43
2.4	Comentários sobre Análise Gráfica	44
3	Modelação de Dados	47
3.1	Modelos Contínuos Univariados	48
3.1.1	Modelo Normal	48
	Modelo Normal Truncado	49
	Modelo Semi-Normal	49
3.1.2	Modelo Logístico	50
3.1.3	Modelo Lognormal	50
3.1.4	Modelo Gama	52
	Distribuição Gama Generalizada	54
3.1.5	Modelo Beta	54
3.1.6	Modelo Gaussiano Inverso	56
3.1.7	Modelos Extremais	58
	Modelo de Gumbel	59
	Modelo de Fréchet	60
	Modelo Weibull de máximos	61
3.2	Modelos Discretos Univariados	62
3.2.1	Modelo Binomial	62
3.2.2	Modelo Hipergeométrico	62
3.2.3	Modelo Binomial Negativo	63
	Distribuição Geométrica ou de Pascal	64
3.2.4	Modelo de Poisson	64
	Distribuição de Poisson positiva	65
	Distribuição de Poisson duplamente truncada	66
3.3	Estimação de Parâmetros	66
3.3.1	Modelo Normal ou Gaussiano	66
3.3.2	Modelo Logístico	66
3.3.3	Modelo Lognormal	67
3.3.4	Modelo Gama	67

3.3.5	Modelo Beta	69
3.3.6	Modelo Gaussiano Inverso	69
3.3.7	Modelos Extremais	69
	Modelo de Gumbel	69
	Modelo de Fréchet	70
	Modelo Weibull de máximos	70
3.3.8	Modelo Binomial	70
3.3.9	Modelo Geométrico	71
3.3.10	Modelo de Poisson	71
3.4	Análise Exploratória de Dados	71
4	Estatísticas Ordinais	75
4.1	Comportamento Individual	76
4.2	Distribuição Conjunta	78
4.3	Momentos de Estatísticas Ordinais	78
4.4	Amplitude e Escala	80
4.5	Estatísticas Sistemáticas	82
5	Controlo de Processos (SPC)	83
5.1	Gestão da Qualidade Total (TQM)	83
5.2	Introdução às Cartas de Controlo	85
5.3	Cartas de Controlo para Variáveis	94
5.3.1	Carta- \bar{X}	94
5.3.2	Carta- R	96
5.3.3	Curva Característica	98
5.4	Cartas de Controlo para Atributos	101
5.4.1	Carta- p	102
5.4.2	Carta- c	103
5.5	Cartas de Controlo Especiais	103
5.5.1	Cartas de Controlo para Máximos e Mínimos	104
5.5.2	Carta de Médias Móveis, MA	106
5.5.3	Cartas CUSUM (cumulative sum) e EWMA (exponentially weighted moving average) . .	107
	Cartas CUSUM	109
	Planos de Decisão Intervalar	111
	Cartas EWMA	114

5.6	Miscelânea de Cartas de Controlo	117
5.6.1	Cartas para Processos Short-runs, Batch e Multiple-stream	117
5.6.2	Cartas não Paramétricas	117
5.6.3	Cartas para Perfis	118
5.6.4	Outras Cartas Univariadas	118
5.6.5	Cartas de Controlo Multivariadas	119
5.7	Políticas Amostrais	120
5.8	Medidas de Desempenho	122
5.9	Medidas de Capacidade do Processo	127
5.10	Intervalos de Previsão e Tolerância	130
6	Testes de Aleatoriedade	135
6.1	Testes de Runs	135
6.1.1	Teste de Runs dos Sinais das Diferenças en- tre as Observações e a Mediana Empírica	135
6.1.2	Teste de Runs dos Sinais das Diferenças en- tre Observações Consecutivas	137
6.2	Quadrados de Diferenças Consecutivas	138
6.3	Regras Empíricas de Aleatoriedade	139
7	Amostragem de Aceitação	141
7.1	Introdução	141
7.2	Planos de Amostragem para Atributos	146
7.2.1	Planos de Amostragem Simples	146
	Curva Característica Operacional, CCO	146
	Construção de planos simples	149
	Rectificação da inspecção	150
7.2.2	Planos Duplos	154
	Curva Característica Operacional, CCO	154
	Dimensão média da amostra, ASN	155
	Censura	156
	Construção de planos duplos	156
	Rectificação da inspecção	157
7.2.3	Planos Múltiplos e Planos Sequenciais	158
7.3	Planos de Amostragem para Variáveis	159

7.3.1	Relação entre os Parâmetros de um Modelo Gaussiano e a Fracção de Não-conformes . .	160
7.3.2	Planos para Variáveis, para Controlar a Fracção de Não-conformes, σ Conhecido . .	161
7.3.3	Planos para Variáveis, para Controlar o Valor Médio do Processo, σ Conhecido	163
7.4	Planos Especiais	164
7.4.1	Amostragem em Cadeia (<i>Chain Sampling</i>) .	164
7.4.2	Amostragem Contínua. Planos CSP-1 . . .	165
7.4.3	Planos de Amostragem Skip-lot	167
7.4.4	Planos de Amostragem para Produtos de Alta Qualidade	167
7.4.5	Planos de Amostragem de Dodge-Romig . .	168
7.5	Erros de Inspeção	168
8	Teoria da Fiabilidade	169
8.1	Conceitos Fundamentais em Fiabilidade	169
8.2	Estatísticas Ordinais em Fiabilidade	170
8.2.1	Tempos de Vida de Estruturas Usuais e Estatísticas Ordinais	171
	Estruturas em série	171
	Estruturas em paralelo	172
	Estruturas <i>i</i> -de- <i>n</i>	173
	Outras estruturas	174
8.2.2	Mecanismos de Censura	179
	Conceito de censura	180
	Exemplo de aplicação	181
8.3	Envelhecimento – Modelos IFR e DFR	183
8.3.1	Funções para Caracterização do Tempo de Vida	184
8.3.2	Noção de Envelhecimento Estocástico . . .	185
	Modelos de vida que não envelhecem	185
	Modelos de vida que envelhecem	185
	Modelos de vida que rejuvenescem	186
	Outros modelos	187

8.4	Modelos Paramétricos	187
8.4.1	Modelo Exponencial	187
	Propriedades da distribuição exponencial com importância em Fiabilidade	187
	Processo de Poisson em Fiabilidade	191
8.4.2	Modelo Weibull	192
8.4.3	Outros Modelos	193
	Modelo Gama	193
	Modelo Normal Truncado	194
	Modelo Lognormal	194
	Modelo Gaussiano Inverso	194
8.4.4	Modelo Exponencial Multivariado	195
8.5	Testes de Vida em Modelo Exponencial	197
8.5.1	Amostra Completa	198
8.5.2	Censura no Número de Componentes (Tipo II)	200
	Amostragem sem reposição (substituição)	200
	Amostragem com reposição (substituição)	202
	Méritos e limitações de cada um dos dois esquemas	203
8.5.3	Censura no Tempo (Tipo I)	204
	Amostragem sem reposição (substituição)	205
	Amostragem com reposição (substituição)	207
9	Metodologia de Taguchi e TQM	209
9.1	Razão Sinal-Ruído (S/R)	212
9.2	Função Prejuízo	214
9.2.1	Função Prejuízo de Taguchi	215
9.2.2	Funções Prejuízo Alternativas	217
9.3	Planos de Taguchi	219
9.3.1	Planeamento com Alteração de um Factor de Cada Vez	220
9.3.2	Planeamento Factorial Completo	221
9.3.3	Planeamentos Factoriais Fraccionados	222
9.3.4	Arranjos Ortogonais	223

9.4	Gestão da Qualidade Total	224
10	Exercícios de Aplicação	229
10.1	Introdução às Cartas de Controlo	229
10.2	Papel de Probabilidade	234
10.3	Estatísticas Ordinais	235
10.4	SPC e Planos de Aceitação	238
10.5	Estruturas e Fiabilidade	270
10.6	Metodologia de Taguchi	280

Capítulo 1

O que é o Controlo da Qualidade?

1.1 Objectivos Fundamentais

O objectivo essencial do *Controlo Estatístico da Qualidade* é atingir uma garantia de *Qualidade* em Organizações de produção e de serviço, através da utilização de técnicas estatísticas convenientes. O termo *Qualidade* é aqui equivalente a *adequabilidade para uso*, ou seja, os produtos devem satisfazer os requisitos daqueles que os vão utilizar.

Como aspectos gerais da *Qualidade* podemos distinguir:

1. *Qualidade do projecto* — existem frequentemente diferentes qualidades de projectos de um mesmo produto (por exemplo, a qualidade do projecto associada à produção de um automóvel *Renault*, de gama baixa, é completamente diferente da qualidade do projecto associada à produção de um automóvel *Renault*, de gama alta).
2. *Qualidade de conformidade* — medida da forma como o produto se porta, relativamente a especificações e tolerâncias requeridas pelo projecto.

2 CAPÍTULO 1. O QUE É O CONTROLO DA QUALIDADE?

É com este último tipo de *Qualidade* que nos iremos preocupar.

Como definir *Qualidade*? *Qualidade* de um bem ou serviço é a sua adequabilidade para ser utilizado. Tal inclui aspectos de planeamento do produto e de conformidade com esse planeamento (ideal).

Características de qualidade são características que, conjuntamente, descrevem a adequabilidade para uso de determinado produto. Essas *características*, que em linguagem probabilística não são mais do que variáveis aleatórias (v.a.'s), podem ser:

- *físicas*, como o comprimento, o peso, a voltagem;
- *sensoriais*, como o sabor, a aparência, a cor;
- *temporalmente orientadas*.

O *Controlo da Qualidade* tem sido uma actividade, essencialmente de engenheiros e gestores (na qual podem e devem também entrar os estatísticos), em que se observam *características de qualidade* de um produto, em que se comparam essas observações com especificações eventualmente pré-determinadas, designadas por *normas de qualidade*, e em que se tomam acções apropriadas, quando existe uma diferença significativa entre o desempenho real e o desempenho *standard* (padrão) esperado.

A *Qualidade* é, cada vez mais, o factor básico de decisão do consumidor em relação a produtos e serviços, e a *Qualidade* é o factor chave que conduz ao sucesso de uma Organização. É neste momento claro que a instalação de um *Controlo Estatístico da Produção* resulta numa redução dos custos de manufactura, num aumento da produtividade, sendo insignificantes os custos de controlo. Veja-se Ryan¹ (2000), Montgomery² (2004), Costa *et al.*³

¹ Ryan, T.P. (2000). *Statistical Methods for Quality Improvement*. Wiley-Interscience.

² Montgomery, D.C. (2004). *Introduction to Statistical Quality Control*, 5th edition. John Wiley and Sons.

³ Costa, A.F., E.K. Epprecht, & L.C. Carpinetti (2008). *Controle Estatístico de Qualidade*, 2ª edição. Editora Atlas.

(2008) e Montgomery⁴ (2008).

1.2 Técnicas Estatísticas Usuais em Qualidade

São extraordinariamente diversificadas as técnicas estatísticas de *Controlo da Qualidade*. Neste livro daremos realce às seguintes áreas:

1. *Controlo Estatístico de Processos* — técnica *on-line* de controlo do processo de produção ou de serviço;
2. *Amostragem de Aceitação* — técnica *off-line* utilizada antes da entrada e após a saída da linha de produção;
3. *Fiabilidade* — técnica *off-line* utilizada posteriormente à saída da linha de produção.

Convém entanto referir que, adicionalmente a estas áreas, existem outras, também úteis na análise de problemas de qualidade e no melhoramento dos processos. Vejamos alguns exemplos:

Numa linha de produção, temos por um lado as *variáveis de entrada* (umas eventualmente *controláveis*, como a pressão e a temperatura, outras *incontroláveis*, como a qualidade do material bruto), temos o *processo de manufactura* e finalmente temos o produto acabado, com *características de qualidade* que podem ser medidas, com maior ou menor facilidade. Uma vez identificada a lista das variáveis de entrada (*input*) que afectam a variável de saída (*output*) é necessário modelar a relação entre as variáveis de *input* e as *características de qualidade* do *output*. De entre as técnicas estatísticas úteis na construção de tais modelos convém mencionar a *Análise de Regressão* e a *Análise de Séries Temporais*.

Experiências Planeadas (*Planeamentos de Taguchi*), i.e., experiências estatísticas em que se variam sistematicamente os factores de *input* controláveis, estudando o efeito que esses factores têm

⁴ Montgomery, D.C. (2008). *Statistical Quality Control: a Modern Introduction*, 6th edition. John Wiley and Sons.

4 CAPÍTULO 1. O QUE É O CONTROLO DA QUALIDADE?

nos parâmetros de *output*, são extraordinariamente úteis na descoberta das variáveis chave, mais influentes nas *características de qualidade* com interesse. O *Planeamento de Experiências* permite obter uma redução de variância nas *características de qualidade*, e permite determinar os níveis das variáveis controláveis que optimizam o funcionamento do processo de produção. O *Planeamento de Experiências* é um dos campos importantes da área de *Controlo da Qualidade off-line* (exterior à linha de produção).

Vejamus qual a evolução típica na utilização de técnicas estatísticas em *Controlo da Qualidade*:

- No nível mais baixo de maturidade, a gestão está, frequentemente, desconhecadora dos problemas da *Qualidade*, e não é natural a existência de qualquer *Controlo da Qualidade* planeado. Existirão quanto muito aplicações modestas de métodos de *Amostragem de Aceitação*.
- Conforme vai aumentando a maturidade, surge a necessidade de intensificar o uso da inspeção de amostragem. Passa-se em seguida ao *Controlo Estatístico do Processo*, com a utilização sistemática de *Cartas de Controlo*, já previamente delineadas por outros.
- Quando o processo estabiliza, e a maturidade aumenta, é então usual desenvolver *Planeamentos de Experiências*, que permitam melhorar e optimizar os processos de controlo e produção.

O objectivo fundamental do *Controlo Estatístico da Qualidade* é sempre o de *redução sistemática da variância das características de qualidade* importantes.

1.3 Breve Introdução Histórica

A *Revolução Industrial*, com a separação nítida entre produtor e consumidor, introduziu a necessidade de os produtores desenvolverem métodos de monitorização e controlo da qualidade dos seus

produtos. De início, o objectivo era o de controlo da qualidade dos produtos através de uma inspecção que permitisse identificar produtos defeituosos, prevenindo a sua venda aos consumidores.

No início do século, esta abordagem de inspecção à qualidade foi alargada com a utilização do *Controlo Estatístico de Processos* (SPC, de *Statistical Process Control*), muitas vezes também denominado SQC, de *Statistical Quality Control*.

O SPC foi inicialmente desenvolvido por Shewhart, em 1924, nos *Bell Laboratories*, e trata-se de um conjunto de técnicas estatísticas de monitorização de um processo de produção, cujo objectivo é determinar se esse processo se encontra estável ao longo do tempo e capaz de produzir produtos de qualidade. A atenção é pois desviada do produto para o processo que é usado para manufactura desse produto. Shewhart desenvolveu em 1924 o conceito de *carta de controlo estatístico*, e no fim dos anos 20, Dodge e Romig, também dos *Bell Laboratories*, desenvolveram a *Amostragem de Aceitação*, como alternativa à inspecção a 100% (veja-se Dodge & Romig⁵, 1959).

De entre os nomes pioneiros em SPC distinguiremos, para além dos já citados, W. Edwards Deming, Joseph M. Juran, Philip B. Crosby e Kaoru Ishikawa (vejam-se outras referências interessantes nos livros de Crosby⁶, 1979, de Deming⁷, 1992, e de Juran & Gryna⁸, 1993). Mas o valor do *Controlo Estatístico da Qualidade* não era de início muito reconhecido na Indústria.

Foi a Segunda Grande Guerra que assistiu ao uso e à aceitação generalizada dos conceitos de *Controlo Estatístico da Qualidade* nas indústrias de manufactura. O SPC foi amplamente utilizado

⁵ Dodge, H.F. & H.G. Romig (1959). *Sampling Inspection Tables, Single and Double Sampling*, 2nd edition. John Wiley and Sons.

⁶ Crosby, P.B. (1979). *Quality is Free*. MacGraw-Hill.

⁷ Deming, W.E. (1992). *Out of the Crisis*. MIT Center for Advanced Engineering Study.

⁸ Juran, J.M. & F.M. Gryna (1993). *Quality Planning and Analysis*. MacGraw-Hill.

6 CAPÍTULO 1. O QUE É O CONTROLO DA QUALIDADE?

na indústria dos EUA durante a II Grande Guerra, e é considerado por muitos observadores como tendo sido primordial para a derrota do Japão. Foi formada, em 1946, a *American Society for Quality Control*, que deu grande impulso à generalização e aperfeiçoamento dos métodos de *Controlo Estatístico da Qualidade*.

No período que seguiu a II Grande Guerra, os produtores dos EUA tiveram grande procura dos seus produtos, e como conseguiam vender tudo o que produziam começaram a dar essencialmente importância à quantidade de produção e não à qualidade do produto. Muitas das lições no âmbito da qualidade do tempo de guerra foram esquecidas pelos produtores, e os consumidores não se importavam com isso, uma vez que existia pleno emprego, os salários eram compensadores, sendo pois possível substituir tudo aquilo que se partisse. Os EUA desenvolveram-se numa sociedade de desperdício ou de consumismo — comprava-se um produto, que muito rapidamente deixava de satisfazer, deitava-se fora, e comprava-se outro.

O Japão do pós-guerra foi confrontado com uma situação inteiramente diferente. Com comida e alojamento escassos e com as suas fábricas em ruína, o Japão avaliou e corrigiu as causas do seu fracasso. A qualidade dos produtos era uma das áreas em que os americanos tinham definitivamente ultrapassado os japoneses, e foi essa uma das primeiras situações que eles tentaram corrigir. Muito rapidamente se tornaram mestres na inspecção e no SQC, tendo prosseguido com a invenção de técnicas próprias de melhoria da qualidade, e tendo atingido por volta de 1970 o comando da *Qualidade*.

Mais recentemente, a atenção dos esforços na qualidade, que se centrava inicialmente em *bens* — produtos manufacturados ou consumidos — tem-se expandido de modo a incluir *serviços* — o desempenho do trabalho desenvolvido em benefício de outros. Esta expansão tem dado grande ênfase aos factores humanos e ao seu impacto na qualidade dos produtos. Os desenvolvimentos em termos da *Qualidade* estão actualmente vocacionados para a mo-

tivação dos trabalhadores. No Japão existem os chamados *círculos de Controlo da Qualidade*, constituídos por aproximadamente 10 trabalhadores e supervisores em cada Departamento, cujo objetivo é o de desenvolver estudos estatísticos que melhorem não só a qualidade, mas também a produtividade, os custos e a segurança, de entre outros aspectos importantes num ambiente de produção. A participação nesses *círculos* é voluntária, sendo de 50% o número de trabalhadores japoneses envolvidos. A organização do *círculo* começa com um programa de treino, em que são dados alguns rudimentos de *Análise e Colecção de Dados*, passa-se depois ao estudo de projectos bem sucedidos efectuados por outros *círculos*, dedicando-se finalmente à formulação e execução de um projecto real para a Empresa, usando eventualmente serviços externos de consultadoria em *Estatística*, se tal for necessário. Tudo isto tem tido uma influência extraordinária na qualidade dos produtos manufacturados. Na realidade, o uso de métodos de *Controlo Estatístico da Qualidade* tem sido frequentemente apontado como elemento chave na expansão da Indústria e Economia japonesas.

Em resumo, a manufactura moderna está perante desafios consideráveis:

- Os clientes têm vindo a aumentar os seus requisitos de qualidade, sendo natural que esta tendência se acentue no futuro, essencialmente devido às grandes pressões competitivas.
- A necessidade de novas técnicas analíticas e estatísticas em *Controlo da Qualidade* está a aumentar rapidamente, com as novas tecnologias.

O grande desafio da *Qualidade* à Indústria é o de melhorar a qualidade dos produtos e serviços, modernizar as práticas de *Controlo da Qualidade* e simultaneamente conseguir reduções substanciais no custo da qualidade. Tratam-se de desafios difíceis. Contudo, os métodos modernos de *Controlo Estatístico da Qualidade*, alguns dos quais serão discutidos a seguir, fornecerão seguramente uma base para a Indústria responder favoravelmente a estes desafios.

8 CAPÍTULO 1. O QUE É O CONTROLO DA QUALIDADE?

O *Controlo Estatístico da Qualidade* é neste momento mais do que um conjunto de instrumentos estatísticos, sendo toda uma maneira de pensar global dos diferentes trabalhadores de uma Empresa, com o objectivo de produzir os produtos correctamente à primeira e reduzir sistematicamente a variância das características de qualidade com interesse para o processo de produção. Só a título ilustrativo repare-se no elogio feito pela NASHUA, ao *Controlo Estatístico da Qualidade*, nas suas caixas de diskettes.

Nashua

Professional
Magnetic Media



The Nashua Quality Story

Quality is a word that's rather easily tossed around today. Every manufacturer of diskettes is quick to promise you the highest quality available.

But, at Nashua, quality has a much tougher definition. It not only means high performance and reliability; it also means *consistency*.

Nashua can promise you quality with unequalled consistency because we manufacture our diskettes using a totally unique philosophy. It's called the "Statistical Control of Quality". And it's the same concept that revolutionized the Japanese economy, replacing a shoddy image with a reputation for product excellence.

Simply put, the idea is this: You can't inspect quality into a product. Inspection can only separate good from bad after the fact.

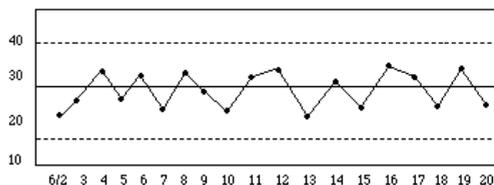
That's not only expensive,

but unreliable as well. The way to obtain consistent quality is to make every product right *in the first place*.

What makes that possible? Nashua's dedication to statistical control, as an integral part of the manufacturing process, makes that possible. Literally hundreds of charts like the one shown here, control the enemy of any manufacturing process --- variation.

These charts visually insure

meets or exceeds system requirements. The result is that our product is the same today, tomorrow, and thereafter. You can trust our diskettes to store and preserve your most important information. And we back that promise with the most straightforward guarantee. Every Nashua diskette carries a limited lifetime guarantee. Should any diskette perform unsatisfactorily while you own it, simply return it to the place of pur-



that each step of the manufacturing process is under statistical control. Finally, every single diskette is certified to make sure it

chase, and we'll replace it free.

1.4 Processos e Qualidade

Como dissemos anteriormente os métodos e a filosofia moderna de garantia da qualidade focam-se não (primariamente) nos *produtos*, mas no *processo* usado para produzir esses produtos. A noção básica é a de que se os processos funcionarem de modo eficiente, então os produtos resultantes serão automaticamente bons. Por outro lado, se só dedicarmos a nossa atenção a inspeccionar ou a retrabalhar os produtos defeituosos, é pouco provável que alguma vez cheguemos ao âmago das causas que provocam os problemas de qualidade, não sendo pois possível fazer as mudanças necessárias para melhorar essa qualidade. Um produto é o resultado de um *processo de produção* — ou simplesmente *processo*, que não é mais do que uma colecção lógica de acções ou operações que produz resultados, o chamado *output* do processo. Um processo tem de ser alimentado com os ingredientes necessários — o *input* do processo. Num processo de manufactura, o *input* inclui as partes ou componentes, e o *output* inclui o produto acabado ou qualquer desperdício associado. Um segundo aspecto importante da moderna filosofia da qualidade é a sua *orientação para o consumidor*. Finalmente, um terceiro aspecto importante é a necessidade de uma *melhoria contínua*.

Em qualquer processo de produção temos essencialmente quatro fases, ou quatro sub-processos:

1. *Análise* – aprendizagem daquilo que os clientes querem, exprimindo *esses desejos* como um conjunto de requisitos do cliente.
2. *Planeamento* – estabelecimento de quais os requisitos do produto, que deverão ir ao encontro dos requisitos exigidos pelo cliente.
3. *Construção* – produção efectiva do produto.
4. *Teste* – fase em que se vê se o produto satisfaz os requisitos com que foi delineado.

Cada um destes quatro sub-processos deve ser conduzido de forma

10CAPÍTULO 1. O QUE É O CONTROLO DA QUALIDADE?

apropriada, de modo a conseguirmos um produto que satisfaz os requisitos dos clientes.

O *Controlo Estatístico da Qualidade* é importante especialmente no quarto passo do processo de produção, onde vamos obter a confirmação de que o produto satisfaz efectivamente os requisitos com que foi projectado. Se tal acontecer, consideramo-lo um *produto de qualidade*.

1.4.1 A Gestão e a Qualidade

O objectivo deste livro é essencialmente o de realçar os *instrumentos estatísticos* que podem ser usados para melhorar a qualidade. Mas esses instrumentos são unicamente uma parte do esforço total necessário para conseguir atingir a *Qualidade*. Como a gestão tem um controlo final de todos os recursos de uma Empresa, a gestão tem também uma responsabilidade última na qualidade de todos os produtos. Para tornar conhecidos os seus pontos de vista sobre a qualidade, a gestão deve estabelecer uma política, em que esclarece qual o compromisso da Empresa relativamente à qualidade, e estabelece as linhas gerais de suporte a essa política, gerindo de forma apropriada o trabalho, os trabalhadores, os processos de trabalho e o ambiente de trabalho. Não nos iremos aqui dedicar a este tópico, e referimos, por exemplo, o livro de Burril & Ledolter⁹ (1999) para o leitor mais interessado no assunto.

1.4.2 ISO 9000 e Qualidade

Durante muitos anos, as mais variadas Organizações lutaram pela *Qualidade*, uma vez que estavam convencidas que tal era uma boa prática de negócio — aumentava a procura dos seus produtos, e reduzia os custos de produção. Mas outras Organizações existiam que não estavam completamente convencidas da descida dos custos, e conseqüentemente as suas iniciativas em prol da qualidade

⁹ Burril, C.W. & J. Ledolter (1999). *Achieving Quality through Continual Improvement*. John Wiley and Sons.

eram modestas. Contudo, hoje em dia, muitas destas Organizações mais relutantes são empurradas para a *Qualidade* devido a uma iniciativa da *Sociedade Internacional de Standardização*, usualmente conhecida por ISO (*International Organization for Standardization*).

A ISO foi fundada em 1946 com o intuito de estabelecer uma série de *normas* internacionais para produtos e processos de produção. São actualmente membros da ISO mais de 90 países, de entre os quais Portugal. Em 1987 a ISO publicou a série ISO 9000 de normas genéricas para a gestão da qualidade e a garantia da qualidade. Estas normas aplicam-se a Empresas de todos os tamanhos e a todos os sectores industriais — bens, serviços e informação. Desde 1987 têm surgido várias extensões das normas ISO 9000 iniciais, tendo surgido em 1996 a ISO 14000 com normas de sistemas de gestão ambiental.

As *normas* ISO 9000 fornecem um guia para os produtores que querem implementar sistemas de qualidade eficientes. Podem também ser usadas pelos consumidores, para avaliar o sistema de qualidade dos produtores. Foi ainda estabelecido um sistema de *registo* para evitar a necessidade de cada consumidor ter de controlar cada produtor. Existe um grupo de registadores, acreditado pela ISO, que fazem a auditoria dos sistemas de qualidade dos produtores, e certificam esses produtores, garantindo assim que eles estão em conformidade com as normas de qualidade da ISO. Um consumidor pode pois exigir esse registo antes de fazer a encomenda a determinado produtor. O registo assegura o consumidor da existência de um sistema de qualidade, aumentando a probabilidade de esse produtor fornecer produtos de qualidade. No passado os produtores eram motivados para o estabelecimento de sistemas de qualidade através do aumento da satisfação dos consumidores. Hoje em dia muitos dos produtores são motivados pela *acreditação* ISO 9000 — se não tiverem essa acreditação podem perder potenciais clientes. Alguns comentários sobre a vantagem de usar este tipo de normas como uma mais valia para as Empre-

12CAPÍTULO 1. O QUE É O CONTROLO DA QUALIDADE?

sas podem ser encontrados em Curkovic & Pagell¹⁰ (1999) e Miles *et al.*¹¹ (1999), por exemplo.

1.4.3 Ciclo de Garantia da Qualidade

Como atingir a Qualidade? Existem essencialmente duas estratégias básicas para atingir *Qualidade*:

1. *Prevenção* — uma das estratégias será prevenir os problemas de má qualidade através de uma boa compreensão dos requisitos dos consumidores, planeando, construindo e documentando processos de produção capazes de produzirem os produtos requeridos, e usando operadores desses processos de produção bem-treinados e altamente motivados, que consistentemente produzirão um trabalho de qualidade. Algumas Empresas fazem bom trabalho em todas estas tarefas, e isso ajuda-as a evitar problemas de qualidade. Contudo, muitas vezes as Empresas não conseguem atingir este ideal, e precisam de utilizar uma segunda estratégia também igualmente importante, a de uma melhoria continuada do processo.
2. *Melhoramento* — os esforços de melhoria da qualidade têm como objectivo fazer com que o processo de produção produza produtos defeituosos com probabilidade cada vez mais pequena. Exemplo de esforços típicos de melhoramento: documentar um processo numa tentativa de o tornar mais consistente; treinar os operadores de modo a melhorarem o seu trabalho; coleccionar e analisar a informação defeituosa, de modo a determinar as causas desses defeitos; fazer alterações ao processo de modo a remover as causas que provocam produtos defeituosos; redesenhar o produto de modo a torná-lo menos dependente de erros.

¹⁰ Curkovic, S. & M. Pagell (1999). A critical examination of the ability of ISO 9000 certification to lead to a competitive advantage. *J. of Quality Management* 4, 51-67.

¹¹ Miles, M., L.S. Munilla & T. McClurg (1999). The impact of ISO 14000 environmental management standards on small and medium sized enterprises. *J. of Quality Management* 4, 111-122.

Vejamos em seguida o chamado *Ciclo de Garantia da Qualidade* (processo-orientado), inspirado em Vardeman & Jobe¹² (1999).

<i>Passos</i>	<i>Instrumentos</i>
1. Proceda a uma análise lógica de como um Processo funciona (ou deveria funcionar) e quais são as potenciais fontes de problemas, fontes de variação, e necessidade de recolha de dados.	<ul style="list-style-type: none"> ● Fluxogramas [1.5.1] ● Diagramas de causa-e-efeito, em espinha-de peixe ou de Ishikawa [1.5.2]
2. Especifique medidas apropriadas (e orientadas para o consumidor) de desempenho do processo e desenvolva os sistemas de medida correspondentes (este tópico não será abordado neste livro).	<ul style="list-style-type: none"> ● Conceitos básicos da área de medição/metrologia ● Estudos de reproducibilidade
3. Coleccione e sumarie os dados.	<ul style="list-style-type: none"> ● Princípios de amostragem [Cap. 7] ● Métodos gráficos simples [Cap. 2]
4. Avalie esses dados e actue no sentido de atingir a estabilidade do processo.	<ul style="list-style-type: none"> ● Modelação de Dados [Cap. 3] ● Estatísticas relevantes [Cap. 4] ● Cartas de Controlo [Cap. 5] ● Testes de aleatoriedade [Cap. 6]
5. Caracterize a actuação do processo e dos produtos.	<ul style="list-style-type: none"> ● Gráficos e tabelas estatísticas para caracterização do processo [Cap. 2] ● Medidas de capacidade e actuação do processo, e estimação dessas medidas [5.9]
6. Trabalhe para melhorar todos os processos que não são satisfatórios.	<ul style="list-style-type: none"> ● Fiabilidade [Cap. 8] ● Planeamento de experiências [Cap. 9]

¹² Vardeman, S. & J.M. Jobe (1999). *Statistical Quality Assurance Methods for Engineers*. John Wiley and Sons.

1.5 Alguns dos Instrumentos de Controlo da Qualidade

Nesta secção iremos referir dois dos instrumentos mais simples de garantia da qualidade, os quais são suficientemente acessíveis de forma a poderem ser abordados logo num capítulo introdutório, e suficientemente potentes de modo a merecerem ampla divulgação. Veremos dois dos chamados *instrumentos japoneses de Controlo da Qualidade*. Estes dois instrumentos são essencialmente usados para a *análise e identificação lógica do processo*.

Em termos da estrutura de um *processo* a simples comparação da questão – *O que é?* – com a questão – *O que deveria ser?* – é suficiente para identificar onde estão as oportunidades efectivas de melhoria. E mesmo que não seja óbvia a forma de como melhorar o processo, um exercício de identificação do processo é de grande valor na localização de potenciais fontes de problemas, possivelmente de fontes importantes de variação do processo, e da necessidade de colecção de dados.

1.5.1 Fluxogramas ou Organigramas

Um dos instrumentos importantes para *identificação do processo* ou para *deteção de problemas* é o *fluxograma* ou *organigrama*, que nos mostra os passos cronológicos de determinada operação.

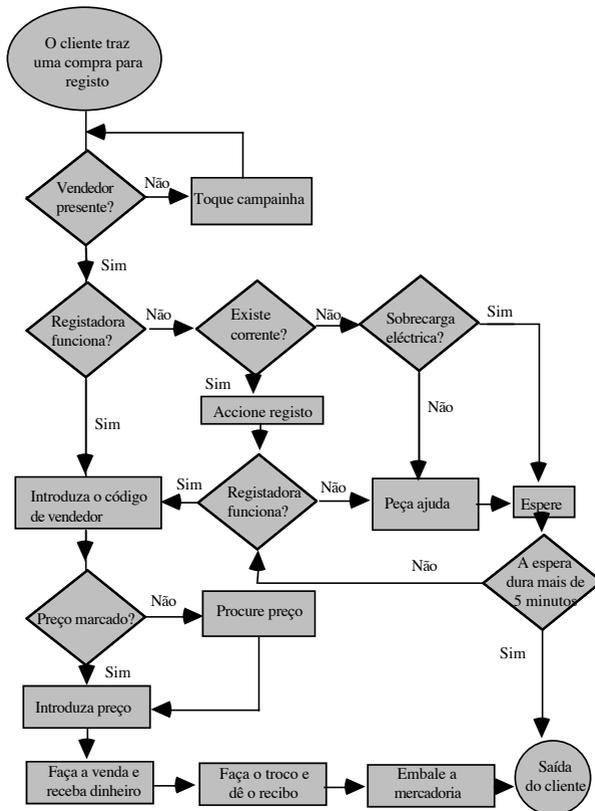
Usualmente utilizam-se apenas três formas distintas para as caixas do fluxograma: pentagonal ou circular (*input/output*), losangular (*decisões*) e rectangular (*tudo o resto*), mas as caixas do fluxograma podem frequentemente ser expandidas, de modo a fornecerem informação mais detalhada, caso tal detalhe seja necessário. Em Kolarik¹³ (1995), páginas 205 a 213, é sugerido o uso de sete formas diferentes para as caixas dos fluxogramas de processos industriais, para *operações, transporte, atrasos, armazenagem, inspecção na fonte, cartas de SPC e inspecção de amostragem*.

¹³ Kolarik, W.J. (1995). *Creating Quality: Concepts, Systems, Strategies and Tools*. McGraw-Hill.

1.5. INSTRUMENTOS DE CONTROLO DA QUALIDADE 15

Um outro conselho frequentemente sugerido de modo a enaltecer o valor analítico de um fluxograma é o de proceder a uma boa utilização de ambas as dimensões espaciais do fluxograma. Devem ser colocadas de cima para baixo as actividades ordenadas no tempo, o que deixa a possibilidade de usar a orientação esquerda-direita para indicar qualquer outra variável importante. Muito frequentemente, o fluxograma é fragmentado em várias zonas verticais, que indicam localizações diferentes para actividades diversas.

Apresenta-se em seguida o fluxograma associado a uma venda a dinheiro, adaptado de J.A. Swift¹⁴ (1995).



¹⁴ Swift, J.A. (1995). *Introduction to Modern Statistical Quality Control and Management*. St. Lucie Press.

Este fluxograma revela-nos de imediato um problema importante, as perdas graves (com eventual abandono de clientes) ocasionadas por uma caixa registadora não-operacional.

1.5.2 Diagramas de Causa-e-efeito

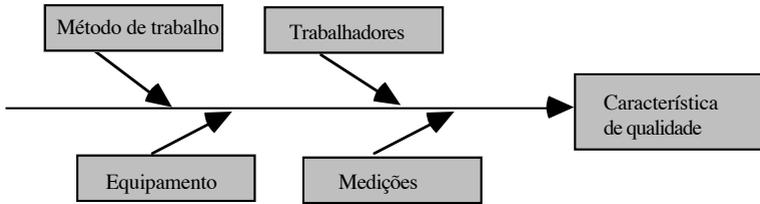
Um segundo instrumento simples e muito popular na *detecção de causas possíveis de problemas* é o *diagrama de Ishikawa*¹⁵ (muito frequentemente conhecido por *diagrama em espinha-de-peixe* ou por *diagrama de causa-e-efeito*).

Admitamos que se pretende um determinado objectivo, ou (reciprocamente) que se tem em mente um certo problema de qualidade e que se deseja esquematizar todos os possíveis factores que levam a esse objectivo ou a esse problema. É então útil organizar o nosso pensamento relativamente a esses factores, colocando-os numa estrutura em árvore, em que à medida que caminhamos ao longo da árvore, mais e mais específicos se vão tornando os factores em jogo.

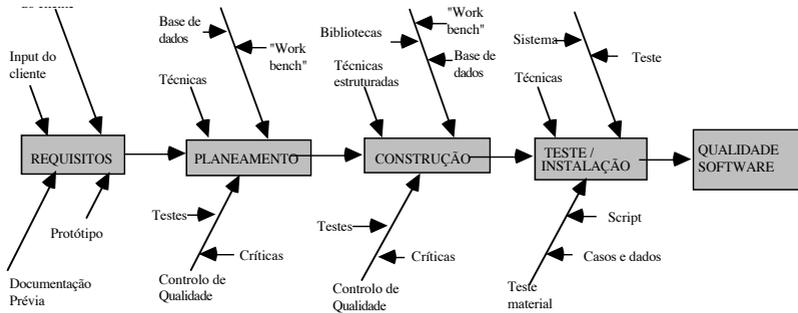
Para se construir um *diagrama de causa-e-efeito* devem primeiro encontrar-se as possíveis causas de um efeito, classificando-as num determinando número de categorias (de 4 a 8), e cada categoria em sub-categorias, caso tal seja apropriado. Trace-se então uma seta horizontal apontando para uma caixa colocada na extremidade direita, etiquetada com o nome do efeito em estudo. A partir de cada categoria, escrita acima ou abaixo da seta horizontal, trace-se uma seta apontando para essa seta horizontal, de modo que fiquemos com algo semelhante a uma espinha-de-peixe. Tracem-se ainda setas horizontais dirigidas para as diferentes espinhas, representando as sub-categorias associadas a cada uma das categorias. Este processo pode ser repetido indefinidamente, sendo usualmente suficiente dois a três níveis de classificação. Na figura seguinte apresentamos um diagrama de causa-e-efeito genérico.

¹⁵ Ishikawa, K. (1982). *Guide to Quality Control*, 2nd edition. Asia Productivity Organization.

1.5. INSTRUMENTOS DE CONTROLO DA QUALIDADE 17



O diagrama seguinte está associado à análise de *qualidade de um software*, e foi retirado do livro de Ledolter & Burrill¹⁶ (1999).



¹⁶ Ledolter, J. & C.W. Burrill (1999). *Statistical Quality Control — Strategies and Tools for Continual Improvement*. John Wiley and Sons.

18CAPÍTULO 1. O QUE É O CONTROLO DA QUALIDADE?

Capítulo 2

Análise Descritiva e Exploratória de Dados

Na área de *Controlo da Qualidade*, uma *característica de qualidade*, já atrás definida, é em linguagem probabilística uma variável aleatória (v.a.) X , com distribuição eventualmente desconhecida.

A *característica de qualidade* X pode pois ser identificada através da sua *função de distribuição* (f.d.), $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, ou através da sua *função densidade de probabilidade* (f.d.p.), $f(x) = dF(x)/dx$, no caso absolutamente contínuo, e da sua *função massa de probabilidade* (f.m.p.), $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$, no caso discreto ou qualitativo.

Antes de passarmos ao estudo exploratório de uma amostra observada, (x_1, x_2, \dots, x_n) , dessa característica de qualidade, referiremos alguns conceitos fundamentais relacionados com a v.a. X , bem como as notações que iremos utilizar.

- *Valor médio de X* :

$$\mu := \mathbb{E}(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt & (\text{v.a. contínua}) \\ \sum_x x \mathbb{P}(X = x) & (\text{v.a. discreta}). \end{cases} \quad (2.1)$$

- *Quantil de ordem p de X , v.a. com f.d. F , $0 < p < 1$:*

$$\chi_p := F^{-1}(p), \quad F^{-1}(y) := \inf\{x : F(x) \geq y\}. \quad (2.2)$$

- *Mediana de X :*

$$\chi_{1/2} := F^{-1}(1/2), \quad (2.3)$$

um caso particular de χ_p , em (2.2), para $p = 1/2$.

- *Moda de X :*

$$\mu_o := \arg \sup_x \{f(x)\}. \quad (2.4)$$

- *Momento de ordem k :*

$$\mu'_k := \mathbb{E}(X^k), \quad k \geq 1,$$

com $\mu'_1 = \mu$ definido em (2.1).

- *Momento centrado de ordem k :*

$$\mu_k := \mathbb{E}((X - \mu'_1)^k), \quad k \geq 1, \quad (2.5)$$

sendo $\mu_1 = 0$.

- *Variância de X :*

$$\sigma^2 := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mu_2, \quad (2.6)$$

com μ_2 definido em (2.5).

- *Desvio padrão de X :*

$$\sigma := \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mu_2}. \quad (2.7)$$

- *Coefficiente de variação de X :*

$$\gamma := (\sigma/\mu) \times 100\%,$$

com μ e σ definidos em (2.1) e (2.7), respectivamente.

- *Coefficiente de assimetria:*

$$\beta_1 := \mu_3/\mu_2^{3/2} \quad \text{ou} \quad \beta'_1 := \mu_3^2/\mu_2^3, \quad (2.8)$$

com μ_k , $k = 2, 3$, definido em (2.5).

- *Coefficiente de achatamento ou kurtosis:*

$$\beta_2 := \mu_4/\mu_2^2 - 3 \quad \text{ou} \quad \beta'_2 := \mu_4/\mu_2^2. \quad (2.9)$$

O *valor médio*, em (2.1), e a *mediana populacional*, em (2.3), são as medidas de *localização* mais frequentemente utilizadas, que nos indicam a zona central de variação da característica de qualidade em estudo. A *variância*, em (2.6), e o *desvio padrão*, em (2.7), dão-nos indicação sobre a *dispersão* dessa característica relativamente a um valor central. Em contrapartida, os coeficientes de *assimetria* e de *achatamento* dão-nos indicação sobre a *forma* do modelo F . O coeficiente de assimetria β_1 , em (2.8), é nulo se o modelo for simétrico. O coeficiente de *achatamento*, β_2 , em (2.9), é nulo em modelo Normal, o modelo clássico em Estatística, e sem dúvida de grande importância em SPC, quando em âmbito de produção. Um estudo do modelo Normal, juntamente com outros modelos contínuos e discretos usuais em aplicações à *Qualidade*, ficará adiado para o Capítulo 3. Modelos unimodais com $\beta_1 > 0$ têm *assimetria positiva* ou *à direita* ($\mu_o < \chi_{1/2} < \mu$), enquanto modelos com $\beta_1 < 0$ têm *assimetria negativa* ou *à esquerda* ($\mu < \chi_{1/2} < \mu_o$), sendo μ_o a *moda*, em (2.4). Os modelos com achatamento $\beta_2 > 0$ têm *caudas mais longas* do que o modelo Normal e modelos com $\beta_2 < 0$ são modelos de *caudas leves*.

2.1 Dados Qualitativos

Em *Controlo Estatístico da Qualidade* é frequente a recolha de dados qualitativos, isto é, dados de natureza não-numérica, classificados em diversas modalidades ou categorias. Como organizar

e resumir esses dados de modo a torná-los compreensíveis e com significado? Neste capítulo iremos brevemente referir alguns dos métodos usuais em *Qualidade* na descrição de dados qualitativos — tratam-se de gráficos, cartas e tabelas que de forma rápida permitem resumir a informação contida nos dados. A ilustração será feita com base na amostra de dados resultantes da classificação das causas de avarias em determinada linha de produção. Admitamos que as referidas causas de avaria — as chamadas *classes* ou *categorias* — são seis:

1. falta de experiência na monitorização;
2. falta de experiência na gestão;
3. experiências não-equilibradas;
4. incompetência;
5. outras causas (tais como negligência e fraude);
6. razões desconhecidas.

2.1.1 Tabelas de Frequências

Os dados qualitativos recolhidos no exemplo atrás referido são de natureza não-numérica, mas podem ser resumidos numericamente, quer calculando o número de observações em cada uma das classes (ou categorias), a chamada *frequência absoluta da classe*, ou a proporção de observações em cada uma das classes, a chamada *frequência relativa da classe*. Essas frequências absolutas e relativas das classes são então dispostas em tabelas, as chamadas *tabelas de frequência*.

A variável de interesse neste caso é a *causa subjacente* a uma avaria. Trata-se de uma variável qualitativa, e os seus valores podem ser classificados em uma de seis classes. As medições individuais para cada uma das 1463 falhas estão resumidas na tabela seguinte, onde se pode ver as frequências absoluta e relativa de cada classe. Note-se que a soma das frequências absolutas é igual ao número total de avarias, sendo unitária a soma das frequências relativas.

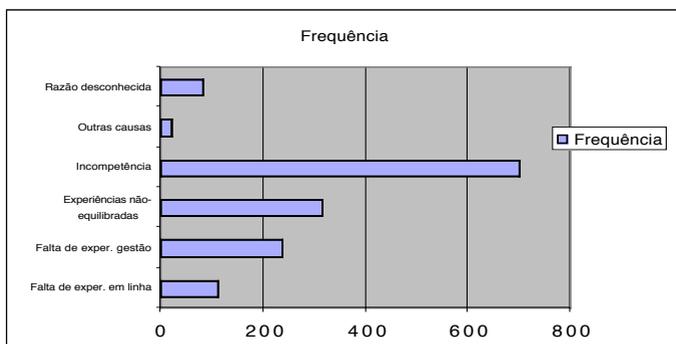
<i>Categoria</i> (causa subjacente)	<i>Frequência absoluta</i> (número de avarias)	<i>Frequência relativa</i> (proporção de avarias)
Falta de experiência em linha	111	0.076
Falta de experiência da gestão	236	0.161
Experiências não-equilibradas	314	0.215
Incompetência	698	0.477
Outras causas	21	0.014
Razão desconhecida	83	0.057
<i>Totais</i>	1463	1.000

Note-se ainda que a causa mais frequente de avaria é a *incompetência* — quase metade das avarias (47.7%) foram devidas a esta causa.

As tabelas de frequências, tal como a apresentada, resumem numericamente os valores de uma variável qualitativa.

2.1.2 Gráficos de Barras

Embora as frequências (relativas) das classes descrevam de forma adequada todo o tipo de dados qualitativos, a representação gráfica desses dados é de leitura e assimilação bem mais fácil. Um dos métodos gráficos mais usuais para a descrição de dados qualitativos é o *gráfico de barras*. Na figura seguinte mostramos um gráfico de barras, associado aos dados da tabela anterior.



Um gráfico de barras é constituído por um rectângulo, ou *barra*, para cada uma das possíveis causas de avaria, e a altura (ou comprimento) de cada uma dessas barras é proporcional à frequência de avarias da classe correspondente.

Em *Controlo da Qualidade* usam-se gráficos de barras quer verticais, quer horizontais.

Passos associados à construção de um gráfico de barras:

1. Sumarize os dados numa tabela de frequências. Essa tabela deve conter a frequência e a frequência relativa para cada classe (ou categoria) da variável qualitativa.
2. Trace, em papel gráfico, um eixo horizontal e outro vertical. No eixo vertical representem-se, por exemplo, as frequências ou frequências relativas. As classes (ou categorias) da variável qualitativa deverão então ser marcadas no eixo horizontal.
3. Trace barras para cada classe (ou categoria). A altura da barra deve ser proporcional à frequência da classe ou à frequência relativa da classe.

Note-se que os gráficos de barras, tais como o representado na figura anterior, podem ter um significado mais completo se reordenarmos descendentemente as barras do gráfico, tal como faremos na secção seguinte.

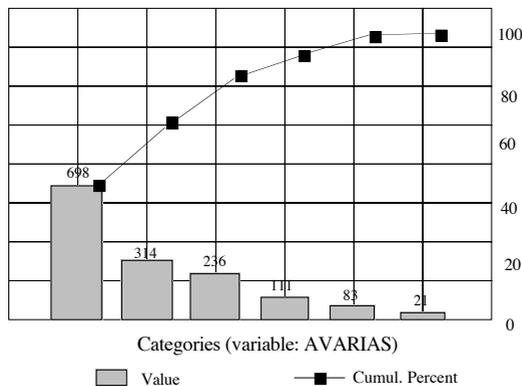
2.1.3 Diagramas de Pareto

No exemplo apresentado na secção anterior a ordenação das categorias é obviamente arbitrária, mas em aplicações no âmbito da *Qualidade* faz sentido ordenar as causas por ordem *decrecente* de frequências de ocorrência, começando com a causa mais comum, e terminando na menos comum. A tabela de frequências neste caso particular é dada por:

Causa subjacente	Frequência	Frequência relativa	Proporção cumulativa
Incompetência	698	0.477	0.477
Experiências não-equilibradas	314	0.215	0.692
Falta de experiência da gestão	236	0.161	0.853
Falta de experiência em linha	111	0.076	0.929
Razão desconhecida	83	0.057	0.986
Outras causas	21	0.014	1.000
Totais	1463	1.000	

Um *diagrama de Pareto* é um gráfico de barras, usualmente verticais, em que as barras são colocadas da esquerda para a direita por ordem *decrecente* de altura. Os *gráficos de Pareto* são instrumentos gráficos muito populares em *Controlo da Qualidade*. Nestes gráficos as alturas das barras representam muito frequentemente as frequências dos problemas existentes num processo de produção (como por exemplo, número de defeituosos, de acidentes, de falhas, de avarias, ...). Uma vez que as barras são colocadas em ordem descendente de altura, é então fácil identificar as áreas com problemas mais severos.

A figura seguinte é um *diagrama de Pareto* para os dados da tabela anterior. Para além das barras ordenadas decendentemente, a figura mostra também um gráfico da *proporção cumulativa* de falhas (designada por *linha cum*). Este tipo de diagramas é um outro dos *instrumentos japoneses de qualidade*.



O objectivo essencial de um diagrama de Pareto é pois o de *estabelecer prioridades* entre as diferentes causas de problemas possíveis.

2.2 Dados Quantitativos

Uma *análise preliminar de dados* quantitativos em *Controlo da Qualidade* é também essencialmente gráfica. Iremos brevemente

ver alguns métodos de análise gráfica preliminar de dados, numa perspectiva de identificação da população subjacente.

As amostras em *Controlo da Qualidade* são frequentemente univariadas. Face a uma amostra x_1, x_2, \dots, x_n , quantitativa, deve começar-se pelo cálculo de características amostrais importantes, que nos vão eventualmente ajudar na escolha da amplitude das classes do *histograma*, a estudar na Secção 2.2.5, imagem estatística da f.d.p. da população subjacente à amostra, e também um *instrumento de garantia da qualidade*.

Iremos aqui essencialmente trabalhar, a título meramente exemplificativo, com um conjunto de diâmetros exteriores de segmentos de determinado tipo de automóvel, agrupados em 25 amostras de dimensão 5, e apresentados na tabela seguinte.

Nº da amostra	<i>diam1</i>	<i>diam2</i>	<i>diam3</i>	<i>diam4</i>	<i>diam5</i>
1	74.030	74.002	74.019	73.992	74.008
2	73.995	73.992	74.001	74.011	74.004
3	73.988	74.024	74.021	74.005	74.002
4	74.002	73.996	73.993	74.015	74.009
5	73.992	74.007	74.015	73.989	74.014
6	74.009	73.994	73.997	73.985	73.993
7	73.995	74.006	73.994	74.000	74.005
8	73.985	74.003	73.993	74.015	73.988
9	74.008	73.995	74.009	74.005	74.004
10	73.998	74.000	73.990	74.007	73.995
11	73.994	73.998	73.994	73.995	73.990
12	74.004	74.000	74.007	74.000	73.996
13	73.983	74.002	73.998	73.997	74.012
14	74.006	73.967	73.994	74.000	73.984
15	74.012	74.014	73.998	73.999	74.007
16	74.000	73.984	74.005	73.998	73.996
17	73.994	74.012	73.986	74.005	74.007
18	74.006	74.010	74.018	74.003	74.000
19	73.984	74.002	74.003	74.005	73.997
20	74.000	74.010	74.013	74.020	74.003
21	73.988	74.001	74.009	74.005	73.996
22	74.004	73.999	73.990	74.006	74.009
23	74.010	73.989	73.990	74.009	74.014
24	74.015	74.008	73.993	74.000	74.010
25	73.982	73.984	73.995	74.017	74.013

2.2.1 Estatísticas Descritivas

É obviamente verdade que, na descrição de um conjunto de dados quantitativos, um *gráfico vale por mil palavras*, mas muito frequentemente os gráficos não conseguem descrever completamente os dados, tornando-se necessário condensar numericamente a informação contida na nossa amostra.

Ao fazer uma análise preliminar de dados, univariados ou multivariados é usual começar por uma análise descritiva desses dados, com o cálculo de algumas *características amostrais* (ou *estatísticas descritivas*) importantes. Iremos aqui essencialmente distinguir três tipos de características amostrais:

1. *medidas de localização central*, que permitem localizar o *centro* de um conjunto de dados;
2. *medidas de dispersão* ou *escala*, que descrevem a variabilidade desses dados;
3. *medidas de forma*, que sugerem a forma do modelo subjacente aos dados.

Antes de proceder a qualquer cálculo de características amostrais é usual proceder à ordenação das observações, uma vez que ela tem de ser feita mais cedo ou mais tarde. Passa-se então da amostra (x_1, x_2, \dots, x_n) para a amostra ordenada,

$$(x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{n:n}), \quad (2.10)$$

onde, para $1 \leq i \leq n$, $x_{i:n}$ denota a i -ésima *estatística ordinal* ascendente associada à amostra original, cujo estudo será brevemente abordado no Capítulo 4, podendo-se em seguida calcular os *momentos empíricos de ordem k* (usualmente até à ordem 4), *não-centrais* e *centrais*, ou seja

$$m'_k := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{j:n}^k \quad (2.11)$$

e

$$m_k := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - m'_1)^k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{j:n} - m'_1)^k, \quad (2.12)$$

respectivamente.

Medidas de localização

As medidas de tendência central mais usuais são a *média amostral* (ou *média*), coincidente com m'_1 , definido em (2.11),

$$\bar{x} \equiv m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad (2.13)$$

e a *mediana amostral*, um valor tal que metade das observações da amostra estão acima dele e a outra metade abaixo. Em termos das observações ordenadas, em (2.10), temos pois para *mediana empírica* ou *amostral*,

$$Q_{1/2} := \begin{cases} x_{(n+1)/2:n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (x_{n/2:n} + x_{(n/2+1):n})/2 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Uma terceira medida de tendência central é a *moda* — observação que ocorre com maior frequência na nossa amostra. Se não tivermos acesso a todas as observações, mas simplesmente à informação condensada dada pelas frequências de classes disjuntas, podemos falar da *classe modal*, a classe a que está associada a maior frequência. Para localizar a moda dentro desta classe recorre-se usualmente à fórmula de *King*,

$$m_o = l + \frac{f^{**}}{f^* + f^{**}} \times h,$$

onde l denota o limite inferior da classe modal, h a amplitude da classe modal, f^* e f^{**} as frequências corrigidas da classe anterior e da classe posterior à modal (i.e. as frequências divididas pela amplitude das respectivas classes), respectivamente.

Ao tomarmos a decisão sobre qual a medida de tendência central a adoptar devemos ter em conta o seguinte:

- a média amostral é *pouco robusta* relativamente à existência de valores discrepantes na amostra, usualmente valores muito pequenos ou muito elevados, podendo-se tornar uma medida de tendência central enganadora em alguns casos;
- em contrapartida, a mediana é usualmente considerada uma medida de localização central *resistente*, porque, contrariamente à média amostral, é resistente à influência de observações extremas. Para conjuntos de dados extraordinariamente assimétricos, a mediana será um melhor representante do centro da distribuição subjacente aos dados.

Medidas de dispersão ou escala

As três medidas de dispersão mais usuais são a *amplitude*,

$$r_n := x_{n:n} - x_{1:n},$$

a *variância empírica*,

$$s^2 = s_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

com \bar{x} definida em (2.13), e o *desvio padrão empírico*,

$$s = s_n := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} \equiv \sqrt{s_n^2}. \quad (2.15)$$

No caso de pretendermos comparar a dispersão de duas distribuições com medidas de localização muito afastadas ou associadas a variáveis medidas em unidades diferentes, temos de recorrer a uma medida de dispersão relativa, sendo a mais usada, o *coeficiente de variação*,

$$CV = (s / \bar{x}) \times 100\%,$$

com \bar{x} e s definidos em (2.13) e (2.15), respectivamente.

O desvio padrão e a média vão-nos dar uma indicação útil sobre a região onde deverão estar os dados, muito usual para estabelecer diferentes *limites de controlo* e *vigilância* (ou *aviso*) em *Controlo Estatístico de Processos*, do tipo $\bar{x} \pm ks$, tal como veremos na secção seguinte, e mais adiante no Capítulo 5, inteiramente dedicado ao SPC.

Medidas de forma

As *medidas de forma* mais usuais são o *coeficiente de assimetria empírico*,

$$b_1 := m_3/m_2^{3/2} \quad \text{ou} \quad b'_1 := m_3^2/m_2^3, \quad (2.16)$$

e o *coeficiente de achatamento empírico*,

$$b_2 := m_4/m_2^2 - 3 \quad \text{ou} \quad b'_2 := m_4/m_2^2, \quad (2.17)$$

com m_2 , m_3 e m_4 definidos em (2.12). Como os nomes indicam, os coeficientes, em (2.16) e (2.17), fornecem informação sobre a possível assimetria do modelo subjacente aos dados e sobre o peso balanceado das duas pontas (direita e esquerda) desse modelo, respectivamente.

Qualquer uma das características amostrais referidas é de cálculo elementar, podendo uma implementação pessoal ser substituída pela utilização de qualquer *package* estatístico.

Vejamos ainda algumas estatísticas descritivas adicionais. Em muitas situações necessitamos descrever a *posição relativa* de uma observação particular num conjunto de dados quantitativos. Às medidas descritivas que localizam a posição relativa de uma observação, em relação às outras observações de um conjunto de dados, chamamos *medidas de posição relativa*. As medidas de posição relativa mais usuais são:

- *Percentil* $100 \times p\%$ ou *quantil empírico de ordem* p , Q_p , $0 < p < 1$ — um número tal que $100 \times p\%$ das observações

estão abaixo do quantil Q_p e $100 \times (1 - p)\%$ das observações estão acima desse quantil. Usualmente, tem-se, com r inteiro e $0 < \epsilon < 1$,

$$Q_p := \begin{cases} x_{r:n} & \text{se } 1 + (n - 1)p =: r \\ (1 - \epsilon)x_{r:n} + \epsilon x_{r+1:n} & \text{se } 1 + (n - 1)p =: r + \epsilon. \end{cases}$$

De entre os quantis importantes temos os *quartis inferior, médio e superior*, associados a $p = 1/4$, $p = 1/2$ e $p = 3/4$, respectivamente. O *quartil médio* é geralmente designado por *mediana*, e foi definido em (2.14).

- *Score-z* de uma observação x é o valor

$$z := z(x) = (x - \bar{x})/s,$$

e mede pois o número de desvios padrões que esse valor x está acima ($z > 0$) ou abaixo ($z < 0$) da média amostral.

As principais características amostrais dos dados em *diam1* (primeira medição em cada amostra) são apresentadas no quadro seguinte:

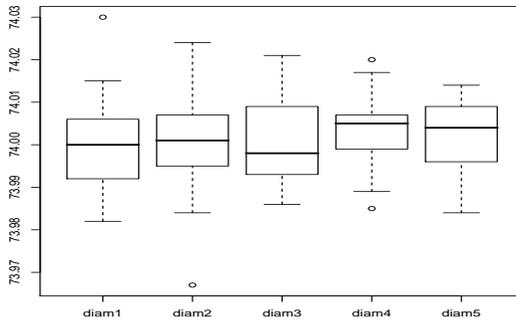
$Q_{1\%}$ 73.9822	$Q_{5\%}$ 73.9832	$Q_{10\%}$ 73.9844	$Q_{90\%}$ 74.0112	$Q_{95\%}$ 74.0144	$Q_{99\%}$ 74.0264
$x_{1:n}$ 73.9820	$Q_{25\%}$ 73.9920	$Q_{50\%}$ 74.0000	\bar{x} 73.9994	$Q_{75\%}$ 74.0060	$x_{n:n}$ 74.0300
	s 0.0115	s^2 0.0001	b_1 0.5054	b_2 0.2011	

2.2.2 Caixas-de-bigodes

Na comparação de dados é comum a utilização exploratória de *caixas-de-bigodes* (para detalhe veja-se Hoaglin *et al.*¹, 1992). Se,

¹ Hoaglin, D.C., F. Mosteller & J.W. Tukey (1992). *Análise Exploratória de Dados. Técnicas Robustas — Um Guia* (Tradução de Dinis Pestana). Coleção Novas Tecnologias, Edições Salamandra.

por exemplo, relativamente ao conjunto de dados em estudo, pretendermos comparar os dados recolhidos, *diam1* a *diam5*, podemos usar as referidas *caixas-de-bigodes*.



Este gráfico permite-nos detectar a posição relativa das diferentes amostras, e o tipo de distribuição dos dados.

2.2.3 Diagramas de Pontos

Os *diagramas de pontos*, também considerados *instrumentos japoneses de garantia da qualidade*, utilizam-se essencialmente para amostras de dados quantitativos de dimensão reduzida. Para a construção de um gráfico de pontos começamos por traçar uma escala horizontal, que cobre o intervalo de variação dos dados, $V := [x_{1:n}, x_{n:n}]$. Os valores numéricos das observações são então representados por pontos sobre o valor apropriado da escala horizontal. Caso haja repetições de um mesmo valor, os pontos serão representados uns em cima dos outros (tantos quantas as repetições de um mesmo valor).

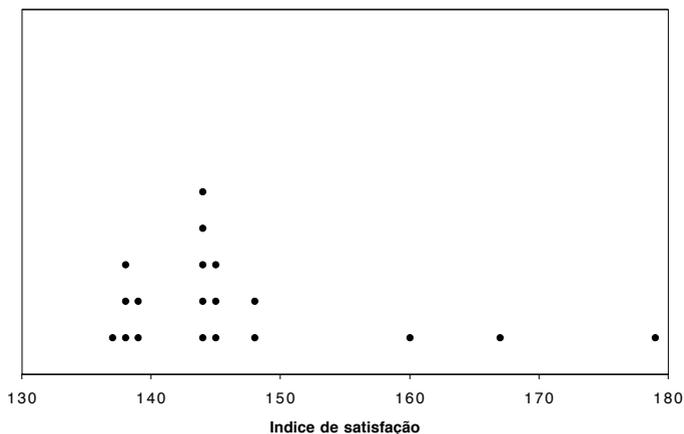
Para amostras de dimensão reduzida, o gráfico de pontos fornece-nos um método rápido e simples de visualizar a distribuição dos dados ao longo da escala horizontal.

Na tabela seguinte apresentamos dados relacionados com o *índice de satisfação de clientes* (em 1992, e nos EUA) relativamente aos

19 automóveis mais cotados. Esse índice foi calculado com base nas respostas a questionários preenchidos pelos condutores, um ano após terem comprado os seus carros.

Automóvel (Marca)	Estrangeiro (E) ou Nacional (N)	Índice de satisfação
Lexus (Toyota)	E	179
Infiniti (Nissan)	E	167
Saturn (GM)	N	160
Honda (2 modelos)	E	148
Mercedes Benz (3 modelos)	E	145
Toyota (4 modelos)	E	144
Cadillac (GM)	N	144
Audi (VW)+FIAT	E	139
Honda Civic+Rover+Lancia	E	138
Jaguar (Ford)	E	137

Temos o seguinte gráfico de pontos para representar os dados:



Uma percentagem elevada do índice de satisfação dos clientes encontra-se entre 137 e 148, com três valores discrepantes, 160, 167 e 179.

2.2.4 Diagramas de Caule-e-folhas

Um diagrama de *caule-e-folhas*, recomendado por Tukey² (1977), é outro dos gráficos populares em *Controlo da Qualidade*, na descrição de conjuntos de dados quantitativos.

Para construir um diagrama de caule-e-folhas temos primeiro de quebrar cada uma das medições num *caule* e numa *folha*. Um ou mais dos dígitos constituirão o caule, e os restantes dígitos constituirão a folha. Como os caules irão representar as classes do gráfico é conveniente que o caule seja escolhido de modo a termos um número razoável de classes.

Consideremos os dados associados ao *índice de satisfação de clientes*, apresentados na tabela anterior. A escolha do caule mais adequada parece então ser a de dois dígitos, restando-nos um dígito para a folha. O diagrama de caule-e-folhas associado a estes dados teria então o aspecto.

13	7	8	8	8	9	9				
14	4	4	4	4	4	5	5	5	8	8
15										
16	0	7								
17	9									

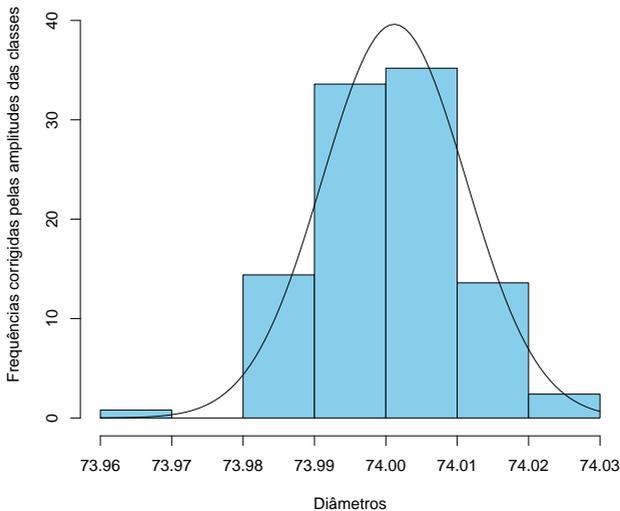
Significa tal que num gráfico de *caule-e-folhas* todas os possíveis caules são listados numa coluna de forma ascendente, começando no mais pequeno, 13 (correspondente à observação 137) e terminando no maior, 17 (que corresponde à observação 179). O passo final consiste em colocar a folha de cada medição na linha do gráfico correspondente ao caule dessa medição. Essas folhas serão opcionalmente ordenadas ascendentemente.

² Tukey, J. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Addison-Wesley.

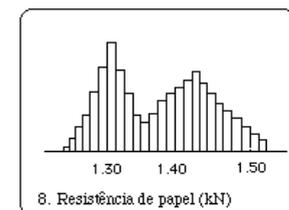
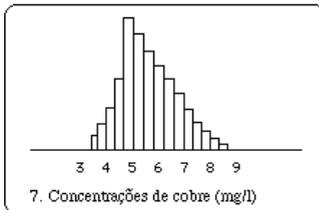
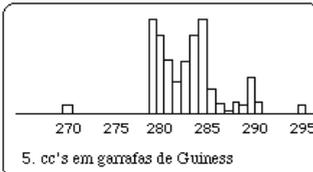
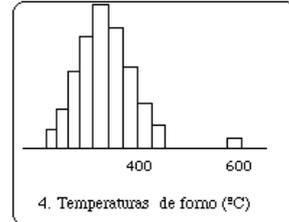
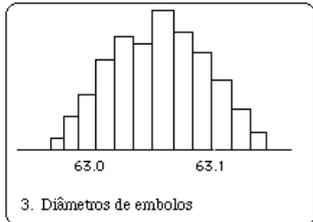
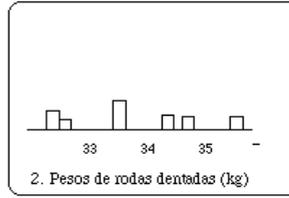
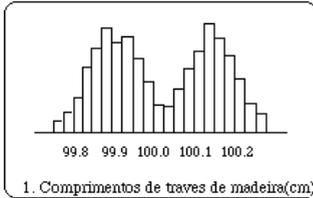
2.2.5 Histogramas

O *histograma*, gráfico de barras verticais, imagem estatística da f.d.p. de uma variável quantitativa contínua, tem como objectivo mostrar a forma da distribuição subjacente a um conjunto de dados quantitativos. Contrariamente aos *gráficos de pontos* e *diagramas de caule-e-folhas*, os *histogramas* são essencialmente adequados para amostras de dimensão elevada. Para a construção do histograma é necessário escolher um número adequado k de classes e a *amplitude dos intervalos classe* a que irão pertencer os dados, notando-se que os intervalos considerados devem formar uma cobertura do intervalo de variação, $V = [x_{1:n}, x_{n:n}]$.

A representação que se segue mostra um histograma dos 125 dados em *diam1–diam5*, agrupados em 7 classes, juntamente com uma curva (f.d.p.) normal ajustada a este conjunto de dados.



Tipos de histogramas frequentes em Controlo da Qualidade e identificação das mensagens associadas a estes histogramas.

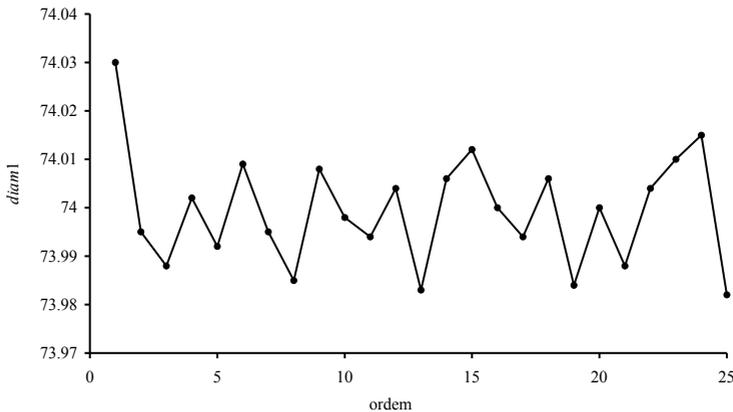


Associe a cada um dos histogramas, a descrição (de A a J) conveniente:

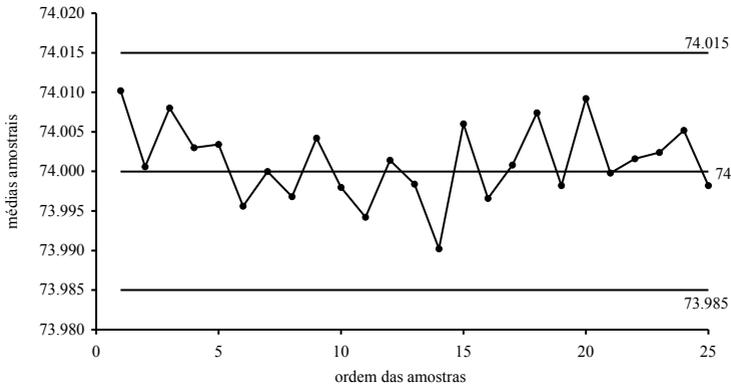
- | | |
|---|--|
| <p>A. Produção mista - 2 fluxos diferindo em média e variabilidade.</p> <p>B. Agrupamento incorrecto / Dados insuficientes.</p> <p>C. Operador / Inspector embriagado.</p> <p>D. Preferência digital do inspector.</p> <p>E. Erro de medida / Erro de cópia.</p> | <p>F. Variabilidade Normal simétrica.</p> <p>G. Produção mista - 2 fluxos diferindo em média.</p> <p>H. Medições com distribuição assimétrica.</p> <p>I. Aparelho encravado.</p> |
|---|--|

2.2.6 Cartas de Controlo — Gráficos Sequenciais

Estes são sem dúvida os gráficos mais frequentes em *Controlo da Qualidade*, e estão associados a dados colecionados sequencialmente ao longo do tempo. Tratam-se de gráficos bi-dimensionais em que na escala horizontal se marca o tempo ou a ordem das amostras, sendo marcada na escala vertical uma quantidade numérica de interesse (uma medida de qualidade ou qualquer outra variável associada ao processo em estudo). Os pontos marcados são então usualmente ligados por segmentos de recta. A figura que se segue ilustra um gráfico deste tipo, com os registos de *diam1* indexados por uma variável *ordem*.



Em seguida apresenta-se uma carta de controlo, mais precisamente, uma carta de médias 3-sigma, a estudar no Capítulo 5, para um processo em que as normas para o valor médio e para o desvio padrão são 74 e 0.01, respectivamente, e as amostras recolhidas ao longo do tempo têm dimensão $n = 5$. Os limites de controlo desta carta estão associados às linhas horizontais que passam em $73.985 = 74 - 3 \times 0.01/\sqrt{5}$ e $74.015 = 74 + 3 \times 0.01/\sqrt{5}$, e a linha central da carta corresponde à linha horizontal que passa na norma para o valor médio do processo.



As cartas de controlo são o mais importante dos instrumentos de garantia da qualidade.

2.2.7 Método Gráfico de Selecção de Modelos — Papel de Probabilidade

Como método gráfico de selecção de modelos é usual utilizar em *Controlo da Qualidade* a técnica do *papel de probabilidade* que, com modificações convenientes, pode ser usada para dados contínuos ou discretos, completos ou censurados. A técnica tem sido usada nas mais variadas formas, desde que Hazen³ (1914) (veja-se também Hazen⁴, 1930) sugeriu o princípio de linearização da f.d. Normal, num estudo de cheias, mas a sua principal aplicação tem sido na *obtenção de uma confirmação visual rápida do ajustamento de determinado modelo probabilístico, sugerido por exemplo pelo histograma, a dados (x_1, x_2, \dots, x_n) , permitindo ainda a estimação grosseira de parâmetros.*

O *papel de probabilidade* é frequentemente usado quando os dados, (x_1, x_2, \dots, x_n) , podem ser considerados observações independen-

³ Hazen, A. (1914). Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal water supply. *Trans. Amer. Soc. Civil Engrs.* **77**, 1539-1659.

⁴ Hazen, A. (1930). *Flood Flows. A Study of Frequencies and Magnitudes.* Wiley.

tes de uma v.a. X com f.d. do tipo $F((x - \lambda)/\delta)$, λ e δ parâmetros de localização e escala, respectivamente.

Admitindo que $F^{-1}(\cdot)$ existe, e escrevendo

$$p_i = F((x_{i:n} - \lambda)/\delta), \quad 1 \leq i \leq n,$$

tem-se

$$x_{i:n} = \lambda + \delta F^{-1}(p_i) \iff F^{-1}(p_i) = \frac{x_{i:n} - \lambda}{\delta}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

i.e., existe uma relação linear entre $x_{i:n}$ e $y_i = F^{-1}(p_i)$, devendo p_i ser estimativa plausível de $F((x_{i:n} - \lambda)/\delta)$.

Uma escolha possível para os p_i (as chamadas *plotting positions* ou *posições de marcação*), $1 \leq i \leq n$, é a dada por Weibull⁵ (1939),

$$p_i = i/(n + 1),$$

uma vez que em modelo F absolutamente contínuo se tem

$$\mathbb{E} \left(F \left(\frac{X_{i:n} - \lambda}{\delta} \right) \right) = \frac{i}{n + 1}.$$

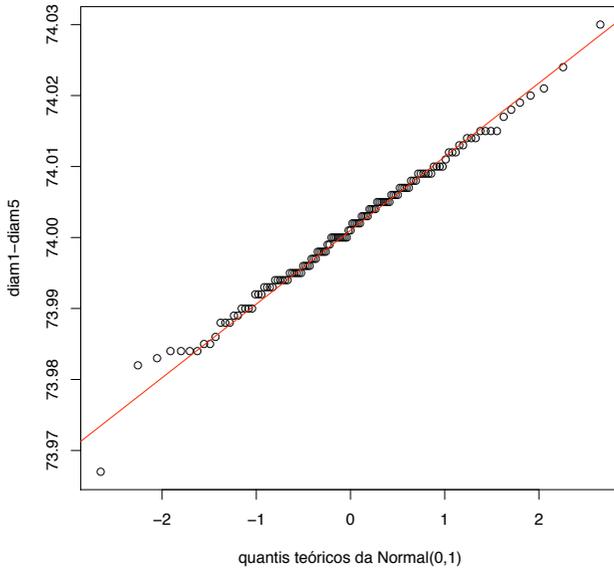
Para outras possíveis escolhas de *plotting positions* em papel de probabilidade veja-se, por exemplo, Barnett⁶ (1975).

Se o gráfico resultante mostrar que existe uma relação linear entre $x_{i:n}$ e $y_i = F^{-1}(i/(n + 1))$ temos uma validação informal da forma da distribuição $F(\cdot)$, postulada. A intersecção com o eixo das abcissas e a inclinação da recta fornecem-nos então estimativas grosseiras de λ e δ .

Para os dados *diam1-diam5* que temos estado a analisar obtemos o seguinte gráfico em papel de probabilidade Normal,

⁵ Weibull, W. (1939). The phenomenon of rupture in solids. *Ing. Vetenskaps. Aka. Handl.* (Stockholm) **153**, 17.

⁶ Barnett, V. (1975). Probability plotting methods and order statistics. *Applied Statistics* **24**, 95-108.

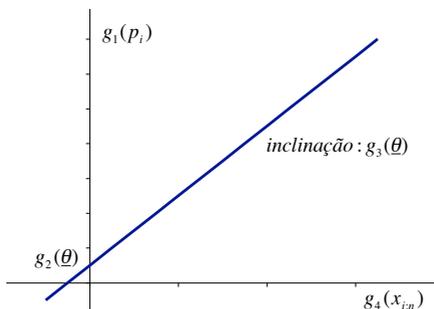


que sugere a normalidade dos dados. A estimação dos parâmetros pode então ser feita através do módulo de regressão de qualquer *package* estatístico.

Mais geralmente, o *papel de probabilidade* usa-se quando $F(x_{i:n}; \underline{\theta})$, com $x_{i:n}$ a i -ésima estatística ordinal ascendente associada à amostra (x_1, x_2, \dots, x_n) e $\underline{\theta}$ vector de parâmetros desconhecidos, puder ser transformada numa relação linear,

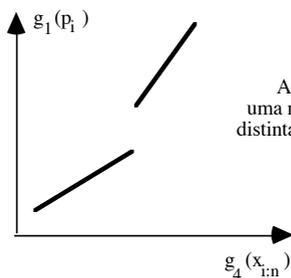
$$g_1(F(x_{i:n}, \underline{\theta})) = g_2(\underline{\theta}) + g_3(\underline{\theta})g_4(x_{i:n}),$$

onde $F(x_{i:n}; \underline{\theta})$, desconhecido, é substituído por uma sua estimativa plausível, por exemplo $p_i = i/(n+1)$, $1 \leq i \leq n$, para $F(\cdot)$ absolutamente contínua. Este é, por exemplo, o caso do modelo Lognormal, a estudar adiante no Capítulo 3, uma vez que uma v.a. X é Lognormal *standard* se e só se $Y = \ln X$ for Normal(0,1). Os gráficos serão do tipo:

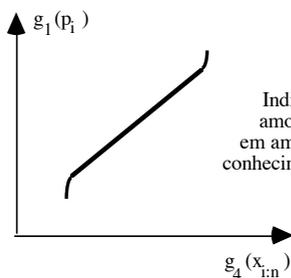


Quando o gráfico em papel de probabilidade é nitidamente não linear, resultando conseqüentemente a rejeição do modelo postulado, $F(\cdot)$, podemos obter informação adicional a partir do gráfico (para mais detalhes veja-se Bury⁷, 1975).

Vejam algumas mensagens rápidas fornecidas por gráficos em papel de probabilidade:

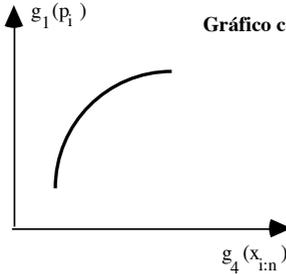


A população subjacente é uma mistura de duas populações distintas (neste caso, com a mesma forma distribucional)



Indica a possibilidade de a amostra ter sido censurada em ambas as pontas, sem nosso conhecimento. Pode ainda significar modelo truncado.

⁷ Bury, K.V. (1975). *Statistical Models in Applied Science*. Wiley.

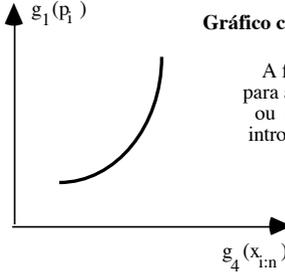
**Gráfico convexo:**

1. A f.d. subjacente é mais assimétrica para a direita do que a f.d. postulada (dados lognormais marcados, por ex. em papel de probabilidades Normal).

ou

2. Não se especificou no modelo um parâmetro de localização não nulo; situações deste tipo ocorrem, por ex. quando postulamos um modelo Weibull

com localização zero, quando se deveria ter considerado uma localização diferente — a marcação de $(x_{i:n} - x_{n:n})$ vs p_i poderia eventualmente fornecer uma relação "mais" linear.

**Gráfico concavo:**

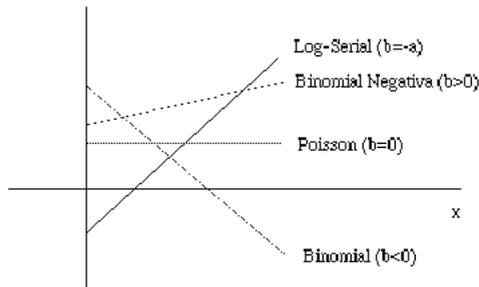
A f.d. subjacente é mais assimétrica para a esquerda do que a f.d. postulada, ou estamos perante a necessidade de introduzir um parâmetro de localização, limite inferior do suporte.

Os modelos discretos de mais frequente utilização em *Controlo da Qualidade* são o Binomial e o de Poisson, a estudar no Capítulo 3, por entre outros modelos discretos. O processo gráfico mais simples, que permite a identificação desses modelos é devido a Ord⁸ (1967), e é essencialmente apropriado para grandes amostras.

Algoritmo

1. Calcule-se $U_x = xp_x/p_{x-1}$, com $p_x = n_x/n$,
 $n_x = \#\{x_i's = x, 1 \leq i \leq n\}$;
2. Represente-se graficamente (x, U_x) , para $n_{x-1} > 5$;
3. Se estes pontos mostrarem uma relação linear $U_x = a + bx$, um dos modelos anteriores pode ser seleccionado, a partir do seguinte gráfico teórico:

⁸ Ord, J.K. (1967). Graphical methods for a class of discrete distributions. *J. Royal Statistical Soc.* **A130**, 233-238.



Estimativas gráficas de parâmetros podem ser facilmente obtidas por ajustamento de rectas aos pontos.

2.3 Algumas Regras para a Descrição de Dados Quantitativos

Nesta secção iremos dar duas regras de descrição de um conjunto de dados quantitativos muito usuais no *controlo de processos*: uma das regras é conhecida por *regra empírica* e a outra por *regra de Chebycheff*.

Estas regras usam a média e o desvio padrão amostrais para determinar um intervalo a que deve pertencer uma determinada percentagem de observações. Tais intervalos amostrais tomam a forma

$$\bar{x} \pm k s,$$

onde k é uma constante positiva (usualmente 1, 2 ou 3).

Regra empírica. Para uma distribuição de dados unimodal e não demasiado enviesada temos a seguinte proporção de observações associada a cada um dos *intervalos de tolerância* mais usuais em *Controlo da Qualidade*:

AMOSTRA	PROPORÇÃO
$\bar{x} \pm s$	Cerca de 70%
$\bar{x} \pm 2s$	Cerca de 95%
$\bar{x} \pm 3s$	Cerca de 100%

As percentagens apresentadas podem diferir caso a distribuição subjacente seja altamente assimétrica.

Será que esta regra empírica pode ser aplicada a conjuntos de dados provenientes de modelos eventualmente assimétricos, ou mesmo com forma desconhecida? A resposta a esta pergunta é negativa. No entanto, em tais situações, podemos aplicar uma regra mais conservativa, decorrente do *teorema de Chebycheff* (veja-se, por exemplo, Pestana & Velosa⁹, 2008), que nos garante essencialmente o seguinte:

Regra de Chebycheff. Para um conjunto de dados quantitativos arbitrário, aplique-se a seguinte regra para estimar as proporções de observações em intervalos centrados na média:

AMOSTRA	PROPORÇÃO
$\bar{x} \pm 2s$	Pelo menos 75%
$\bar{x} \pm 3s$	Pelo menos 89%
$\bar{x} \pm ks, \quad k > 1$	Pelo menos $(1 - 1/k^2) \times 100\%$

2.4 Alguns Comentários sobre Análise Gráfica de Dados

William S. Cleveland (veja-se Cleveland¹⁰, 1993) escreve:

Visualization is critical to data analysis. It provides a front line of attack, revealing intricate structure in data that cannot be absorbed in any other way. We discover unimagined effects, and we challenge imagined ones.

Na realidade os métodos gráficos são úteis em todos os passos da análise estatística de dados, e a única limitação ao desenvolvimento e uso de gráficos reside na criatividade do analista de dados.

⁹ Pestana, D.D. & S. Velosa (2008). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, 3ª edição. Fundação Calouste Gulbenkian.

¹⁰ Cleveland, W.S. (1993). *Visualizing Data*. Hobart Press.

Os métodos gráficos não devem evidentemente substituir análises estatísticas mais sofisticadas, mas devem sempre coexistir pacificamente com essas metodologias. Na realidade não há dúvida que *um gráfico vale mil palavras*.

Existem inúmeras variações das representações gráficas aqui referidas, todas elas com interesse numa área como a de *Controlo da Qualidade*, existindo muitas técnicas gráficas que nem sequer mencionamos. Para um leitor mais interessado, recomenda-se para além dos livros de Tukey (1977) e de Cleveland (1993), já atrás referidos, os livros de Chambers *et al.*¹¹ (1983), de Tufte¹² (1983), de Tufte¹³ (1990) e de Cleveland¹⁴ (1994).

¹¹ Chambers, J.M., W.S. Cleveland, B. Kleiner & P.A. Tukey (1983). *Graphical Methods for Data Analysis*. Wadsworth.

¹² Tufte, E.R. (1983). *The Visual Display of Quantitative Information*. Graphics Press.

¹³ Tufte, E.R. (1990). *Envisioning Information*. Graphics Press.

¹⁴ Cleveland, W.S. (1994). *The Elements of Graphing Data*. Hobart Press.

Capítulo 3

Modelação de Dados em Controlo da Qualidade

Um dos campos da *Estatística* importante em toda a *Análise de Dados* e também importante em *Controlo Estatístico da Qualidade* é o da *modelação de dados estatísticos* — campo do raciocínio estatístico onde procuramos seleccionar modelos de probabilidade apropriados, a serem usados como estrutura subjacente ao conjunto de dados observados.

A modelação de dados é essencial para aplicação de grande parte das técnicas estatísticas inferenciais, e em *Controlo da Qualidade* é particularmente importante em SPC e em *Fiabilidade*.

Uma primeira necessidade com que somos então confrontados é a de um conhecimento racional e adequado das funções de distribuição univariadas mais usualmente utilizadas em ciências aplicadas (Johnson *et al.*¹, 1994, Johnson *et al.*², 1995, e Johnson *et al.*³, 2005).

¹ Johnson, N. L., S. Kotz & N. Balakrishnan (1994). *Continuous Univariate Distributions*, Vol. 1, 2nd edition, John Wiley and Sons.

² Johnson, N. L., S. Kotz & N. Balakrishnan (1995). *Continuous Univariate Distributions*, Vol. 2, 2nd edition, John Wiley and Sons.

³ Johnson, N. L., A.W. Kemp & S. Kotz (2005). *Univariate Discrete Distributions*, 3rd edition, John Wiley and Sons.

A análise de dados tem obviamente de entrar em linha de conta com a forma desses dados. Admitiremos aqui que estamos a trabalhar com *dados completos* e só mais adiante introduziremos o conceito de *dados censuradas*, muito usuais em *Fiabilidade*.

3.1 Modelos Contínuos Univariados

3.1.1 Modelo Normal

A f.d.p. Normal(μ, σ) depende de dois parâmetros desconhecidos, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, e tem uma forma funcional dada por

$$f(x; \mu, \sigma) \equiv \varphi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

As principais características populacionais de um modelo Normal são

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) = \text{Mediana}(X) = \text{Moda}(X) &= \mu, \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2, \\ \beta_1 &= 0, \quad \beta_2 = 0. \end{aligned}$$

Considerando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ em (3.1), obtemos a chamada Normal reduzida ou *standard*.

Em aplicações clássicas, a distribuição Normal é o modelo estatístico mais utilizado. As principais razões por que é recomendada são as seguintes:

- Obtêm-se com facilidade estimativas óptimas dos parâmetros — as estimativas de máxima verosimilhança de μ e de σ são $\hat{\mu} = \bar{x}$ e $\hat{\sigma}^2 = s^2(n-1)/n$, respectivamente, com \bar{x} a média amostral definida em (2.13) e s desvio padrão empírico definido em (2.15).
- Estão-lhe associados vários modelos exactos de amostragem (qui-quadrado, t -de-Student, F), o que torna simples toda a inferência estatística associada.

No entanto, a maior parte das populações são nitidamente assimétricas, e trabalhamos frequentemente com dados não negativos. Consequentemente o modelo Normal deve ser usado com algum cuidado. *Devem-se deixar os dados (ou considerações teóricas) falar por eles próprios.*

Situações em que é possível postular um modelo Normal:

1. Aplicações do *Teorema Limite Central* — existem causas que provocam a característica mensurável que estamos a analisar, e essas causas podem ser consideradas independentes umas das outras, com segundos momentos finitos, são aditivas na formação da característica de que obtivemos medições, e são em número elevado.
2. A *parte central* de modelos não-normais é por vezes razoavelmente bem aproximada por uma distribuição Normal. Consequentemente, se as conclusões da nossa análise estatística dizem respeito a essa parte central, a aproximação Normal pode ser adequada.

Modelo Normal Truncado

A f.d.p. associada a este modelo é, para $(\mu, \sigma) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$,

$$f_{[A,B]}(x; \mu, \sigma) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\int_A^B e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt}, \quad x \in [A, B], \quad (3.2)$$

onde, com $\Phi(\cdot)$ a f.d. de uma Normal(0,1),

- A — ponto de truncatura inferior;
- B — ponto de truncatura superior;
- $\Phi((A - \mu)/\sigma)$ — grau de truncatura à esquerda;
- $1 - \Phi((B - \mu)/\sigma)$ — grau de truncatura à direita.

Modelo Semi-Normal

A Semi-Normal(μ, σ) é uma Normal truncada, com f.d.p. em (3.2), $A = \mu$, $B = +\infty$. Consequentemente, a Semi-Normal coincide com $\mu + \sigma|Y|$, onde Y é Normal(0,1).

3.1.2 Modelo Logístico

Trata-se de um modelo também simétrico, tal como o modelo Normal, com uma f.d.p. associada dada por

$$f(x; \lambda, \delta) = \frac{1}{\delta} \frac{e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}}}{\left(1 + e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}^+). \quad (3.3)$$

As principais características populacionais de um modelo Logístico(λ, δ) são

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \text{Mediana}(X) = \text{Moda}(X) = \lambda, \\ \text{Var}(X) &= (\delta\pi)^2 / 3, \\ \beta_1 &= 0, \quad \beta_2 = 1.2. \end{aligned}$$

O facto de o coeficiente de assimetria β_1 ser nulo e o coeficiente de achatamento β_2 ser superior a 0 leva-nos pois à conclusão que o modelo Logístico é um modelo simétrico, com pontas mais longas que a Normal.

A função de distribuição Logística tem uma expressão analítica simples, dada por

$$F(x; \lambda, \delta) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}^+).$$

As aplicações do modelo Logístico têm-se revelado particularmente relevantes em *Demografia*, no âmbito de curvas de crescimento, e em *Economia*, como modelo substituto da Normal, quando há necessidade de caudas levemente mais pesadas.

3.1.3 Modelo Lognormal

A f.d.p. Lognormal depende de três parâmetros desconhecidos, $\theta \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, e está directamente relacionada com a Normal: X é uma v.a. Lognormal se e só se existem parâmetros θ , μ reais e σ real positivo tais que $Y = (\log(X - \theta) - \mu)/\sigma$ é uma v.a.

Normal(0,1). A forma funcional de uma f.d.p. Lognormal(μ, σ, θ) é pois

$$f(x; \mu, \sigma, \theta) = \frac{1}{\sigma(x - \theta)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-\theta)-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x > \theta$$

$$(\mu, \theta \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+). \quad (3.4)$$

Note-se que o parâmetro θ é aqui o parâmetro de localização, pois $X - \theta$ tem distribuição independente de θ ; o parâmetro de escala passou a ser e^μ , uma vez que $(X - \theta)/e^\mu$ tem distribuição independente de θ e de μ , sendo σ um parâmetro de forma.

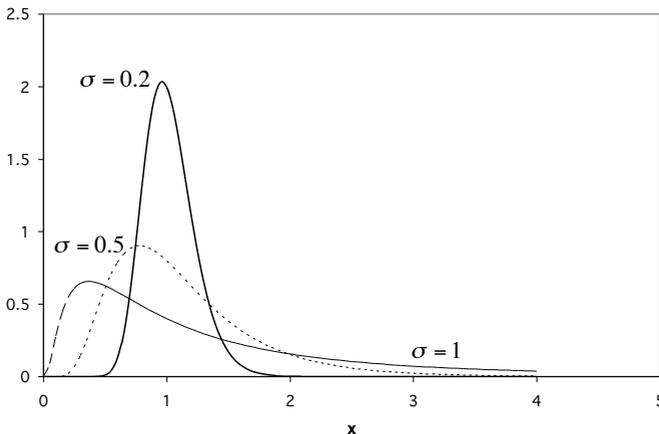
As principais características populacionais de um modelo Lognormal(μ, σ), a notação usada quando $\theta = 0$, são

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \sigma^2/2},$$

$$\text{Var}(X) = w(w - 1) e^{2\mu}, \quad w = e^{\sigma^2},$$

$$\beta_1 = (w + 2)\sqrt{w - 1}, \quad \beta_2 = w^4 + 2w^3 + 3w^2 - 6 > 0.$$

Se representarmos graficamente a densidade Lognormal reduzida ($\theta = 0, \mu = 0$) obtemos representações do seguinte tipo:



Alguns comentários adicionais:

1. Note-se a assimetria positiva do modelo e a capacidade de o modelo se aproximar do modelo Normal, quando $\sigma \rightarrow 0$.
2. As principais aplicações do modelo Lognormal são a problemas de distribuição de partículas em agregados naturais, tempos de duração de consultas num médico, em aplicações geológicas várias, e em estudos de tempos de vida, juntamente com a Weibull (de mínimos) e a Gama.
3. Características como peso, altura e densidade são muito frequentemente melhor representadas pela Lognormal do que pela Normal.
4. O modelo Lognormal pode por vezes ser postulado com base em considerações teóricas *a priori* relacionadas com a vertente multiplicativa do Teorema Limite Central: a característica mensurável em estudo resulta do efeito *multiplicativo* de causas independentes e em grande número.

3.1.4 Modelo Gama

A f.d.p. associada ao modelo $\text{Gama}(\lambda, \delta, \alpha)$ é

$$f(x; \lambda, \delta, \alpha) = \frac{(x - \lambda)^{\alpha-1}}{\delta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}}, \quad x > \lambda \quad (\alpha > 0), \quad (3.5)$$

onde

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (3.6)$$

é a clássica *função gama* completa. O modelo *standard*, denotado $\text{Gama}(\alpha)$ e associado à v.a. $Y = (X - \lambda)/\delta$, tem f.d.p.

$$f_Y(y) = \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-y}, \quad y \geq 0,$$

e as principais características populacionais da variável *standardizada* são então

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}\text{ar}(Y) = \alpha,$$

$$\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \quad \beta_2 = \frac{6}{\alpha} > 0.$$

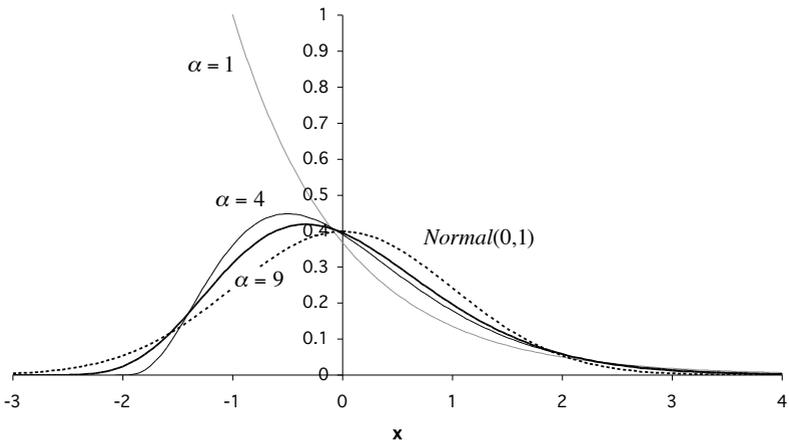
Tem-se

1. Moda = $\alpha - 1$ se $\alpha \geq 1$.
2. Se $\alpha < 1$, $f_Y(y) \rightarrow +\infty$, quando $y \rightarrow 0$.
3. Se $\alpha = 1$, $f_Y(y) \rightarrow 1$, quando $y \rightarrow 0$.

A f.d.p. Gama possui, juntamente com a Lognormal, a habilidade de se confundir com a Normal, i.e.

$$\mathbb{P}\left(\frac{\frac{X-\lambda}{\delta} - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \leq u\right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \Phi(u),$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a f.d. de uma Normal *standard*. Atentemos na seguinte ilustração deste mimetismo, obtida por representação da f.d.p. de $((X - \lambda)/\delta - \alpha) / \sqrt{\alpha}$, para valores de $\alpha = 1, 4, 9$.



Casos particulares:

- Exponencial(λ, δ): $\alpha = 1$;
- Erlang(n): $\lambda = 0, \delta = 1, \alpha \equiv n$ inteiro;
- Qui-Quadrado com ν graus de liberdade $\equiv \chi_{\nu}^2$: $\lambda = 0, \delta = 2, \alpha = \nu/2$.

Aplicações: As funções de distribuição Gama têm sido muito usadas para fazer ajustamentos realísticos a distribuições de tipo exponencial e na representação de tempos de vida. Além disso, a soma de exponenciais é uma Gama, e conseqüentemente, a distribuição Gama aparece, por exemplo, em problemas de contagem de partículas (tempo de espera para a chegada da n -ésima partícula).

Distribuição Gama Generalizada

Trata-se de um modelo associado a uma variável aleatória Z em que existe $c > 0$ tal que $X := ((Z - \lambda)/\delta)^c$ é uma v.a. Gama *standard*, i.e.

$$f_z(z; \lambda, \delta, \alpha, c) = \frac{c(z - \lambda)^{c\alpha - 1}}{\delta^{c\alpha} \Gamma(\alpha)} \exp \left\{ - \left(\frac{z - \lambda}{\delta} \right)^c \right\}, \quad z \geq \lambda.$$

Casos particulares:

- Weibull(λ, δ, c): $\alpha = 1$;
- Semi-Normal(μ, σ): $\alpha = 1/2, c = 2, \lambda = \mu, \delta = \sigma\sqrt{2}$;
- Gama(λ, δ, α): $c = 1$.

3.1.5 Modelo Beta

Trata-se de um modelo de grande maleabilidade, com uma f.d.p. dependente de dois parâmetros de forma, $p, q > 0$, dada por

$$f(x; a, b, p, q) = \frac{(x - a)^{p-1} (b - x)^{q-1}}{B(p, q) (b - a)^{p+q-1}}, \quad a \leq x \leq b, \quad (3.7)$$

onde

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

é a função Beta completa. A v.a. *standard*, denotada $\text{Beta}(p, q)$, i.e., $Y = (X - a)/(b - a)$, tem uma f.d.p. dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{B(p, q)} y^{p-1}(1-y)^{q-1}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

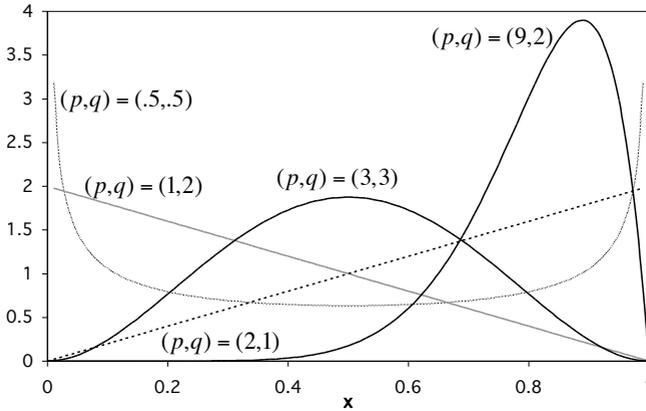
As principais características populacionais da variável *standardizada* são

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= p/(p+q), \\ \text{Var}(Y) &= pq(p+q)^{-2} (p+q+1)^{-1}, \\ \beta_1 &= 2(q-p) \sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}} (p+q-2)^{-1}, \\ \beta_2 &= \frac{3(p+q-1) \{2(p+q)^2 + pq(p+q-6)\}}{pq(p+q+2)(p+q+3)} - 3. \end{aligned}$$

Tem-se

1. Se tivermos $p > 1$ e $q > 1$, existe uma única moda em $x = (p-1)/(p+q-2)$.
2. Caso se tenha $p < 1$ e $q < 1$, existe uma anti-moda em $x = (p-1)/(p+q-2)$.
3. Se $(p-1)(q-1) \leq 0$, a f.d.p. é *J-shaped*.
4. Se $p = q$, a f.d.p. é simétrica em torno de $x = 0.5$.

A distribuição $\text{Beta}(p, q)$ é das mais frequentemente usadas para ajustamento de dados, devido à sua grande maleabilidade, como se pode ver na figura seguinte.



3.1.6 Modelo Gaussiano Inverso

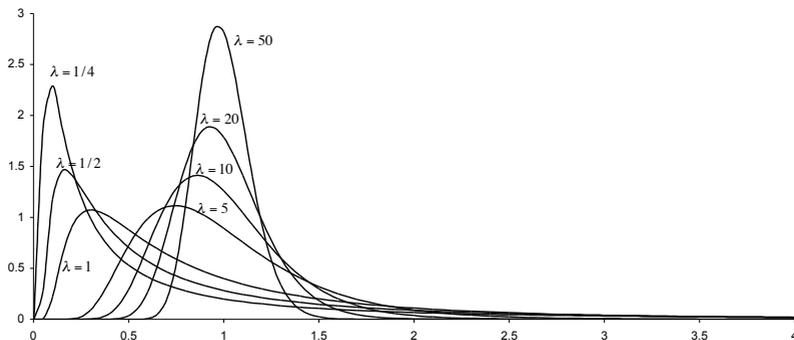
A f.d.p. associada ao modelo Gaussiano Inverso, $GI(\lambda, \mu)$, é dada por

$$f(x; \lambda, \mu) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda(x - \mu)^2}{2\mu^2 x}\right\}, \quad x > 0 \quad (\lambda > 0, \mu > 0), \quad (3.8)$$

sendo a função distribuição dada por

$$F(x; \lambda, \mu) = \Phi\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right\} + e^{2\lambda/\mu} \Phi\left\{-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right\},$$

para $x > 0$, onde Φ denota a função distribuição da Normal reduzida. Trata-se de um modelo adequado para caracterizar dados positivos com assimetria à direita, como sugere a representação gráfica da f.d.p. que a seguir se apresenta, para $\mu = 1$ e vários valores de λ .



As principais características populacionais desta variável são

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \text{Var}(Y) = \frac{\mu^3}{\lambda},$$

$$\beta_1 = 3 \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{1/2}, \quad \beta_2 = 15 \left(\frac{\mu}{\lambda} \right).$$

Esta distribuição surgiu no contexto de modelar o instante em que um processo de Wiener ultrapassa pela primeira vez um determinado valor limite, e também para caracterizar a distribuição limite para a dimensão da amostra em certos testes sequenciais de razão de probabilidades.

Esta distribuição pode ser usada como modelo alternativo ao modelo Gama devido à sua maleabilidade e simplicidade em termos de cálculo, com a vantagem de os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros terem expressões explícitas, com distribuição conhecida. Por outro lado pode ser usada como modelo alternativo aos modelos Weibull e Lognormal em problemas de *Fiabilidade*, devido às suas propriedades assintóticas, e em particular, ao comportamento da função taxa de falha, a definir mais adiante, no Capítulo 8. Note-se que o tempo até à falha de um equipamento, por exemplo, é muitas vezes modelado pela distribuição Exponencial, a qual apresenta uma taxa de falha constante. No entanto, em algumas aplicações interessa considerar uma taxa de falha monótona, crescente ou decrescente, pelo que se recorre à

distribuição Weibull, mas noutras interessa ter uma taxa de falha não monótona, crescente no início e depois decrescente, pelo que se recorre à distribuição Lognormal. No entanto a distribuição Lognormal apresenta uma taxa de falha assintótica nula, o que é ilógico em muitas situações, podendo então usar-se como alternativa a distribuição Gaussiana Inversa, que também tem uma taxa de falha inicialmente crescente e depois decrescente, mas que apresenta uma taxa de falha assintótica não nula.

3.1.7 Modelos Extremais

Os modelos extremais têm como base um resultado probabilístico assintótico, relativo ao comportamento limite da sucessão de máximos

$$M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i,$$

ou da sucessão de mínimos,

$$m_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i,$$

e análogo ao *Teorema Limite Central* para a sucessão de somas

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

As possíveis distribuições limites para M_n , linearmente normalizado, são, para $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, do tipo

$$G_\xi(x; \lambda, \delta) = e^{-(1+\xi \frac{x-\lambda}{\delta})^{-1/\xi}}, \quad 1 + \xi(x - \lambda)/\delta > 0, \quad (3.9)$$

frequentemente designada por função de *distribuição unificada* de Valores Extremos (para máximos).

Na prática surge-nos usualmente um dos três casos particulares da distribuição de Valores Extremos, associados à partição do espaço de parâmetros nas regiões $\xi < 0$, $\xi = 0$ e $\xi > 0$. Temos assim os modelos:

$$\text{Gumbel : } \Lambda(x; \lambda, \delta) = e^{-e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\xi = 0), \quad (3.10)$$

$$\text{Fréchet : } \Phi_{\alpha}(x; \lambda, \delta) = e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-\alpha}}, \quad x > \lambda \quad (\xi > 0), \quad (3.11)$$

$$\text{Weibul : } \Psi_{\alpha}(x; \lambda, \delta) = e^{-\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{\alpha}}, \quad x < \lambda \quad (\xi < 0). \quad (3.12)$$

Note-se que, com $G_{\xi}(\cdot)$ definida em (3.9), temos $\Lambda(x; \lambda, \delta) = \lim_{\xi \rightarrow 0} G_{\xi}(x; \lambda, \delta) = G_0(x; \lambda, \delta)$, $\Phi_{\alpha}(x; \lambda, \delta) = G_{1/\alpha}(x; \lambda + \delta, \delta/\alpha)$ e $\Psi_{\alpha}(x; \lambda, \delta) = G_{-1/\alpha}(x; \lambda + \delta, \delta/\alpha)$.

Como a utilidade prática de uma distribuição depende em grande parte da existência de bons métodos para a estimação dos seus parâmetros, e tal estimação não é fácil para a f.d. de Valores Extremos, é usual, quando estamos face a uma amostra de máximos, tentar o ajustamento de uma das três funções de distribuição atrás indicadas, a f.d. de Gumbel (a mais simples), de Fréchet ou de Weibull, em (3.10), (3.11) e (3.12), respectivamente.

Note-se que o comportamento assintótico de mínimos é facilmente deduzido do comportamento assintótico de máximos. Na realidade, como $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, -X_2, \dots, -X_n\}$, as possíveis distribuições limites para mínimos são, após *standardização*,

$$H_{\xi}(x) = 1 - G_{\xi}(-x; 0, 1),$$

com $G_{\xi}(x, \lambda, \delta)$ definida em (3.9).

Modelo de Gumbel

As principais características populacionais de um modelo de Gumbel(λ, δ) são

$$\mathbb{E}(X) = \lambda + \gamma\delta, \quad \gamma = 0.5772\dots \text{ (constante de Euler),}$$

$$\text{Moda} = \lambda, \quad \text{Mediana} = \lambda - \delta \ln \ln 2,$$

$$\text{Var}(X) = (\pi\delta)^2/6,$$

$$\beta_1 = 1.3, \quad \beta_2 = 2.4.$$

A f.d. de Gumbel é sem dúvida a distribuição mais frequentemente ajustada a dados que sejam valores máximos de outras grandezas

aleatórias. A principal razão de tal escolha é devida ao facto de a inferência para tais distribuições ser muito mais simples do que para distribuições $\Phi_\alpha(\cdot)$ ou $\Psi_\alpha(\cdot)$.

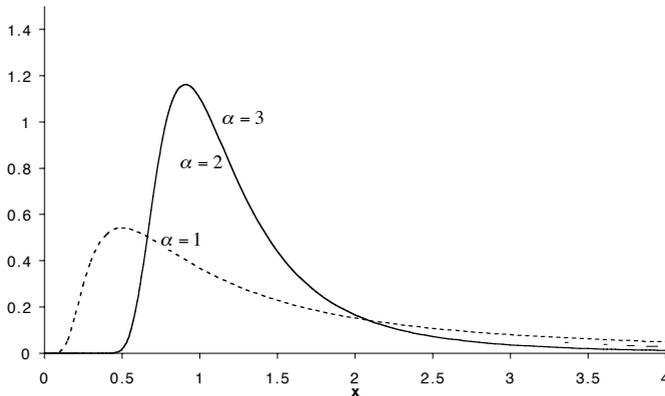
A f.d. de Gumbel goza, como f.d. limite de máximos, convenientemente normalizados, do mesmo papel que a f.d. Normal goza, como f.d. limite de somas convenientemente normalizadas, e a Log-normal goza, como f.d. limite de produtos convenientemente normalizados.

Modelo de Fréchet

As principais características populacionais de um modelo de Fréchetl(λ, δ, α) são

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \lambda + \delta\Gamma(1 - 1/\alpha) \text{ se } \alpha > 1, \\ \text{Moda} &= \lambda + \delta(1 + 1/\alpha)^{-1/\alpha}, \quad \text{Mediana} = \lambda + \delta(\ln 2)^{-1/\alpha}, \\ \text{Var}(X) &= \delta^2 \{ \Gamma(1 - 2/\alpha) - \Gamma^2(1 - 1/\alpha) \} \text{ se } \alpha > 2. \end{aligned}$$

É o seguinte o aspecto gráfico de densidades de Fréchet, sempre com assimetria positiva ou à direita.

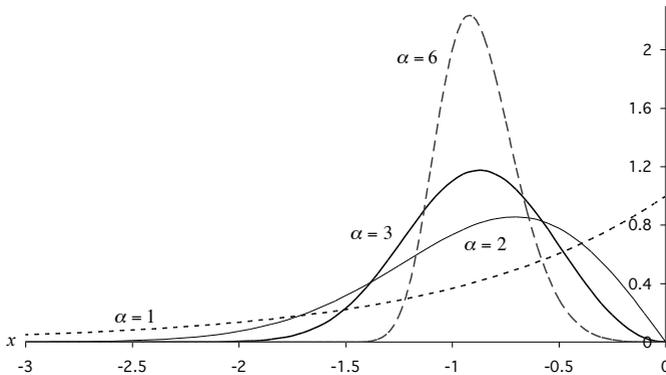


Modelo Weibull de máximos

As principais características populacionais de um modelo de Weibull(λ, δ, α) são

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \lambda - \delta \Gamma(1 + 1/\alpha), \\ \text{Moda} &= \lambda - \delta (1 - 1/\alpha)^{1/\alpha}, \quad \text{Mediana} = \lambda - \delta (\ln 2)^{1/\alpha}, \\ \text{Var}(X) &= \delta^2 \{ \Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha) \}.\end{aligned}$$

As densidades de Weibull são mais maleáveis do que as densidades de Fréchet e de Gumbel no que respeita à assimetria, tendo assimetria negativa ou à esquerda sempre que $\alpha < 3.6$. Para $\alpha = 3.6$ o modelo de Weibull é praticamente simétrico, tendo assimetria positiva para $\alpha > 3.6$, como se pode ver na figura seguinte.



Uma visualização global destes três modelos extremais leva-nos à conclusão seguinte: quando $\alpha \rightarrow +\infty$, os modelos de Fréchet e de Weibull aproximam-se do modelo de Gumbel.

Os modelos extremais são frequentemente usados quando se pretende fazer inferência sobre parâmetros de *acontecimentos raros*, e num contexto de *Fiabilidade* são amplamente utilizados para modelar dados de resistência de materiais.

3.2 Modelos Discretos Univariados

De entre os modelos discretos usuais em aplicações (veja-se Johnson *et al.*, 2005, atrás referido), os mais frequentemente utilizados em *Controlo da Qualidade* são os modelos Binomial, Hipergeométrico, Binomial Negativo, de Poisson e as suas versões truncadas, que iremos brevemente referir.

3.2.1 Modelo Binomial

O modelo Binomial surge-nos num contexto de n provas independentes, onde em cada uma das provas pode ocorrer um acontecimento E ou o seu complementar (sucesso ou insucesso), sendo p a probabilidade constante de ocorrência de E em cada prova.

Então, o número de vezes que E ocorreu nas n provas segue um modelo Binomial(n, p), com f.m.p. dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Em algumas aplicações, mesmo quando as hipóteses de independência e probabilidade constante p não forem totalmente satisfeitas, pode considerar-se um modelo Binomial como aproximação.

Para este modelo tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= np, & \text{Var}(X) &= np(1 - p), \\ \beta_1 &= \frac{1 - 2p}{\sqrt{np(1 - p)}}, & \beta_2 &= \frac{1 - 6p(1 - p)}{np(1 - p)}. \end{aligned}$$

Um caso particular deste modelo é o chamado modelo de Bernoulli(p), associado ao caso $n = 1$.

3.2.2 Modelo Hipergeométrico

O modelo Hipergeométrico surge-nos num contexto de amostragem, sem reposição, de n elementos de uma população de dimensão

N , onde existe uma proporção $100 \times p\%$ de elementos com uma determinada característica, denominada sucesso.

Então, o número de sucessos ocorridos na amostra de dimensão n retirada da população, segue um modelo Hipergeométrico(N, n, p), com f.m.p. dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

$$\max(0, [n - N(1 - p)]) \leq k \leq \min([Np], n). \quad (3.14)$$

Para este modelo tem-se:

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1},$$

$$\beta_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}} \frac{N-2n}{N-2} \sqrt{\frac{N-1}{N(N-n)}}.$$

Para informação sobre o coeficiente de achatamento β_2 , veja-se Johnson *et al.* (2005), atrás referido.

3.2.3 Modelo Binomial Negativo

Enquanto o modelo Binomial aparece associado à variável que conta o número de sucessos em n provas de Bernoulli, o modelo Binomial Negativo (BN) aparece associado à variável que conta o número de provas de Bernoulli realizadas até se observarem s sucessos. Se a probabilidade de ocorrer sucesso em cada prova realizada é constante e igual a p , então a variável número de provas até se observarem s sucessos segue um modelo BN(s, p), e a sua f.m.p. é dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{s-1} p^s (1-p)^{k-s}, \quad k = s, s+1, \dots \quad (0 < p < 1).$$

As principais características populacionais da variável são:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{s}{p}, \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{s(1-p)}{p^2},$$

$$\beta_1 = \frac{2-p}{\sqrt{s(1-p)}}, \quad \beta_2 = \frac{6(1-p) + p^2}{s(1-p)}.$$

Distribuição Geométrica ou de Pascal

A distribuição Geométrica ou de Pascal é um caso particular da distribuição Binomial Negativa, obtida para $s = 1$, sendo muito usada no estudo do desempenho de uma carta de controlo. A f.m.p. é dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (0 < p < 1). \quad (3.15)$$

Note-se que esta distribuição não tem memória, i.e., para m e n inteiros,

$$\mathbb{P}(X > m + n | X > m) = \mathbb{P}(X \geq n).$$

Para este modelo tem-se:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2},$$

$$\beta_1 = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}, \quad \beta_2 = \frac{6(1-p) + p^2}{1-p}.$$

3.2.4 Modelo de Poisson

A f.m.p. do modelo de Poisson(λ) é

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.16)$$

Para este modelo tem-se:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}\text{ar}(X) = \lambda,$$

$$\beta_1 = 1/\lambda, \quad \beta_2 = 1/\sqrt{\lambda}.$$

O modelo de Poisson(λ) aparece como limite do modelo Binomial(n, p_n), quando $n \rightarrow \infty$ e $np_n \rightarrow \lambda$. Temos pois a chamada *lei de acontecimentos raros* — muitas provas de Bernoulli, com pequena probabilidade de sucesso, e em que o número esperado de sucessos se mantém constante.

O modelo de Poisson também aparece relacionado com acontecimentos que ocorrem aleatória e independentemente no tempo, sendo um infinitésimo $o(dt)$ a probabilidade de ocorrência de dois ou mais acontecimentos em $(t, t + dt)$ e $\lambda dt + o(dt)$ a probabilidade de ocorrência de um acontecimento em $(t, t + dt)$.

Exemplos concretos em que é frequentemente possível aplicar o modelo de Poisson:

- chegadas de clientes a um serviço;
- ocorrência de acidentes num determinado cruzamento;
- número de erros numa página dactilografada e outras calamidades semelhantes.

São ainda bastante utilizados em aplicações os seguintes modelos truncados, relacionados com o modelo de Poisson:

Distribuição de Poisson positiva

A f.m.p. associada a este modelo é

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!(1 - \exp(-\lambda))}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Este modelo surge-nos quando temos, por exemplo, um aparelho de observação que só se torna activo quando ocorre pelo menos um acontecimento.

Distribuição de Poisson duplamente truncada

São então omitidos os valores $0, 1, \dots, r_1 - 1$ e $r_2 + 1, \dots$. A f.m.p. associada é dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k! \sum_{j=r_1}^{r_2} \lambda^j / j!}, \quad k = r_1, \dots, r_2, \quad r_2 > r_1 > 0.$$

3.3 Breve Referência à Estimação de Máxima Verosimilhança

No que se segue iremos sempre considerar uma amostra completa, (x_1, x_2, \dots, x_n) , de observações independentes provenientes do modelo em estudo.

3.3.1 Modelo Normal ou Gaussiano

Para o modelo $\text{Normal}(\mu, \sigma)$ em (3.1), tem-se

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)s^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

3.3.2 Modelo Logístico

Iremos considerar a reparametrização $(\mu, \sigma^2) = (\lambda, (\delta\pi)^2/3)$ para o modelo definido em (3.3). As estimativas de máxima verosimilhança de (μ, σ) são então solução do seguinte sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \exp\left(\frac{\pi(x_i - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}\sqrt{3}}\right) \right\}^{-1} = 1/2 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \frac{1 - \exp\left(\frac{-\pi(x_i - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}\sqrt{3}}\right)}{1 + \exp\left(\frac{-\pi(x_i - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3}/\pi, \end{cases}$$

que pode ser resolvido por qualquer método numérico, como por exemplo o método de Newton-Raphson.

3.3.3 Modelo Lognormal

Se θ for conhecido, as estimativas de máxima verosimilhança de (μ, σ) , associadas ao modelo em (3.4), são

$$\hat{\mu} = \bar{z} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2, \quad \text{com} \quad z_i = \log(x_i - \theta), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Se o parâmetro θ for desconhecido, para obtermos a estimativa de máxima verosimilhança de θ , torna-se necessário resolver a equação,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^n \left(\ln(x_j - \hat{\theta}) - \frac{\sum_{k=1}^n \ln(x_k - \hat{\theta})}{n} \right)^2 - \sum_{j=1}^n \ln(x_j - \hat{\theta})}{x_i - \hat{\theta}} + n \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i - \hat{\theta})}{x_i - \hat{\theta}} = 0,$$

mais uma vez através da utilização de métodos numéricos.

As estimativas de máxima verosimilhança dos outros dois parâmetros são então função de $\hat{\theta}$, e dadas por

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(\hat{\theta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \hat{\theta}),$$

e

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\hat{\theta}) = \sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\ln(x_i - \hat{\theta}) - \hat{\mu} \right)^2}.$$

3.3.4 Modelo Gama

As estimativas de máxima verosimilhança dos parâmetros desconhecidos em modelo Gama(λ, δ, α), em (3.5), são solução do se-

guinte sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \hat{\lambda}) - n \ln \hat{\delta} - n\psi\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})}{n\hat{\delta}}\right) = 0 \\ n \left\{ \hat{\delta} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})}{n\hat{\delta}} - 1 \right) \right\}^{-1} - \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})^{-1} = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

tendo-se ainda

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})}{n\hat{\delta}}.$$

A função $\psi(\cdot)$ em (3.17) é a *função digama*, derivada logarítmica da função gama completa, $\Gamma(x)$, definida em (3.6). É dada por

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad x > 0. \quad (3.18)$$

Esta função encontra-se convenientemente tabelada, por exemplo em Abramowitz & Stegun⁴ (1972).

O sistema de equações em (3.17) é instável, a não ser que se espere $\alpha > 2.5$, e frequentemente temos de recorrer ao método dos momentos, que nos fornece as seguintes estimativas para os parâmetros α , δ e λ :

$$\alpha^* = 4m_2^3/m_3^2; \quad \delta^* = m_3/(2m_2); \quad \lambda^* = \bar{x} - 2m_2^2/m_3,$$

com m_k , $k = 2, 3$, dados em (2.12).

No caso do modelo Exponencial(λ, δ) = Gama($\lambda, \delta, 1$), temos

$$\hat{\lambda} = x_{1:n} \quad \text{e} \quad \hat{\delta} = \bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i.$$

⁴ Abramowitz, A. & I.A. Stegun (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover.

3.3.5 Modelo Beta

Admitamos $(a, b) = (0, 1)$ na f.d.p. em (3.7). As estimativas de máxima verosimilhança de p e q são então dadas por:

$$\begin{cases} \psi(\hat{p}) - \psi(\hat{p} + \hat{q}) = \sum_{i=1}^n \ln(x_i)/n \\ \psi(\hat{q}) - \psi(\hat{p} + \hat{q}) = \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i)/n, \end{cases}$$

com $\psi(\cdot)$ a função digama, em (3.18).

3.3.6 Modelo Gaussiano Inverso

Relativamente às estimativas de máxima verosimilhança dos parâmetros que aparecem na f.d.p. em (3.8) tem-se:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{e} \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n (1/x_i - 1/\bar{x})}.$$

3.3.7 Modelos Extremais

Modelo de Gumbel

Para obtermos as estimativas de máxima verosimilhança dos parâmetros (λ, δ) em modelo de Gumbel, com f.d. dada em (3.10), é necessário resolver numericamente a equação em $\hat{\delta}$,

$$\hat{\delta} = \sum_{i=1}^n x_i/n - \frac{\sum_{i=1}^n x_i e^{-x_i/\hat{\delta}}}{\sum_{i=1}^n e^{-x_i/\hat{\delta}}}.$$

A estimativa de máxima verosimilhança de λ é então

$$\hat{\lambda} = -\hat{\delta} \ln \left\{ \sum_{i=1}^n e^{-x_i/\hat{\delta}} \right\} / n.$$

Modelo de Fréchet

As estimativas de máxima verosimilhança de λ e de α em modelo com f.d. dada em (3.11) obtêm-se por resolução numérica do sistema seguinte:

$$\begin{cases} \frac{\hat{\alpha}+1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})^{-1} - \hat{\alpha} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})^{-\hat{\alpha}-1}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})^{-\hat{\alpha}}} = 0 \\ \frac{1}{\hat{\alpha}} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})^{-\hat{\alpha}} \ln(x_i - \hat{\lambda})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})^{-\hat{\alpha}}} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \hat{\lambda})/n = 0. \end{cases}$$

A estimativa de máxima verosimilhança de δ é dada por

$$\hat{\delta} = \left\{ n / \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\lambda})^{\hat{\alpha}} \right\}^{1/\hat{\alpha}}.$$

Modelo Weibull de máximos

De forma análoga ao que acontece em modelo de Fréchet, as estimativas de máxima verosimilhança de λ e de α para o modelo com f.d. dada em (3.12) obtêm-se por resolução numérica do sistema

$$\begin{cases} \frac{\hat{\alpha}-1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda} - x_i)^{-1} - \hat{\alpha} \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\lambda} - x_i)^{-\hat{\alpha}-1}}{\sum_{i=1}^n (\hat{\lambda} - x_i)^{-\hat{\alpha}}} = 0 \\ -\frac{1}{\hat{\alpha}} + \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\lambda} - x_i)^{-\hat{\alpha}} \ln(\hat{\lambda} - x_i)}{\sum_{i=1}^n (\hat{\lambda} - x_i)^{-\hat{\alpha}}} - \sum_{i=1}^n \ln(\hat{\lambda} - x_i)/n = 0, \end{cases}$$

sendo a estimativa de máxima verosimilhança de δ dada por

$$\hat{\delta} = \left\{ n / \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda} - x_i)^{\hat{\alpha}} \right\}^{-1/\hat{\alpha}}.$$

3.3.8 Modelo Binomial

A estimativa de máxima verosimilhança de p , baseada em (x_1, \dots, x_n) , proveniente de um modelo Binomial(1, p) \equiv

Bernoulli(p), com f.m.p. dada em (3.13), é

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

3.3.9 Modelo Geométrico

A estimativa de máxima verosimilhança de p , baseada em (x_1, \dots, x_n) , proveniente de um modelo $\text{BN}(1, p) \equiv \text{Geométrica}(p)$, com f.m.p. dada em (3.15), é

$$\hat{p} = 1/\bar{x}.$$

3.3.10 Modelo de Poisson

A estimativa de máxima verosimilhança de λ , baseada em (x_1, \dots, x_n) , proveniente de um modelo de $\text{Poisson}(\lambda)$, com f.m.p. dada em (3.16), é

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Para mais detalhes sobre estimação de parâmetros em modelos contínuos e discretos univariados consultem-se os livros de Johnson *et al.* (1994, 1995 e 2005), atrás referidos.

3.4 Modelos no Âmbito da Análise Exploratória de Dados

Dissemos logo no início deste capítulo que se *devem deixar os dados falar por eles próprios*. É essencialmente esta a filosofia da *Análise Exploratória de Dados*, devida a John Tukey, que sugere a utilização não dos modelos usuais em aplicações, e referidos nas Secções 3.1 e 3.2, mas a utilização de estimadores de índole não-paramétrica da f.d.p. $f(x)$ (ou da f.d. $F(x)$). De acordo com esta perspectiva exploratória é preferível representar os dados formalmente por uma *distribuição empírica*, tendo em conta:

- Desejo de objectividade — o ajustamento de uma função de distribuição à população subjacente à amostra, numa perspectiva a que frequentemente se chama *Análise Confirmatória de Dados*, difere de pessoa para pessoa, enquanto o uso de uma distribuição empírica elimina tal arbitrariedade;
- Maior facilidade na concepção de algoritmos computacionais para tal análise de dados.

Iremos brevemente referir alguns estimadores não-paramétricos da função de distribuição e da função densidade de probabilidade.

Face a uma amostra aleatória (X_1, X_2, \dots, X_n) , o estimador usual da f.d. $F(x)$, de índole não-paramétrica, é a chamada *função de distribuição empírica*,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{[X_j \leq x]} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < X_{1:n} \\ k/n & \text{se } X_{k:n} \leq x < X_{k+1:n}, \\ & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{se } x \geq X_{n:n} \end{cases}$$

onde

$$I_A = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ não ocorre} \\ 1 & \text{se } A \text{ ocorre} \end{cases}$$

é a função indicatriz do acontecimento A .

Usam-se por vezes *alternativas contínuas* da f.d. empírica, como por exemplo a *f.d. empírica contínua e linear por pedaços*:

$$F_n^{(l)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq X_{1:n} \\ \frac{k-1}{n-1} + \frac{x-X_{k:n}}{(n-1)(X_{k+1:n}-X_{k:n})} & \text{se } X_{k:n} \leq x < X_{k+1:n}, \\ & 1 \leq k \leq n-1 \\ 1 & \text{se } x \geq X_{n:n}. \end{cases}$$

Quanto à estimação não-paramétrica de densidades temos os chamados *estimadores de núcleo* ou *estimadores kernel*, que são misturas de n densidades, associadas a n modelos com o mesmo

núcleo, $\mathcal{K}(x)$, mas centrados nas diferentes observações da amostra, $X_i, 1 \leq i \leq n$. Tem-se

$$f_n^*(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \mathcal{K} \left(\frac{x - X_i}{h} \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

em que $\mathcal{K}(\cdot)$ é uma f.d.p, i.e. $\mathcal{K} \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K} = 1$, sendo h a chamada *janela do estimador do núcleo*. Detalhes sobre o comportamento destes estimadores podem ser encontrados em Devroye & Györfi⁵ (1985). Relativamente ao núcleo, e no caso univariado, existem vários argumentos teóricos para a escolha do chamado *núcleo de Epanechnikov*,

$$\mathcal{K}(x) = \frac{3}{4} (1 - x^2), \quad |x| \leq 1.$$

Em termos muito gerais, basta-nos ter $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} nh = \infty$ para se ter consistência destes estimadores. Note-se que $h = h_n$ é em tudo semelhante à amplitude do intervalo classe no *estimador do histograma*, que também é um estimador não-paramétrico da densidade, com uma expressão formal dada por

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{I_{[X_i \in A_{n,j}]}}{h}, \quad x \in A_{n,j},$$

onde $\{A_{n,j}, j \geq 1\}_{n \geq 1}$ é uma sucessão de partições de \mathbb{R} , constituída por intervalos com igual amplitude h . O estimador do histograma é também uma mistura de densidades uniformes, associadas a cada um dos *intervalos classe* da partição escolhida.

⁵ Devroye, L. & L. Györfi (1985). *Nonparametric Density Estimation. The L_1 View*. John Wiley and Sons.

Capítulo 4

Estatísticas Ordinais em Controlo da Qualidade

Associada à amostra aleatória (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) , proveniente de uma população com f.d. $F(\cdot)$, com localização zero e dispersão um, sem perda de generalidade, consideremos a amostra das estatísticas ordinais ascendentes $(Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n})$. Ao leitor mais interessado no estudo elementar da teoria de estatísticas ordinais recomenda-se Arnold *et al.*¹(1992). Para estudos mais avançados, pode-se consultar David²(1981), Reiss³(1989) e David & Nagaraja⁴ (2003).

¹ Arnold, B., N. Balakrishna & H.N. Nagaraja (1992). *A First Course in Order Statistics*. John Wiley and Sons.

² David, H.A. (1981). *Order Statistics*, 2nd edition. John Wiley and Sons.

³ Reiss, R.-D. (1989). *Approximate Distributions of Order Statistics*. Springer-Verlag.

⁴ David, H.A. & H.N. Nagaraja (2003). *Order Statistics*, 3rd edition. John Wiley and Sons.

4.1 Comportamento Individual

Se Y for absolutamente contínua, com f.d.p. $f(y) = F'(y)$, $Y_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, tem f.d.p.

$$f_{i:n}(y) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} F^{i-1}(y)(1-F(y))^{n-i} f(y), \quad (4.1)$$

para $y \in \mathbb{R}$, onde $B(p, q)$ denota a função *Beta completa*, definida em (3.7),

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

com $\Gamma(\cdot)$ a função *Gama completa*, definida em (3.5).

Na realidade, como é possível ter $Y_{i:n} \in (y, y+dy]$?

- dos n valores Y_i , $1 \leq i \leq n$, $(i-1)$ arbitrários têm de ser $\leq y$ — acontecimento com probabilidade $\binom{n}{i-1} F^{i-1}(y)$.
- dos $(n-i+1)$ restantes, um, arbitrariamente, deve pertencer ao intervalo $(y, y+dy]$ — acontecimento com probabilidade $(n-i+1)(F(y+dy) - F(y))$.
- os restantes $(n-i)$ têm de ser $> y+dy$ — acontecimento com probabilidade $(1-F(y+dy))^{n-i}$.

A independência dos acontecimentos anteriores conduz-nos então à expressão (4.1).

A f.d. de $Y_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, é, para F discreta ou contínua, e $y \in \mathbb{R}$,

$$F_{i:n}(y) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} F^k(y)(1-F(y))^{n-k}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.2)$$

Para melhor compreendermos a fórmula (4.2), atentemos na seguinte relação entre a distribuição de uma estatística ordinal e o modelo Binomial. Consideremos as seguintes variáveis de contagem:

$$S_y := \#\{i : Y_i > y, 1 \leq i \leq n\} = \sum_{i=1}^n I_{[Y_i > y]},$$

$$S_y^* := \#\{i : Y_i \leq y, 1 \leq i \leq n\} = \sum_{i=1}^n I_{[Y_i \leq y]},$$

onde I_A é mais uma vez a função indicatriz do acontecimento A , i.e.

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ ocorre} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A variável aleatória S_y é Binomial($n, 1 - F(y)$) e a variável aleatória S_y^* é também Binomial($n, F(y)$). Como

$$Y_{i:n} \leq y \quad \text{sse} \quad S_y < n - i + 1 \quad \text{sse} \quad S_y^* \geq i$$

tem-se

$$\begin{aligned} F_{i:n}(y) &= \mathbb{P}(\text{Binomial}(n, 1 - F(y)) < n - i + 1) = \\ &= \mathbb{P}(\text{Binomial}(n, F(y)) \geq i). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da segunda igualdade em (4.3) segue (4.2).

Para F discreta,

$$f_{i:n}(y) = \mathbb{P}(Y_{i:n} = y) = F_{i:n}(y) - F_{i:n}(y - 1).$$

Casos particulares importantes de estatísticas ordinais são o *mínimo* da amostra, $Y_{1:n}$, e o *máximo* da amostra, $Y_{n:n}$. A partir de (4.2) obtém-se

$$F_{1:n}(y) = F_{Y_{1:n}}(y) = 1 - (1 - F(y))^n, \quad y \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

e

$$F_{n:n}(y) = F_{Y_{n:n}}(y) = F^n(y), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

4.2 Distribuição Conjunta

O par de variáveis aleatórias $(Y_{i:n}, Y_{j:n}), 1 \leq i < j \leq n$, tem f.d.p. conjunta dada por

$$f_{i,j:n}(y_1, y_2) = \frac{1}{B(i, j-i)B(j, n-j+1)} F^{i-1}(y_1) \\ \times (F(y_2) - F(y_1))^{j-i-1} (1 - F(y_2))^{n-j} f(y_1) f(y_2), \quad y_1 < y_2.$$

Generalizações para um número qualquer de estatísticas ordinais são óbvias:

O éuplo de variáveis aleatórias $(Y_{n_1:n}, Y_{n_2:n}, \dots, Y_{n_k:n}), 1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n$, terá f.d.p. dada por

$$f_{n_1, \dots, n_k:n}(y_1, \dots, y_k) = \\ n! \prod_{j=0}^k \frac{(F(y_{j+1}) - F(y_j))^{n_{j+1} - n_j - 1}}{(n_{j+1} - n_j - 1)!} \prod_{j=1}^k f(y_j), \\ \text{se } y_1 < \dots < y_n, (y_0 = -\infty, y_{k+1} = +\infty), \\ n_0 = 0, n_{k+1} = n + 1. \quad (4.6)$$

Para f.d.p. conjunta de $(Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n})$ tem-se

$$f_{1, \dots, n:n}(y_1, \dots, y_n) = n! \prod_{j=1}^n f(y_j), \quad \text{se } y_1 < \dots < y_n,$$

caso particular de (4.6) com $k = n$, e $n_j = j, 1 \leq j \leq n$.

4.3 Momentos de Estatísticas Ordinais

A estrutura de segunda ordem das estatísticas ordinais fica completamente definida se conhecermos o seu vector coluna de valores

médios,

$$\underline{\mu} = [\mu_{i:n}]_{1 \times n}, \quad \mu_{i:n} := \mathbb{E}(Y_{i:n}), \quad 1 \leq i \leq n,$$

e a sua matriz de covariâncias,

$$\underline{\Sigma} = [\sigma_{i,j:n}]_{n \times n}, \quad \sigma_{i,j:n} := \text{Cov}(Y_{i:n}, Y_{j:n}) = \sigma_{j,i:n}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Como obter $\underline{\mu}$ e $\underline{\Sigma}$? Tudo depende do modelo F . Formalmente, temos

$$\mu_{i:n} = \mathbb{E}(Y_{i:n}) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \int_0^1 F^{-1}(u) u^{i-1} (1-u)^{n-i} du,$$

onde $F^{-1}(\cdot)$ é a função inversa generalizada, definida em (2.2). Mais geralmente, para $\mu_{i:n}^{(k)} := \mathbb{E}(Y_{i:n}^k)$ tem-se

$$\mu_{i:n}^{(k)} = \mathbb{E}(Y_{i:n}^k) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \int_0^1 (F^{-1}(u))^k u^{i-1} (1-u)^{n-i} du.$$

Para a estrutura bivariada,

$$\begin{aligned} \mu_{i,j:n} = \mathbb{E}(Y_{i:n} Y_{j:n}) &= \frac{1}{B(i, j-i) B(j, n-j+1)} \\ &\times \int \int_{0 \leq u < v \leq 1} F^{-1}(u) F^{-1}(v) u^{i-1} (v-u)^{j-i-1} (1-v)^{n-j} dudv, \end{aligned}$$

e

$$\sigma_{i,j:n} = \text{Cov}(Y_{i:n}, Y_{j:n}) = \mu_{i,j:n} - \mu_{i:n} \mu_{j:n}.$$

Do ponto de vista de cálculo é usual recorrer a relações de recorrência, pois o cálculo integral directo provoca frequentemente erros de arredondamento. A estrutura em distribuição das estatísticas ordinais permite facilmente a obtenção das seguintes relações de recorrência, que permitem o cálculo efectivo dos momentos:

$$\mu_{i+1:n} = \frac{n\mu_{i:n-1} - (n-i)\mu_{i:n}}{i}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

e para $1 < i < j \leq n$,

$$\mu_{i,j:n} = \frac{n\mu_{i-1,j-1:n-1} - (j-i)\mu_{i-1,j:n} - (n-j+1)\mu_{i-1,j-1:n}}{i-1}.$$

Convém ainda referir as seguintes relações simplificativas:

- **Populações simétricas:**

$$\begin{aligned}\mu_{i:n} &= -\mu_{n-i+1:n}, & 1 \leq i \leq n, \\ \sigma_{i,j:n} &= \sigma_{n-i+1,n-j+1:n}, & 1 \leq i < j \leq n.\end{aligned}$$

- **Populações Normais(0,1):**

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{i,j:n} = \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j:n} = 1.$$

Esta propriedade é característica do modelo Normal.

Como relações de controlo (global) podemos referir as seguintes:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \mu_{i:n} &= n\mu, & \sum_{i=1}^n \mu_{i,i:n} &= n(\mu^2 + \sigma^2), \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{i,j:n} &= n(\mu^2 + \sigma^2) + n(n-1)\mu^2 = n(\sigma^2 + n\mu^2).\end{aligned}$$

4.4 Amplitude como Estimador de um Parâmetro de Escala

Admitamos agora que (X_1, X_2, \dots, X_n) é uma amostra aleatória proveniente de uma população com f.d. $F((x-\lambda)/\delta)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$ parâmetros desconhecidos de localização e escala, respectivamente. Consideremos as estatísticas ordinais ascendentes

$(X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n})$ e designemos por $Y_{i:n} = (X_{i:n} - \lambda)/\delta$ as estatísticas ordinais correspondentes ao modelo $F(x)$ com localização $\lambda = 0$ e dispersão $\delta = 1$.

A amplitude $R_n := X_{n:n} - X_{1:n}$ fornece uma medida de dispersão simples, que é facilmente convertida num estimador centrado de δ . Na realidade

$$\mathbb{E}(R_n) = \mathbb{E}(X_{n:n}) - \mathbb{E}(X_{1:n}) = \delta(\mu_{n:n} - \mu_{1:n}),$$

e

$$\text{Var}(R_n) = \delta^2 (\sigma_{n,n:n} + \sigma_{1,1:n} - 2\sigma_{1,n:n}),$$

com $\mu_{i:n} = \mathbb{E}(Y_{i:n})$, $1 \leq i \leq n$, e $\sigma_{i,j:n} = \text{Cov}(Y_{i:n}, Y_{j:n})$, $1 \leq i < j \leq n$, independentes de parâmetros desconhecidos.

Tem-se então que

$$T_n = \frac{R_n}{\mu_{n:n} - \mu_{1:n}}$$

é um estimador centrado de δ .

Este estimador é altamente eficiente para amostras de dimensão pequena ($n \leq 12$) e para uma grande variedade de modelos, incluindo o modelo Normal. Trata-se além disso de um estimador que, para pequenas amostras, é mais robusto do que o desvio padrão empírico, no sentido de ser menos sensível a mudanças no modelo subjacente aos dados.

Para podermos utilizar T_n como estimador de δ , precisamos de saber calcular, ou ter acesso a tabelas de

$$d_{2,n} = \mu_{n:n} - \mu_{1:n}, \tag{4.7}$$

que, como já vimos, são valores que dependem intrinsecamente do modelo F , e da estrutura probabilística das estatísticas ordinais. Os únicos modelos, de entre os usuais, para os quais é possível

obter expressões explícitas simples para $\mu_{i:n}$ são:

$$\text{Modelo Uniforme: } \mu_{i:n} = \frac{i}{n+1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$\text{Modelo Exponencial: } \mu_{i:n} = \sum_{j=1}^i \frac{1}{n-j+1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por exemplo, para $n = 5$, dimensão usual em *Controlo Estatístico da Qualidade*, tem-se:

Modelo	$\mu_{1:5}$	$\mu_{5:5}$	$d_{2,5}$
Exponencial	0.200	2.283	2.083
Normal	-1.163	1.163	2.326
Gama(2)	0.702	3.808	3.106
Gama(5)	2.722	7.803	5.081

4.5 Estatísticas Sistemáticas

Estatísticas sistemáticas são estatísticas que são combinações lineares de estatísticas ordinais. Uma das estatísticas sistemáticas importantes em *Controlo Estatístico da Qualidade* é a *amplitude amostral*,

$$R_n = X_{n:n} - X_{1:n}.$$

A distribuição de amostragem de R_n também vai depender fortemente de $F(\cdot)$, sendo formalmente dada por

$$f_{R_n}(r) = n(n-1) \int_{\mathbb{R}} f(x)(F(x+r) - F(x))^{n-2} f(x+r) dx,$$

ou equivalentemente por

$$F_{R_n}(r) = n \int_{\mathbb{R}} f(x)(F(x+r) - F(x))^{n-1} dx. \quad (4.8)$$

Capítulo 5

Controlo Estatístico de Processos (SPC)

5.1 Gestão da Qualidade Total (TQM)

Quando pensamos na qualidade de um produto, pensamos num conjunto de características que esperamos que o produto possua. Queremos que as lâmpadas eléctricas tenham uma vida longa, que as toalhas de papel sejam fortes e absorventes, que um pacote de margarina de 250 gramas pese pelo menos esses 250 gramas. Mas produzir produtos de qualidade não é trabalho simples. As variações existentes na matéria-prima e na mão-de-obra produzem variabilidade na qualidade do produto. É conseqüentemente vital que os produtores monitorizem a qualidade do produto que produzem.

Hoje em dia, nos EUA e no Japão, as Empresas mais importantes estão a promover o conceito de *Gestão da Qualidade Total* (TQM, de *Total Quality Management*), cujo ambiente merecerá referência na parte final deste texto. A TQM tem essencialmente três componentes fundamentais:

1. *Conceitos*, que incluem um conjunto de ideias que cercam o movimento da qualidade total, tal como *a satisfação do*

cliente, todo o trabalho é um processo, fale-se com base em dados, sendo este último conceito o que obviamente tem mais a ver com o Controlo Estatístico da Qualidade.

2. *Sistemas de gestão tais como a gestão geral, a criação de mercado, a criação de produto e a oferta de produto devem ser geridos de forma responsável pelos directores das Empresas.*
3. *Instrumentos a que temos acesso para implementar um programa de TQM, e que incluem os organigramas e os diagramas de causa-e-efeito estudados na Secção 1.5.1 e na Secção 1.5.2 respectivamente, e as cartas de controlo estatístico de um processo, já referidas na Secção 2.2.6, e a serem estudadas em detalhe neste capítulo.*

Qualquer uma das três componentes atrás referidas é necessária para implementar com sucesso uma filosofia de TQM. Iremos aqui essencialmente referir a componente relacionada com o *Controlo Estatístico do Processo* (SPC, de *Statistical Process Control*), o qual permite aos gestores compreender e monitorizar a variabilidade do processo através do uso de *cartas de controlo*. Detalhes sobre algumas filosofias de gestão à luz deste espírito podem ser encontrados em Ishikawa¹ (1985), Lagrosen & Lagrosen² (2006), McFadden *et al.*³ (2006), Walley *et al.*⁴ (2006), Williams *et al.*⁵

¹ Ishikawa, S.B. & J.M. Jobe (1985). *What is Total Quality Control. The Japanese Way*. Prentice-Hall.

² Lagrosen, S. & Y. Lagrosen (2006). A dive into the depths of quality management. *European Business Review* **18**, 84-96.

³ McFadden, K.L., G.N. Stock & C.R. Gowen III (2006). Implementation of patient safety initiatives in US Hospitals. *Int. J. of Operations and Production Management* **26**, 326-347.

⁴ Walley, P., K. Silvester & S. Mountford (2006). Health-care process improvement decisions: a systems perspective. *Int. J. of Health Care Quality Assurance* **19**, 93-104.

⁵ Williams, R., B. Bertsch, B. Dale, T. Wiele, J. Iwaarden, M. Smith & R. Visser (2006). Quality and risk management: what are the key issues? *Quality and Risk Management* **18**, 67-86.

(2006), Antony *et al.*⁶ (2007) e Siddiqui & Rahman⁷ (2007), por exemplo.

5.2 Introdução às Cartas de Controlo

Em qualquer processo de produção, independentemente de este ter sido cuidadosamente planeado e mantido, existe sempre uma quantidade inerente de variabilidade. Com o objectivo de diferenciar entre as inevitáveis *causas aleatórias* e as *causas determinísticas* num processo de produção, Shewhart inventou, em 1924, a primeira *Carta de Controlo*. Trata-se de um método gráfico que permite facilmente detectar a presença de causas determinísticas.

Se só há intervenção de causas aleatórias, diz-se que o processo está sob controlo estatístico (estado IN), e deixa-se o processo de produção continuar.

Se estão presentes causas determinísticas, diz-se que o processo está fora de controlo estatístico (estado OUT), devendo-se então detectar e eliminar tais causas.

É importante referir que as cartas de controlo surgiram inicialmente para detectar estas possíveis alterações ocorridas num processo, mas actualmente são utilizadas nas mais diversas áreas, como por exemplo, em desporto, justiça, ciências ambientais, biologia, genética, epidemiologia, medicina, saúde, finanças e contabilidade, entre outras. Veja-se Johnson⁸ (1984), Hahn & Ho-

⁶ Antony, J., F. Jiju, M. Kumar & B.R. Cho (2007). Six sigma in service Organizations. Benefits, challenges and difficulties, common myths, empirical observations and success factors. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **24**, 294-311.

⁷ Siddiqui, J. & Z. Rahman (2007). TQM principles' application on information systems for empirical goals. *The TQM Magazine* **19**, 76-87.

⁸ Johnson, D.G. (1984). Trial by computer – a case study of the use of simple statistical techniques in the detection of a fraud. *J. Operational Research Society* **35**, 811-820.

erl⁹ (1998), Woodall & Montgomery¹⁰ (1999), Stoumbos *et al.*¹¹ (2000), Woodall¹² (2000), Piplani & Hubele¹³ (2001), MacCarthy & Wasusri¹⁴ (2002), Nair¹⁵ (2004), Dull & Tegarden¹⁶ (2007) e Utlely & May¹⁷ (2009).

A aplicação de cartas de controlo na área dos serviços em geral, e em particular na área da saúde, tem aumentado substancialmente. A sua utilização nos mais diversificados sectores de serviço hospitalar tem contribuído para melhorar não apenas o processo de gestão em termos económicos e administrativos da instituição, mas também para o melhor bem estar dos utentes, melhor acompanhamento do quadro clínico dos doentes e prevenção de situações adversas como infecções nos serviços de cuidados intensivos, por exemplo, e até mesmo epidemias. Para consulta de alguns estudos realizados com cartas de controlo na área dos serviços de saúde,

⁹ Hahn, G.J. & R. Hoerl (1998). Key challenges for statisticians in business and industry. *Technometrics* **40**, 195-213.

¹⁰ Woodall, W.H. & D.C. Montgomery (1999). Research issues and ideas in statistical process control. *J. Quality Technology* **31**, 376-386.

¹¹ Stoumbos, Z.G., M.Jr. Reynolds, T.P. Ryan & W.H. Woodall (2000). The state of statistical process control as we proceed into the 21st century. *J. Amer. Statist. Assoc.* **95**, 992-998.

¹² Woodall, W.H. (2000). Controversies and contradictions in statistical process control. *J. Quality Technology* **32**, 341-378.

¹³ Piplani, R. & N.F. Hubele (2001). Enhancement and evaluation of pattern recognition in control charts. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **18**, 237-253.

¹⁴ MacCarthy, B.L. & T. Wasusri (2002). A review of non-standard applications of statistical process control (SPC) charts. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **19**, 295-320.

¹⁵ Nair, V. (2004). A report on the future of Statistics: comment. *Statistical Science* **19**, 412-413.

¹⁶ Dull, R.B. & D.P. Tegarden (2004). Using control charts to monitor financial reporting of public companies. *Int. J. of Accounting Information Systems* **5**, 109-127.

¹⁷ Utlely, J.S. & J.G. May (2009). Monitoring service quality with residuals control charts. *Managing Service Quality* **19**, 162-178.

ver por exemplo, Morton *et al.*¹⁸ (2001), Benneyan *et al.*¹⁹ (2003), Coory *et al.*²⁰ (2007), Grigg & Walls²¹ (2007), Winkel & Zhang²² (2007) e Woodall²³ (2008).

Mais ainda, as cartas de controlo além de serem úteis para detectarem mudanças indesejáveis num processo, podem também ser usadas para identificar melhorias. Daí a sua importância a nível do melhoramento contínuo de processos (veja-se Deming, 1992, Carlyle *et al.*²⁴, 2000 e Ryan, 2000).

Em linhas gerais é a seguinte a metodologia básica de uma *Carta de Controlo*:

1. Efectue-se a amostragem de um processo de produção ao longo do tempo e represente-se graficamente uma medida associada ao processo, como uma média, uma percentagem ou um valor máximo, por exemplo.
2. Face à(s) estatística(s) escolhida(s), determine-se então, com base em metodologia estatística adequada, e eventualmente

¹⁸ Morton, A.P., M. Whitby, M. McLaws, A. Dobson, S. McElwain, D. Looke, J. Stackelroth & A. Sartor (2001). The application of statistical process control charts to the detection and monitoring of hospital-acquired infections. *J. Quality Clinical Practice* **21**, 112-117.

¹⁹ Benneyan, J.C., R.C. Lloyd & P.E. Plsek (2003). Statistical process control as a tool for research and healthcare improvement. *Quality and Safety in Health Care* **12**, 458-464.

²⁰ Coory, M., S. Duckett & K. Sketcher-Baker (2007). Using control charts to monitor quality of hospital care with administrative data. *Int. J. for Quality in Health Care* **20**, 31-39.

²¹ Grigg, N. & L. Walls (2006). The role of control charts in promoting organisational learning. New perspectives from a food industry study. *The TQM Magazine* **19**, 37-49.

²² Winkel, P. & N.F. Zhang (2007). *Statistical Development of Quality in Medicine*. John Wiley and Sons.

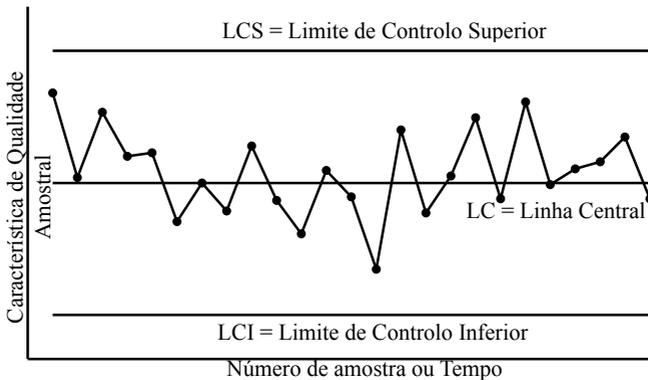
²³ Woodall, W.H. (2008). The use of control charts in health-care and public-health surveillance. *J. Quality Technology* **38**, 89-104.

²⁴ Carlyle, W.M., D.C. Montgomery, & G.C. Runger (2000). Optimization problems and methods in quality control and improvement. *J. Quality Technology* **32**, 1-31.

com base em dados previamente recolhidos, uma *Linha Central* (LC), e duas outras linhas, chamadas *Limite de Controlo Superior* (LCS) e *Limite de Controlo Inferior* (LCI).

- Os dados recolhidos deverão inicialmente ser analisados estatisticamente e a *Análise Preliminar de Dados* em Controlo da Qualidade é, como já referimos no Capítulo 2, essencialmente gráfica — *Histogramas* e *Papel de Probabilidade*.

Apresenta-se a seguir um exemplo típico de uma *Carta de Controlo*:



Enquanto as medições caírem dentro dos limites de controlo, não se toma, em princípio, nenhuma acção, ou melhor, continua-se a produção. Quando as medições excedem os limites de controlo, procura-se detectar qual a causa determinística que provocou essa situação, e qual a melhor forma de a remover. Mesmo que os pontos caíam todos dentro dos limites de controlo, se eles se comportarem de uma forma não aleatória, existe uma indicação de que o processo está fora de controlo, i.e., está no estado OUT. Devem pois ser utilizados testes de aleatoriedade que permitam identificar configurações não aleatórias. Se a razão do aparecimento de tal configuração puder ser encontrada e eliminada, isso contribuirá para um melhoramento no processo de produção. Os *testes de aleatoriedade* aplicados aos pontos da carta de controlo têm pois

importância fundamental em *Controlo da Qualidade*, e serão brevemente estudados no Capítulo 6.

Existe como se vê uma relação íntima entre as *Cartas de Controlo* e os *Testes de Hipóteses*. Essencialmente, a *Carta de Controlo* testa as hipóteses H_0 versus H_1 , que se seguem:

H_0 : O processo está sob controlo estatístico (IN)

H_1 : O processo está fora de controlo estatístico (OUT).

Temos mais uma vez em jogo a probabilidade α do *erro de tipo I*, i.e. decidir pelo estado OUT quando o estado é IN, denominada *risco- α* e a probabilidade β do *erro de tipo II*, i.e. decidir pelo estado IN quando o estado é OUT, denominada *risco- β* . A *Carta de Controlo* pode assim ser considerada como um *Teste de Hipóteses* perpétuo.

Ilustraremos em seguida algumas destas ideias, dando o exemplo mais simples de uma Carta de Controlo:

Na manufactura de segmentos de motor de determinada marca de automóveis, uma característica de qualidade com interesse, é o diâmetro exterior desses segmentos. A análise prévia dos dados permite-nos garantir que o processo deve ser controlado com um diâmetro externo médio de 74 mm, e sabe-se que o desvio do anel deve ser de 0.01 mm.

Modo possível de proceder: cada meia hora colecciona-se uma amostra de 5 segmentos, e calcula-se a média dos diâmetros externos desses segmentos (\bar{x}), marcando-se esse valor numa carta de controlo de médias. A linha central (média do processo) é de LC=74 mm e os limites de controlo poderão ser determinados, com base, por exemplo, na normalidade dos dados, o que conduz a uma distribuição

$$\text{Normal}(\mu_{\bar{x}} = 74\text{mm}, \sigma_{\bar{x}} = 0.0045 = 0.01/\sqrt{5}),$$

para \bar{X} , sob a validade de H_0 . É então de esperar que,

em estado IN, $100(1 - \alpha)\%$ de diâmetros médios amostrados caíam entre $74 + 0.0045\xi_{\alpha/2}$ e $74 - 0.0045\xi_{\alpha/2}$, onde $\xi_{\alpha/2}$ é o quantil de probabilidade $\alpha/2$ de uma Normal(0,1). Se escolhermos $\alpha = 0.002$ (valor usual na literatura inglesa), virá $\xi_{\alpha/2} = -3.09$, e conseqüentemente, ter-se-ão os limites de controlo

$$LCS_{0.002} = 74.0139, \quad LCI_{0.002} = 73.9861.$$

Na literatura americana, e em situações de normalidade subjacente, é usual considerar os chamados limites de controlo 3-sigma, isto é, substitui-se $\xi_{\alpha/2}$ por -3 , obtendo-se então, neste caso particular,

$$LCS = 74.0135, \quad LCI = 73.9865.$$

O fundamental das *Cartas de Controlo* é pois encontrar estatísticas convenientes, por vezes devido à sua simplicidade de cálculo, cuja distribuição de amostragem seja conhecida, sob a validade de controlo estatístico, de forma a podermos determinar com facilidade os limites de controlo, que fornecerão um *Intervalo de Confiança* para uma medida de localização ou dispersão dessa estatística.

As estatísticas mais frequentemente usadas são, para características de qualidade qualitativas as *percentagens* e os *totais*, e para características de qualidade quantitativas, a *média*, o *desvio padrão empírico*, a *amplitude*, e *estatísticas ordinais* superiores e inferiores, incluindo obviamente o *máximo* e o *mínimo*.

Se sob a validade de H_0 , a estatística W considerada, tiver uma distribuição de amostragem conhecida $F(w; \lambda_w, \delta_w) = F((w - \lambda_w)/\delta_w)$, com localização λ_w e dispersão δ_w , e a amostragem for aleatória, então para um risco- α , tem-se:

$$LCS_\alpha = \lambda_w + \chi_{1-\alpha/2; F_w(\cdot; 0,1)} \delta_w$$

$$LCI_{\alpha} = \lambda_w + \chi_{\alpha/2; F_w(\cdot; 0, 1)} \delta_w.$$

Em situações em que se torna difícil o estudo da distribuição de amostragem da estatística W , sob a validade de H_0 , recorre-se frequentemente a um estudo da estrutura de segunda ordem dessa estatística, calculando o seu valor médio μ_w e o seu desvio padrão σ_w , sob H_0 , e considera-se

$$\begin{cases} LCS = \mu_w + k\sigma_w \\ LC = \mu_w \\ LCI = \mu_w - k\sigma_w \end{cases}$$

onde usualmente $k = 3$, obtendo-se as tradicionais cartas de controlo 3-sigma, muito utilizadas na prática, com todos os contras estatísticos que tal método possa ter. Outros valores de k podem ser escolhidos, com o intuito de fornecer diferentes *níveis de alerta*.

As cartas de controlo em uso para variáveis quantitativas são essencialmente as cartas de controlo de médias (*Carta- \bar{X}*) e as cartas de controlo de amplitudes (*Carta-R*), em substituição das cartas de controlo de desvios padrões empíricos (*Carta-S*). É no entanto por vezes desejável a utilização de cartas de controlo especiais, como a carta de máximos e de mínimos (*Carta-M/m*), em vez das cartas de controlo convencionais de médias e amplitudes. Uma das vantagens óbvias é a de que toda a informação pode ser combinada numa carta de controlo única, sendo ainda os cálculos bastante mais simples.

Para variáveis qualitativas usam-se a *Carta-p* e a *Carta-np*, quando em modelo Binomial, e ainda a *Carta-c* e a *Carta-u*, em modelo de Poisson.

Quais as constantes necessárias para o uso destas cartas de controlo? Como é que estas cartas de controlo se comparam com as convencionais?

As respostas a estas perguntas serão dadas mais adiante. Na realidade, a escolha dos parâmetros envolvidos nas cartas de controlo

— dimensão das amostras a recolher, intervalo de amostragem e limites de controlo — são pontos fundamentais a tratar.

O tipo de amostragem a efectuar é também importante. Consideremos, por exemplo, um processo de produção, em que se leva uma quantidade de tempo bastante razoável para produzir uma única peça a ser medida. Nestas condições as *médias móveis* e as correspondentes *amplitudes móveis* fornecem medidas simples, correntes, de localização e dispersão. Consequentemente, com, por exemplo, a habitual hipótese de uma distribuição Normal subjacente, cartas especiais de controlo de médias e amplitudes móveis podem ser construídas e usadas de modo semelhante ao que se faz nas cartas de controlo de médias e amplitudes. De modo análogo poderemos falar em cartas de controlo de mínimos e máximos móveis.

Resumidamente, vejamos, de forma simplificada, quais os passos a seguir na escolha de cartas de controlo:

1. Escolha as características a serem representadas graficamente. Trata-se de uma questão subjectiva, mas pode-se entrar em linha de conta com o facto de se dever dar prioridade elevada a características de qualidade que estão correntemente a surgir defeituosas. Tal pode acontecer em peças intermédias ou no produto final.
2. Escolha o tipo de carta de controlo. Para comparação de diferentes cartas de controlo veja-se o quadro da página seguinte.
3. Escolha o *subgrupo racional* — os dados, cronologicamente marcados numa carta de controlo, estão associados a grupos de unidades do produto, os chamados subgrupos racionais.
4. Forneça o sistema para recolha de dados.
5. Identifique a linha central e os limites de controlo. A linha central pode ser a média de dados previamente recolhidos, ou pode ser uma média desejada ou um máximo desejado, por exemplo. Os limites de controlo são usualmente colocados a uma distância de LC de ± 3 desvios padrão, mas

outros múltiplos podem ser escolhidos, para diferentes riscos estatísticos, ou, mais rigorosamente do ponto de vista estatístico, pode-se recorrer à distribuição de amostragem da estatística escolhida.

6. Calcule os limites de controlo e forneça instruções específicas sobre a interpretação dos resultados e as acções a tomar pelo diferente pessoal.

<i>Estatísticas escolhidas</i>	Média e Amplitude; Média e Desvio Padrão; Mínimos e Máximos; Estatísticas Móveis; Observações Individuais; Sommas Cumulativas.	Percentagem p de não conformes; Número np de não conformes	Não conformes por unidade, u ; Não conformes, c .
<i>Tipo de Dados</i>	Quantitativos	Qualitativos	Qualitativos
<i>Campo de aplicação</i>	Controlo de características individuais	Controlo da fracção total de não conformes num processo	Controlo do número total de não conformes
<i>Vantagens</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Fornece máxima utilização da informação contida nos dados; • Fornece informação sobre a variância, para controlo de características individuais. 	<ul style="list-style-type: none"> • Os dados requeridos já foram previamente obtidos em registos de inspecção; • De muito fácil compreensão; • Fornecem um gráfico geral da qualidade. 	<ul style="list-style-type: none"> • Têm as mesmas vantagens da carta-p, e fornecem ainda uma medida do grau de não conformidade.
<i>Desvantagens</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Mais difíceis de serem compreendidas por leigos em estatística. 	<ul style="list-style-type: none"> • Não fornecem informação detalhada para o controlo de características individuais; • Não reconhecem diferentes graus de não conformidade, em unidades de produto. 	<ul style="list-style-type: none"> • Não fornecem informação detalhada para o controlo de características individuais.

5.3 Cartas de Controlo Usuais para Variáveis Quantitativas

As mais comuns são as cartas de médias (\bar{X}), para controlar a média do processo de produção, e as cartas de amplitudes (R), para controlar a variabilidade do processo de produção.

5.3.1 Carta- \bar{X}

Estas cartas são usualmente implementadas sob as seguintes hipóteses: modelo Normal(μ, σ) subjacente aos dados e observações independentes. Em geral é necessário estimar as normas do processo, μ_0 e σ_0 , dispondo-se para o efeito de dados prévios de k subgrupos racionais de dimensão n , $(X_{11}, \dots, X_{1n}), (X_{21}, \dots, X_{2n}), \dots, (X_{k1}, \dots, X_{kn})$. Além disso, é-nos frequentemente fornecida informação condensada, constituída pelas médias e amplitudes dos k subgrupos, atrás referidos:

$$\bar{X}_{1n}, \bar{X}_{2n}, \dots, \bar{X}_{kn}, \quad \bar{\bar{X}} = \sum_{i=1}^k \bar{X}_{in}/k,$$

$$R_{1n}, R_{2n}, \dots, R_{kn}, \quad \bar{R} = \sum_{i=1}^k R_{in}/k.$$

Como $\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$, temos a situação apresentada a seguir.

Carta de controlo 3-sigma:

$$LCS = \hat{\mathbb{E}}(\bar{X}_n) + 3 \widehat{SD}(\bar{X}_n) = \bar{\bar{X}} + 3\hat{\sigma}/\sqrt{n},$$

$$LCI = \hat{\mathbb{E}}(\bar{X}_n) - 3 \widehat{SD}(\bar{X}_n) = \bar{\bar{X}} - 3\hat{\sigma}/\sqrt{n},$$

onde SD denota o desvio padrão (*Standard Deviation*), $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$, $d_2 = d_{2,n} = \mathbb{E}(R_n/\sigma)$, definido em (4.7). Como já foi dito anteriormente, também se pode considerar:

$$LCS = \bar{\bar{X}} + \xi_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}/\sqrt{n},$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - \xi_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}/\sqrt{n},$$

onde $\xi_{1-\alpha/2}$ é o quantil de probabilidade $1 - \alpha/2$ de uma distribuição Normal reduzida, sendo α usualmente 0.002.

Os valores de $d_2 = d_{2n}$, em populações normais são os seguintes:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_2	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.078

O valor mais usual para n , em *Controlo da Qualidade*, é $n = 5$.

E se a característica de qualidade X não for Normal? Do ponto de vista de rigor estatístico tudo vai depender do modelo subjacente a X . Do ponto de vista prático podemos ter complicações, eventualmente sem grandes benefícios.

Admitamos que o modelo subjacente é Exponencial(λ, δ). Então

$$\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\delta/n} \stackrel{d}{=} \text{Gama}(n),$$

e conseqüentemente, ao nível de significância α ,

$$LCI = \hat{\lambda} + \frac{\hat{\delta}}{n} \chi_{\alpha/2, \text{Gama}(n)}, \quad LCS = \hat{\lambda} + \frac{\hat{\delta}}{n} \chi_{1-\alpha/2, \text{Gama}(n)}.$$

Como estimar λ e δ se tivermos unicamente acesso às médias e amplitudes? Pode-se por exemplo considerar,

$$\hat{\lambda} = \bar{\bar{X}} - \bar{R}/d_{2,n}, \quad \hat{\delta} = \bar{R}/d_{2,n},$$

em que

$$d_{2,n} = d_{2,n|EXP} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

Cartas de controlo para o parâmetro de escala de um modelo Weibull podem ser encontradas em Ramalhoto & Morais²⁵ (1999), por exemplo.

²⁵ Ramalhoto, M.F. & M.C. Morais (1999). Shewhart control charts for the scale parameter of a Weibull control variable with fixed and variable sampling intervals. *J. of Applied Statistics* **26**, 129-160.

5.3.2 Carta- R

Os valores das diferentes amplitudes amostrais são marcados na carta- R , tendo-se como linhas de controlo, e caso consideremos uma carta 3-sigma,

$$\begin{aligned} LCS &= \widehat{\mathbb{E}}(R) + 3\widehat{SD}(R) = \bar{R} + 3\widehat{\sigma}_R, \\ LCI &= \widehat{\mathbb{E}}(R) - 3\widehat{SD}(R) = \bar{R} - 3\widehat{\sigma}_R. \end{aligned}$$

Como estimar σ_R , o desvio padrão de R_n ? Tal como existem tabelas de $\mathbb{E}(R_n/\sigma)$, usualmente designado por $d_2 = d_{2n}$, também existem tabelas de $SD(R_n/\sigma)$, usualmente designado por $d_3 = d_{3n}$.

Como $SD(R_n) = \sigma d_{3n}$, tem-se

$$\widehat{\sigma}_R = d_3 \widehat{\sigma} = d_3 \bar{R}/d_2,$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} LCS &= \bar{R}(1 + 3d_3/d_2) =: \bar{R} D_4, \\ LCI &= \bar{R} \max(0, 1 - 3d_3/d_2) =: \bar{R} D_3. \end{aligned}$$

Alguns valores destas *constantes*, em modelo Normal, aparecem na tabela seguinte:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_3	0.852	0.888	0.880	0.864	0.848	0.833	0.820	0.808	0.797
D_3	0	0	0	0	0	0.076	0.136	0.184	0.223
D_4	3.267	2.575	2.282	2.115	2.004	1.924	1.864	1.816	1.777

Estas cartas de controlo 3-sigma podem tornar-se perigosas pois a estatística R é altamente assimétrica, de forma a suportar os valores ± 3 , o que leva a dever considerar-se Cartas- R com base na *distribuição de amostragem*, i.e., cartas com limites de controlo

$$LCS = \chi_{1-\alpha/2,R} \quad \text{e} \quad LCI = \chi_{\alpha/2,R},$$

considerando-se usualmente $\alpha = 0.002$.

Recorrendo aos pontos percentuais de $W_n = R_n/\sigma$, que não dependem de parâmetros desconhecidos, tem-se

$$LCS = \hat{\chi}_{.999,R} = \chi_{.999,W} \quad \hat{\sigma} = \chi_{.999,W} \bar{R}/d_2,$$

$$LCI = \hat{\chi}_{.001,R} = \chi_{.001,W} \quad \hat{\sigma} = \chi_{.001,W} \bar{R}/d_2.$$

Pontos percentuais de $W_n = R_n/\sigma$, em modelo Normal(μ, σ):

n	p									
	.001	.005	.01	.025	.05	.95	.975	.99	.995	.999
2	0.00	0.01	0.02	0.04	0.09	2.77	3.17	3.64	3.97	4.65
3	0.06	0.13	0.19	0.30	0.43	3.31	3.68	4.12	4.42	5.06
4	0.20	0.34	0.43	0.59	0.76	3.63	3.98	4.40	4.69	5.31
5	0.37	0.55	0.66	0.85	1.03	3.86	4.20	4.60	4.89	5.48
6	0.54	0.75	0.87	1.06	1.25	4.03	4.36	4.76	5.03	5.62
7	0.69	0.92	1.05	1.25	1.44	4.17	4.49	4.88	5.15	5.73
8	0.83	1.08	1.20	1.41	1.60	4.29	4.61	4.99	5.26	5.82
9	0.96	1.21	1.34	1.55	1.74	4.39	4.70	5.08	5.34	5.90
10	1.08	1.33	1.47	1.67	1.86	4.47	4.79	5.16	5.42	5.97

Modelos diferentes do modelo Normal, fornecerão pontos percentuais diferentes para W_n , usualmente mais fáceis de obter.

Consideremos mais uma vez o modelo Exponencial(λ, δ). Note-se que com $Y = (X - \lambda)/\delta$, temos

$$R_n := X_{n:n} - X_{1:n} = \delta (Y_{n:n} - Y_{1:n}).$$

Usando a expressão (4.8), tem-se

$$\begin{aligned} F_{Y_{n:n}-Y_{1:n}}(r) &= n \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(e^{-x} - e^{-(x+r)} \right)^{n-1} dx \\ &= n (1 - e^{-r})^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = (1 - e^{-r})^{n-1}, \end{aligned}$$

a distribuição do máximo de $n - 1$ variáveis aleatórias i.i.d. provenientes de um modelo Exponencial *standard* (veremos mais adiante uma justificação para esta distribuição, recorrendo à *falta de memória* do modelo Exponencial).

Então

$$F_{R_n}(r) = \left(1 - e^{-r/\delta}\right)^{n-1},$$

e os Limites de Controlo, a um risco- α , em *carta equilibrada*, vêm dados por

$$\begin{aligned} LCS &= -\hat{\delta} \ln \left(1 - (1 - \alpha/2)^{1/(n-1)}\right), \\ LCI &= -\hat{\delta} \ln \left(1 - (\alpha/2)^{1/(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Se nos forem previamente fornecidos um valor médio μ_0 e um desvio padrão σ_0 da característica de qualidade X em estudo, os limites de controlo 3-sigma, serão:

$$\text{CARTA-}\bar{X} : \begin{cases} LCS = \mu_0 + 3\sigma_0/\sqrt{n} \\ LCI = \mu_0 - 3\sigma_0/\sqrt{n}, \end{cases}$$

$$\text{CARTA-}R : \begin{cases} LCS = d_2\sigma_0 + 3d_3\sigma_0 = \sigma_0(d_2 + 3d_3) \\ LCI = \sigma_0 \max(0, (d_2 - 3d_3)). \end{cases}$$

Em linguagem de *Controlo da Qualidade*:

$$A_2 = 3/(d_2\sqrt{n}), \quad D_1 = d_2 - 3d_3 \quad \text{e} \quad D_2 = d_2 + 3d_3. \quad (5.1)$$

Algumas modificações a esta carta são sugeridas em Khoo & Lim²⁶ (2005).

5.3.3 Curva Característica

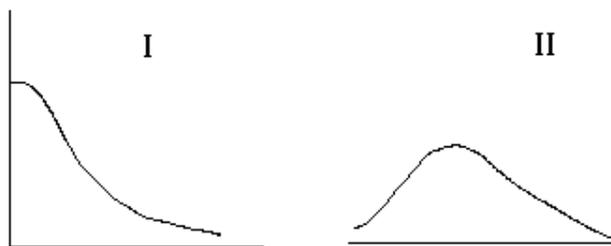
A noção de *curva característica* de uma carta de controlo está directamente relacionada com a noção de *potência de um teste*, na linguagem usual da *Estatística*. Na realidade, uma carta de controlo é, como já vimos, um teste perpétuo, em que as hipóteses são:

²⁶ Khoo, M.B. & E.G. Lim (2005). An improved R (Range) control chart for monitoring the process variance. *Quality and Reliability Engineering Int.* **21**, 43-50.

H_0 : o processo está sob controlo (em $\text{Normal}(\mu, \sigma)$, por ex.)

H_1 : o processo está fora de controlo (em $\text{Normal}(\mu, \sigma' > \sigma)$).

A *curva característica* dá-nos a probabilidade de uma observação futura cair dentro dos limites de controlo, quando H_1 é verdadeira (erro de tipo II, $\beta(\cdot)$). Temos pois, conforme explicitarmos em H_1 uma hipótese unilateral ou bilateral, curvas do tipo:



Por exemplo, no caso da carta- R , e considerando em H_1 um modelo $\text{Normal}(\mu, \sigma' = \sigma \theta)$, $\theta \neq 1$, teremos

$$CC(\theta) \equiv \beta(\theta) := \mathbb{P} \left(\frac{LCI}{\sigma \theta} < W_n < \frac{LCS}{\sigma \theta} \right),$$

valor este que se pode obter a partir das tabelas da distribuição da amplitude W_n em amostras de dimensão n de uma população $\text{Normal}(0,1)$.

Em *Controlo da Qualidade* é tradicional admitir que se está a trabalhar com estimativas *precisas* de μ e σ , não se entrando pois em linha de conta com a distribuição de amostragem dos estimadores correspondentes, o que sendo obviamente errado de um ponto de vista estatístico, não conduz usualmente a erros graves.

Hillier²⁷ (1964) examinou os erros cometidos quando não se entra em linha de conta com a distribuição de amostragem de \bar{X} e de

²⁷ Hillier, F.S. (1964). \bar{X} chart control limits based on a small number of subgroups. *Industr. Qual. Contr.* **20**, 24-29.

R em cartas- \bar{X} . Quando se pensa então na probabilidade de uma futura média \bar{X} cair fora das linhas de controlo, tem-se, com A_2 definido em (5.1),

$$p = 1 - \mathbb{P}\left(-A_2 < \frac{\bar{X} - \bar{\bar{X}}}{\bar{R}} < A_2\right), \quad (5.2)$$

onde agora $\bar{\bar{X}}$ e \bar{R} são baseados em k amostras prévias de dimensão n . A partir da aproximação de Patnaik²⁸ (1950) para a distribuição de \bar{R}/σ segue-se que $(\bar{X} - \bar{\bar{X}})/\bar{R}$ tem uma distribuição bem aproximada da da v.a

$$\frac{Z\left(\sqrt{1/(nk)} + 1/n\right)}{c \chi_\nu / \sqrt{\nu}} \stackrel{d}{=} \frac{\sqrt{k+1}}{c \sqrt{nk}} t_\nu,$$

onde Z é Normal(0, 1), t_ν é uma v.a. t -de-Student com ν graus de liberdade, χ_ν^2 é uma v.a. χ^2 com ν graus de liberdade, c e ν constantes tabeladas, que são obtidas igualando os dois primeiros momentos de \bar{R}/σ e de $c\chi_\nu/\sqrt{\nu}$, sendo k o número de amostras e n a dimensão das amostras (ou subgrupos racionais).

A título ilustrativo, apresentamos a seguir tabelas de c e ν para os valores usuais de n e k :

n	2		3		4		5	
k	ν	c	ν	c	ν	c	ν	c
1	1.00	1.41	1.98	1.91	2.93	2.24	3.83	2.48
2	1.92	1.28	3.83	1.1	5.69	2.15	7.47	2.40
3	2.82	1.23	5.66	1.77	8.44	2.12	11.1	2.38
4	3.71	1.21	7.49	1.75	11.2	2.11	14.7	2.37
5	4.59	1.19	9.30	1.74	13.9	2.10	18.4	2.36

Hillier (1964) mostra que para $n = 5$ o valor de p , em (5.2), aumenta, passando do seu suposto valor 0.0027 (correspondente a

²⁸ Patnaik, P.B. (1950). The use of mean range as an estimator of variance in statistical tests. *Biometrika* **37**, 78-87.

$k = \infty$) a, por exemplo, 0.0044, 0.0067, 0.012 para $k = 20, 10, 5$, respectivamente. Reciprocamente Hillier dá, para $n = 5$ e para vários valores de k , os valores A_2^* que tornam

$$p^* = 1 - \mathbb{P}\left(-A_2^* < \frac{\bar{X} - \bar{\bar{X}}}{\bar{W}} < A_2^*\right) = \alpha,$$

$$\alpha = 0.001, 0.0027(\text{cartas 3-sigma}), 0.01, 0.025, 0.05.$$

A curva característica pode também ser obtida. Resultados semelhantes podem ser obtidos para Cartas- R (Hillier²⁹, 1967).

Para uma análise de erros cometidos ao usar cartas-padrão (para modelo Normal) quando o modelo é nitidamente não-Normal veja-se também a monografia de Miranda³⁰ (1992).

5.4 Cartas de Controlo para Variáveis Qualitativas

Nesta secção iremos referir brevemente os dois tipos de cartas mais usuais para variáveis de tipo qualitativo, as Cartas- p , para a fracção rejeitada como não conforme com as especificações, e as Cartas- c , para o número de não conformes, associadas a modelos Binomial e de Poisson, respectivamente. Algumas modificações sugeridas a este tipo de cartas, assim como informação mais detalhada sobre cartas de controlo para variáveis qualitativas, podem ser encontradas, por exemplo, em Borrer *et al.*³¹ (1998), McCool & Joyner-Motley³² (1998), Morais & Natário³³ (1998), Reynolds

²⁹ Hillier, F.S. (1967). Small sample probability limits for the range chart. *J. Amer. Statist. Assoc.* **63**, 1488-93. Correction **63**, 1549-50.

³⁰ Miranda, M.C. (1992). *Influência do Modelo em Cartas de Controlo*. Tese de Mestrado, DEIO, Faculdade de Ciências de Lisboa.

³¹ Borrer, C.M., C.W. Champ & S.E. Rigdon (1998). Poisson EWMA control charts. *J. Quality Technology* **30**, 352-361.

³² McCool, J.I. & T. Joyner-Motley (1998). Control charts applicable when the fraction nonconforming is small. *J. Quality Technology* **30**, 240-247.

³³ Morais, M.C. & I. Natário (1998). Improving an upper one-sided c -chart. *Communications in Statistics - Theory and Methods* **27**, 353-364.

& Stoumbos³⁴ (1999), Fang³⁵ (2003), Khoo³⁶ (2004), Wu & Luo³⁷ (2004), Morais & Pacheco³⁸ (2006), Chan *et al.*³⁹ (2007), Wu & Jiao⁴⁰ (2007) e Wu & Wang⁴¹ (2007). Finalmente é de referir que a monitorização de processos de alta qualidade exige a utilização de cartas de controlo capazes de detectar pequenas alterações na fracção de não conformes produzida, o que não acontece com as cartas usuais para atributos. Para colmatar esta lacuna podemos recorrer, por exemplo, às cartas propostas em Ohta *et al.*⁴² (2001) e em Chang & Gan⁴³ (2007).

5.4.1 Carta- p

Seja X = Número de observações não conformes em n .
Admitamos que X segue um modelo *Binomial*(n, p).

Frequências absolutas: X_1, X_2, \dots, X_k .

Frequências relativas: p_1, p_2, \dots, p_k , $p_i = X_i/n$, $1 \leq i \leq k$.

³⁴ Reynolds, M.Jr. & Z.G. Stoumbos (1999). A CUSUM chart for monitoring a proportion when inspecting continuously. *J. Quality Technology* **31**, 87-108.

³⁵ Fang, Y. (2003). C -charts, X -charts, and the Katz family of distributions. *J. Quality Technology* **35**, 104-114.

³⁶ Khoo, M.B. (2004). A moving average control chart for monitoring the fraction non-conforming. *Quality and Reliability Engineering Int.* **20**, 617-635.

³⁷ Wu, Z. & H. Luo (2004). Optimal design of the adaptive sample size and sampling interval np control chart. *Quality and Reliability Engineering Int.* **20**, 553-570.

³⁸ Morais, M.C. & A. Pacheco (2006a). Combined CUSUM-Shewhart schemes for binomial data. *Economic Quality Control* **41**, 43-57.

³⁹ Chan, L.-Y., J. Ouyang & H.Y.-K. Lau (2007). A two-stage cumulative quantity control chart for monitoring Poisson processes. *J. Quality Technology* **39**, 203-223.

⁴⁰ Wu, Z. & J. Jiao (2007). Evaluating and improving the unit and group-runs chart. *J. Quality Technology* **39**, 355-363.

⁴¹ Wu, Z. & Q. Wang (2007). An np control chart using double inspections. *J. Applied Statistics* **34**, 843-855.

⁴² Ohta, H., E. Kuskawa & A. Rahim (2001). A $CCC - r$ chart for high-yield processes. *Quality and Reliability Engineering Int.* **17**, 439-446.

⁴³ Chang, T.C. & F.F. Gan (2007). Modified Shewhart charts for high yield processes. *J. Applied Statistics* **34**, 857-877.

Considerando a estimativa global de p ,

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^k p_i/k,$$

os limites de controlo serão então:

$$LCI = \max\left(0, \bar{p} - 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}\right),$$

$$LCS = \min\left(1, \bar{p} + 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}\right).$$

5.4.2 Carta- c

O produto manufacturado é por exemplo constituído por unidades de grande dimensão, como um rádio, em que podem existir não conformidades em inúmeros pontos, embora cada unidade só tenha alguns pontos não conformes. Pode consequentemente considerar-se que a v.a.,

$$X = \text{Número de não conformidades},$$

segue uma distribuição de Poisson(c).

Como $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = c$, temos os seguintes limites de controlo:

$$LCI = \max\left(0, \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}\right), \quad LCS = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}.$$

5.5 Cartas de Controlo Especiais

Estas cartas surgiram mais recentemente na literatura de modo a colmatar algumas das deficiências das cartas de Shewhart, no que diz respeito, por exemplo, à dificuldade em detectar pequenas alterações nos parâmetros do processo e à falta de robustez

relativamente às hipóteses subjacentes à sua implementação, nomeadamente a independência e normalidade dos dados. Para detalhes sobre este tipo de cartas consultem-se as monografias de Figueiredo⁴⁴ (1995), Morais⁴⁵ (1995), Morais⁴⁶ (2002), Figueiredo⁴⁷ (2003) e Antunes⁴⁸ (2009), assim como as referências aí citadas.

5.5.1 Cartas de Controlo para Máximos e Mínimos

Seja

$$\begin{cases} L = \max_{1 \leq i \leq n} X_i \\ S = \min_{1 \leq i \leq n} X_i. \end{cases}$$

Com base em observações prévias, admita-se que se tinham fixado (\bar{L}, \bar{S}) , onde \bar{L} e \bar{S} denotam respectivamente a média de k máximos e a média de k mínimos, em amostras de dimensão n . Sob a validade do modelo Normal, temos para estimadores centrados de μ e σ ,

$$M = \frac{\bar{L} + \bar{S}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{\bar{L} - \bar{S}}{d_2},$$

respectivamente.

Nas cartas 3-sigma de máximos e mínimos temos então os seguintes limites de controlo:

$$LCS = \hat{\mu}_L + 3\hat{\sigma}_L = \bar{L} + 3\hat{\sigma}_L, \quad LCI = \hat{\mu}_L - 3\hat{\sigma}_L = \bar{L} - 3\hat{\sigma}_L.$$

⁴⁴ Figueiredo, F. (1995). *Desenvolvimentos Recentes em Cartas de Controlo — Cartas CUSUM e Cartas EWMA*. Tese de Mestrado, DEIO, Faculdade de Ciências de Lisboa.

⁴⁵ Morais, M.C. (1995). *Cartas de Controlo FSI e VSI para o Parâmetro de Escala da População Weibull Tri-paramétrica*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.

⁴⁶ Morais, M.C. (2002). *Stochastic Ordering in the Performance Analysis of Quality Control Schemes*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.

⁴⁷ Figueiredo, F. (2003). *Controlo Estatístico da Qualidade e Cartas Robustas*. Tese de Doutoramento, DEIO, Faculdade de Ciências de Lisboa.

⁴⁸ Antunes, C.P. (2009). *Avaliação do Impacto da Correlação em Simais Erróneos de Esquemas Conjuntos para o Valor Esperado e a Variância*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.

Em modelo Normal, $\sigma_L = \sigma_S =: d_4 \sigma$, sendo $d_4 = d_{4n}$ dado por

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_4	.8256	.7480	.7092	.6690	.6449	.6260	.6107	.5978	.5878

Têm-se então os seguintes limites de controlo,

$$LCS = M + A_3 \bar{R}, \quad LCI = M - A_3 \bar{R},$$

com

$$A_3 = 0.5 + 3d_4/d_2,$$

dado, em modelo Normal, por

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_3	2.695	1.826	1.522	1.363	1.263	1.195	1.143	1.104	1.072

Estas cartas foram estudadas por Howell⁴⁹ (1949) e por Austin⁵⁰ (1973), por entre outros.

Genericamente, em modelo $F(\cdot)$, é usual recorrer-se à distribuição de amostragem do máximo e do mínimo, dadas em (4.4) e em (4.5) respectivamente, construindo em seguida uma carta equilibrada, i.e.,

$$LCS = \chi_{1-\alpha/2; X_{n:n}}, \quad LCI = \chi_{\alpha/2; X_{1:n}},$$

ou ainda

$$LCS = F^{-1}((1-\alpha/2)^{1/n}), \quad LCI = F^{-1}(1 - (1-\alpha/2)^{1/n}) \quad (5.3)$$

onde $F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}$ é, mais uma vez, a função inversa generalizada de $F(\cdot)$.

Em modelo Normal é também frequente utilizar os Limites de Controlo em (5.3) para uma Carta- M/m , tomando como aproximação para a inversa da f.d. Normal Φ o valor

$$\Phi^{-1}(p) \approx 4.91 (p^{0.14} - (1-p)^{0.14}),$$

⁴⁹ Howell, J.M. (1949). Control chart for largest and smallest values. *Ann. Math. Statist.* **21**, 615-616.

⁵⁰ Austin, J.A., Jr. (1973). Control chart constants for largest and smallest in sampling from a normal distribution using the generalized Burr distribution. *Technometrics* **15**, 931-933.

fornecido em Walpole & Myers⁵¹ (1993). Amin *et al.*⁵² (1999) propõem uma carta de controlo baseada na maior e menor observação da amostra, alternativa a esta.

5.5.2 Carta de Médias Móveis, MA

Na carta de *médias móveis*, designada por *carta-MA* (de *moving average*), representa-se a média móvel de n observações, geralmente 4 ou 5, e em cada instante da representação a observação mais antiga é desprezada em favor da mais recente para o cálculo da nova média. Os valores representados são comparados com duas linhas de acção, como no caso das cartas de Shewhart.

Estas cartas são mais eficazes do que as cartas de médias na detecção de pequenas mudanças, mas quando se pretende que as especificações sejam cumpridas de forma mais apertada, as cartas CUSUM e EWMA, a estudar na Secções 5.5.3, são preferíveis, pelo facto de considerarem, com determinado peso, o valor de todas as observações obtidas até ao instante da representação, em vez de actualizarem a estatística de controlo apenas com o último valor. Outras cartas de controlo também baseadas em somas e médias móveis, mas diferentes destas, têm sido propostas na literatura, por exemplo, em Bauer & Hackl⁵³ (1980) e Dyer *et al.*⁵⁴ (2003), entre outros.

⁵¹ Walpole, R.E. & R.H. Myers (1993). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 5th edition. Macmillan.

⁵² Amin, R.W., H. Wolff, W. Besenfelder & R.Jr. Baxley (1999). EWMA control charts for the smallest and largest observations. *J. Quality Technology* **31**, 189-206.

⁵³ Bauer, P. & P. Hackl (1980). An extension of the MOSUM technique for quality control. *Technometrics* **22**, 1-7.

⁵⁴ Dyer, J.N., B.M. Adams & M.D. Conerly (2003). The reverse moving average control chart for monitoring autocorrelated processes. *J. Quality Technology* **35**, 139-152.

5.5.3 Cartas CUSUM (cumulative sum) e EWMA (exponentially weighted moving average)

São cartas alternativas às cartas de Shewhart, cujas estatísticas de controlo são do seguinte tipo:

$$\text{Estatística CUSUM: } S_i = \sum_{j=1}^i (W_j - \theta_0) = S_{i-1} + (W_i - \theta_0), \quad S_0 = 0,$$

$$\text{Estatística EWMA: } Z_i = \lambda W_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \quad Z_0 = \theta_0, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

onde a estatística W_i a acumular é, em geral, um estimador centrado do parâmetro θ_0 que se pretende monitorizar, ou simplesmente as observações individuais. O parâmetro λ na estatística EWMA é responsável pela atribuição de pesos diferentes às observações recente e anteriores. Os valores destas estatísticas serão comparados com duas linhas de acção, tal como no caso das cartas de Shewhart.

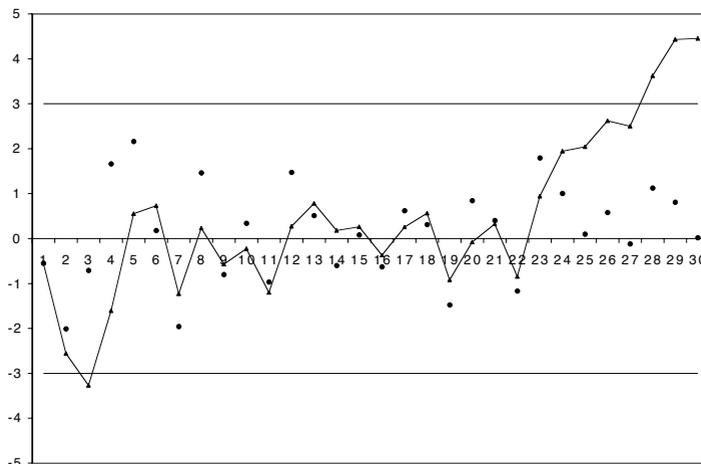
Principais vantagens deste tipo de cartas:

- Em cada instante usam informação contida em todos os pontos amostrais;
- São mais sensíveis a pequenos desvios no processo;
- São menos sensíveis à hipótese de normalidade, sendo por isso mais adequadas quando trabalhamos com observações individuais.

Exemplo: Para ilustrar a sensibilidade de uma estatística do tipo CUSUM a pequenas alterações ocorridas no valor médio de um processo, consideremos dados aleatoriamente gerados em computador, apresentados na tabela que se segue, juntamente com os valores da estatística CUSUM, $S_i = \sum_{j=1}^i (X_j - \mu_0) = S_{i-1} + (X_i - \mu_0)$, $S_0 = 0$. As primeiras 20 observações são provenientes de um modelo Normal(10, 1), e as últimas 10 observações são provenientes de modelo Normal(10.5, 1), i.e., houve uma alteração no valor médio de 0.5σ .

Enquanto a carta- X é completamente insensível à alteração, a representação gráfica da estatística CUSUM, baseada nas próprias observações, apresenta uma tendência crescente, a partir do ponto amostral número 22, como se deprende da figura seguinte.

i	x_i	$x_i - 10$	S_i	LCI_X	LCS_X
1	9.45	-0.55	-0.55	-3	3
2	7.99	-2.01	-2.56	-3	3
3	9.29	-0.71	-3.27	-3	3
4	11.66	1.66	-1.61	-3	3
5	12.16	2.16	0.55	-3	3
6	10.18	0.18	0.73	-3	3
7	8.04	-1.96	-1.23	-3	3
8	11.46	1.46	0.23	-3	3
9	9.20	-0.80	-0.57	-3	3
10	10.34	0.34	-0.23	-3	3
11	9.03	-0.97	-1.20	-3	3
12	11.47	1.47	0.27	-3	3
13	10.51	0.51	0.78	-3	3
14	9.40	-0.60	0.18	-3	3
15	10.08	0.08	0.26	-3	3
16	9.37	-0.63	-0.37	-3	3
17	10.62	0.62	0.25	-3	3
18	10.31	0.31	0.56	-3	3
19	8.52	-1.48	-0.92	-3	3
20	10.84	0.84	-0.08	-3	3
21	10.40	0.40	0.32	-3	3
22	8.83	-1.17	-0.85	-3	3
23	11.79	1.79	0.94	-3	3
24	11.00	1.00	1.94	-3	3
25	10.10	0.10	2.04	-3	3
26	10.58	0.58	2.62	-3	3
27	9.88	-0.12	2.50	-3	3
28	11.12	1.12	3.62	-3	3
29	10.81	0.81	4.43	-3	3
30	10.02	0.02	4.45	-3	3



Cartas CUSUM

Estas cartas foram introduzidas por Page⁵⁵ (1954). A estatística mais frequentemente utilizada para monitorizar o valor médio de um processo é

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0) = S_{i-1} + (\bar{X}_i - \mu_0), \quad S_0 = 0, \quad (5.4)$$

onde \bar{X}_j representa a média da j -ésima amostra de dimensão n retirada do processo e μ_0 denota o valor médio pretendido.

Note-se que o impacto visual destas cartas é elevado, pois mudanças no valor médio são detectadas por mudanças na inclinação dos pontos representados.

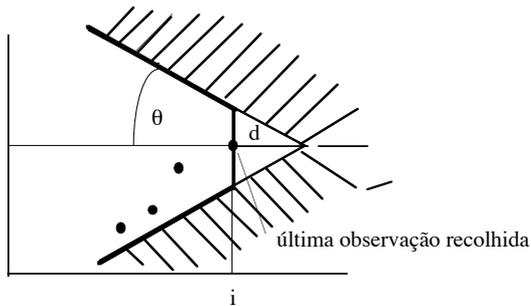
Sob a validade de $H_0 : X$ é $\text{Normal}(\mu_0, \sigma)$, a estatística S_i flutuará estocasticamente em torno de 0, i.e., trata-se na realidade de um passeio aleatório, com valor médio 0.

Sob a validade de $H_1 : X$ é $\text{Normal}(\mu_1, \sigma)$, $\mu_1 > \mu_0$, existirá uma *tendência crescente* nos pontos representados. Analogamente, sob

⁵⁵ Page, E.S. (1954). An improvement to Wald's approximation for some properties of sequential tests. *J. Royal Statist. Soc.* **B** 16, 136-139.

a validade de $H_1 : X$ é $\text{Normal}(\mu_1, \sigma)$, $\mu_1 < \mu_0$, existirá uma *tendência decrescente*.

Para determinar se o processo está ou não sob controlo, e em particular para detectar alterações de determinada amplitude no valor médio do processo, Barnard⁵⁶ (1959) tornou popular a utilização de uma *máscara-V* (*V-mask*), com o seguinte aspecto gráfico,



a qual já tinha sido sugerida inicialmente por Page (1954).

O parâmetro d mede a distância entre o último ponto S_i representado na carta e o vértice da máscara. O parâmetro θ corresponde a metade do ângulo entre os braços, sendo a máscara simétrica. À medida que se dispõe de um novo S_i , vamos deslocando a máscara.

Sob a validade de H_0 , todos os pontos têm de estar entre os braços da máscara. O primeiro valor S_i que fica fora dos braços da máscara assinala o instante em que o processo deixou de estar *sob controlo*. Se o braço inferior é atravessado isso indica um aumento no valor médio do processo, enquanto o cruzamento do braço superior significa que houve uma redução no valor médio.

Pode ainda determinar-se uma estimativa do valor médio do processo, face à inclinação dos pontos da carta. Assim, para dois instantes de tempo i e j , convenientemente escolhidos, tem-se a

⁵⁶ Barnard, G.A. (1959). Control charts and stochastic processes. *J. Royal Statist. Soc.* **B 21**, 239-257.

seguinte estimativa para o valor médio do processo de produção:

$$\hat{\mu} = \mu_0 + \frac{S_i - S_j}{i - j}.$$

É evidente que as propriedades da carta de controlo associada à máscara dependem da escolha dos parâmetros d e θ que permitem a sua construção. Basta referir, por exemplo, que quanto maior forem os valores destes parâmetros, menos frequentes serão as interrupções do processo. Vários estudos efectuados, veja-se por exemplo Kemp⁵⁷ (1961), levaram a concluir que, em muitas situações, uma escolha satisfatória para estes parâmetros é a seguinte:

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2} \right) \ln \left(\frac{1 - \beta}{\alpha} \right) \quad \text{e} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\Delta}{2A} \right),$$

sendo α e β os erros de tipo I e tipo II, respectivamente, Δ a alteração no valor médio do processo que pretendemos detectar medida em unidades do desvio padrão de \bar{X} , i.e., $\Delta = \delta\sigma_{\bar{X}}$, e A um factor de escala que relaciona a unidade da escala vertical usada para representar as somas S_i com a unidade da escala horizontal usada para representar a ordem i das amostras, considerando-se usualmente $A = 2\sigma_{\bar{X}}$.

Finalmente é de referir que estes parâmetros que definem a *V-mask* estão relacionados com os parâmetros que definem o plano de decisão intervalar equivalente à carta CUSUM, a seguir definido, mas não iremos aqui apresentar essas relações, pelo facto de a utilização da *V-mask* ter caído em desuso, face à introdução dos planos de decisão intervalar.

Planos de Decisão Intervalar

A carta CUSUM, em (5.4), é equivalente à utilização de dois procedimentos de decisão sequencial simultâneos, propostos por Ewan

⁵⁷ Kemp, K.W. (1961). The average run-length of the cumulative sum chart when a *V-mask* is used. *J. Royal Statist. Soc.* **B 23**, 149-153.

& Kemp⁵⁸ (1960), um para detectar aumentos no nível médio, *plano de decisão intervalar superior*, e outro para detectar diminuições, *plano de decisão intervalar inferior*, definidos em (5.5) e (5.6), respectivamente:

$$S_i^+ = \max \{0, S_{i-1}^+ + (\bar{X}_i - \mu_0) - k\}, \quad S_0^+ = 0, \quad (5.5)$$

$$S_i^- = \min \{0, S_{i-1}^- + (\bar{X}_i - \mu_0) + k\}, \quad S_0^- = 0, \quad (5.6)$$

onde o parâmetro positivo k , denominado *valor de referência*, está associado à amplitude de mudança no valor médio do processo, que é importante detectar rapidamente. O parâmetro positivo h , denominado *intervalo de decisão*, está associado à medida de variabilidade do processo, e como tal à regra de decisão. Em geral considera-se $h = 5\sigma_0$ e $k = |\mu_1 - \mu_0|/2$, onde σ_0 denota o desvio padrão do processo sob controlo e $|\mu_1 - \mu_0|$ a alteração que se pretende detectar no valor médio do processo. Tem-se então:

Regra de decisão para o plano superior:

- Se S_i^+ permanece não negativo e inferior ou igual a h , o teste continua;
- Se S_i^+ é superior a h , decide-se que o valor médio mudou para um nível mais alto e o plano termina para que seja tomada uma acção adequada;
- Se S_i^+ é negativo nenhuma acção é tomada, a não ser colocar S_i^+ em zero.

Regra de decisão para o plano inferior:

- Se S_i^- permanece não positivo e superior ou igual a $-h$, o teste continua;
- Se S_i^- é inferior a $-h$, decide-se que o valor médio mudou para um nível mais baixo e o plano termina para que seja tomada uma acção adequada;

⁵⁸ Ewan, W.D. & K.W. Kemp (1960). Sampling inspection of continuous processes with no autocorrelation between successive results. *Biometrika* **47**, 363-380.

- Se S_i^- é positivo nenhuma acção é tomada, a não ser colocar S_i^- em zero.

Regra de decisão para o plano bilateral:

- Se $S_i^+ \leq h$ e $S_i^- \geq -h$, o teste continua;
- Na primeira ocasião em que $S_i^+ > h$ ou $S_i^- < -h$, decide-se que o valor médio mudou e o plano termina para que seja tomada uma acção adequada.

Note-se que o valor de referência k é subtraído ou adicionado a cada observação da estatística de controlo, consoante se trate do plano superior ou do plano inferior, respectivamente. Este procedimento tem por objectivo evitar que as somas cumulativas S_i^+ e S_i^- aumentem ou diminuam muito rapidamente pela simples ocorrência casual de vários valores consecutivos acima ou abaixo de μ_0 , originando assim a emissão de muitos falsos alarmes. Por outras palavras, a introdução do valor k tem como efeito empurrar a soma S_i^+ para baixo e a soma S_i^- para cima, caso o valor médio do processo esteja a ser cumprido, i.e, seja igual a μ_0 .

Por outro lado, como apenas os valores $\bar{X}_i - \mu_0$ acima de k incrementam S_i^+ , esta soma tende a decrescer a longo prazo, levando o plano a indicar erroneamente uma redução no valor médio, pelo que, para evitar esta situação, se limita S_i^+ a valores positivos ou nulos. Analogamente, apenas os valores $\bar{X}_i - \mu_0$ abaixo de $-k$ diminuem S_i^- , e então esta soma tende a aumentar a longo prazo, levando o plano a indicar erroneamente um aumento no valor médio, pelo que limitamos S_i^- a valores negativos ou nulos.

Relativamente à escolha dos valores iniciais da estatística CUSUM, Lucas & Croisier⁵⁹ (1982) defenderam a utilização do *procedimento de resposta rápida* FIR – *Fast Initial Response* – nos planos CUSUM para controlar o valor médio, com o objectivo de melhorar a sensibilidade da carta no início do processo ou após ter sido

⁵⁹ Lucas, J.M. & R.B. Croisier (1982). Fast initial response for CUSUM quality control schemes: properties and enhancements. *Technometrics* **32**, 1-29.

dado um sinal de fora de controlo, bastando para tal considerar os seguintes *head-starts*: $S_0^+ = h/2$ e $S_0^- = -h/2$.

Se o processo se inicia *sob controlo*, a estatística CUSUM depressa tende para zero e estes valores iniciais têm pouco efeito no desempenho do plano. Se o processo se inicia *fora de controlo*, estes valores permitem que a alteração seja detectada mais rapidamente do que acontece numa carta CUSUM sem FIR.

Mais detalhes sobre este tipo de cartas podem ser encontrados em Hawkins & Olwell⁶⁰ (1998), Reynolds & Stoumbos⁶¹ (2004) e Shu *et al.*⁶² (2008).

Cartas EWMA

Estas cartas são essencialmente devidas a Roberts⁶³ (1959) e a Hunter⁶⁴ (1986). A estatística EWMA mais frequentemente utilizada para monitorizar o valor médio de um processo é

$$Z_t = \lambda \bar{X}_t + (1 - \lambda)Z_{t-1}, \quad Z_0 = \mu_0, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (5.7)$$

Note-se que para valores de λ próximos de um as observações mais recentes do processo têm maior peso, e portanto a carta EWMA aproxima-se da carta \bar{X} , obtendo-se mesmo a carta de médias se $\lambda = 1$. Para valores de λ próximos de zero a observação recente tem pouco peso e a carta EWMA aproxima-se da carta CUSUM. Assim, as cartas EWMA representam um compromisso entre as cartas de Shewhart usuais e as cartas CUSUM, as primeiras bas-

⁶⁰ Hawkins, D.M. & D.H. Olwell (1998). *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. Springer-Verlag.

⁶¹ Reynolds, M.Jr. & Z.G. Stoumbos (2004). Should observations be grouped for effective process monitoring. *J. Quality Technology* **36**, 343-366.

⁶² Shu, L., W. Jiang & K.-L. Tsui (2008). A weighted CUSUM chart for detecting patterned mean shifts. *J. Quality Technology* **40**, 194-213.

⁶³ Roberts, S.W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics* **1**, 239-250.

⁶⁴ Hunter, J.S. (1986). The exponentially weighted moving average. *J. Quality Technology* **8**, 1-12.

tante eficientes para detectar grandes mudanças no valor médio do processo e as últimas para detectar pequenas mudanças.

A estatística EWMA é na realidade uma estatística de médias móveis, pois

$$Z_t = \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \bar{X}_{t-j} + (1-\lambda)^t Z_0,$$

onde os pesos $\lambda(1-\lambda)^j$ decrescem geometricamente com a idade da média amostral, sendo a sua soma unitária. Por este motivo esta carta é muitas vezes designada por carta-GMA, de *Geometric Moving Average*.

É de referir ainda que esta estatística aparece muitas vezes em problemas de modelação de séries temporais e em previsão, e neste contexto costuma escrever-se na seguinte forma:

$$Z_t = Z_{t-1} + \lambda(\bar{X}_t - Z_{t-1}) = Z_{t-1} + \lambda e_t,$$

onde Z_{t-1} representa uma previsão para o valor médio no instante t e $e_t = \bar{X}_t - Z_{t-1}$ o erro de previsão.

Se considerarmos que as médias \bar{X}_t , em (5.7), são independentes, com variância σ^2/n , então a variância de Z_t é dada por

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) (1 - (1-\lambda)^{2t}),$$

que, quando $t \rightarrow \infty$, se aproxima de

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right).$$

Temos então os limites de controlo usuais da carta EWMA,

$$LCI = \mu_0 - 3\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}}, \quad LCS = \mu_0 + 3\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}},$$

onde μ_0 e σ_0 denotam as normas para o valor médio e para o desvio padrão do processo sob controlo, sendo em geral necessário estimá-las. Para os primeiros valores é usual considerar os limites de controlo exactos,

$$\mu_0 \pm 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) (1 - (1-\lambda)^{2t})}.$$

Nas cartas EWMA construídas para pequenos valores de λ , digamos $\lambda \leq 0.25$, é conveniente usar um procedimento FIR, análogo ao proposto por Lucas & Croisier (1982) para as cartas CUSUM, com o objectivo de tornar a carta mais sensível no início do processo, já que para valores pequenos de λ a variância da estatística de controlo converge lentamente para o seu valor assintótico.

Para detalhes sobre estas cartas consultar, por exemplo, Hackl & Ledolter⁶⁵ (1991), Gan⁶⁶ (1995), Steiner⁶⁷ (1999), Jiang *et al.*⁶⁸ (2000), Castagliola⁶⁹ (2001), Chen *et al.*⁷⁰ (2001), Morais & Pacheco⁷¹ (2006) e Shu & Jiang⁷² (2008).

⁶⁵ Hackl, P. & J. Ledolter (1991). A control chart based on ranks. *J. Quality Technology* **23**, 117-124.

⁶⁶ Gan, F.F. (1995). Joint monitoring of process mean and variance using exponentially weighted moving average control charts. *Technometrics* **37**, 446-453.

⁶⁷ Steiner, S.H. (1999). EWMA control charts with time-varying control limits and fast initial response. *J. Quality Technology* **31**, 75-86.

⁶⁸ Jiang, W., K.-L. Tsui & W.H. Woodall (2000). A new SPC monitoring method: the ARMA chart. *Technometrics* **42**, 399-410.

⁶⁹ Castagliola, P. (2001). An \bar{X}/R -EWMA control chart for monitoring the process sample median. *Int. J. of Reliability, Quality and Safety Engineering* **8**, 123-135.

⁷⁰ Chen, G., S.W. Cheng & H. Xie (2001). Monitoring process mean and variability with one EWMA chart. *J. Quality Technology* **33**, 223-233.

⁷¹ Morais, M.C. & A. Pacheco (2006b). Assessing the impact of head starts in the performance of one-sided Markov-type control schemes. *Sequential Analysis* **25**, 405-420.

⁷² Shu, L. & W. Jiang (2008). A new EWMA chart for monitoring process dispersion. *J. Quality Technology* **40**, 319-331.

5.6 Miscelânea de Cartas de Controlo

Para além das cartas atrás referidas e mais usadas na prática, muitas outras cartas têm sido propostas na literatura. Entre elas temos:

5.6.1 Cartas para Processos Short-runs, Batch e Multiple-stream

São cartas de controlo específicas para processos com uma baixa taxa de produção, conhecidos por *short-runs processes*, cartas para processos em que podem ser produzidos itens em grandes quantidades de uma só vez, conhecidos por *batch processes*, e cartas para processos que envolvem, por exemplo, diferentes máquinas e diferentes operadores, conhecidos por *multiple stream processes*. Alguns exemplos deste tipo de cartas podem ser encontrados em Chan *et al.*⁷³ (1996), Grimshaw *et al.*⁷⁴ (1998), Yoo *et al.*⁷⁵ (2004) e Xiang & Tsung⁷⁶ (2008).

5.6.2 Cartas não Paramétricas

Quando existe uma forte evidência de que a hipótese de normalidade subjacente à implementação da maior parte das cartas tradicionais não se verifica, podemos optar por uma abordagem não paramétrica, recorrendo por exemplo à metodologia *bootstrap* ou a outros estimadores não paramétricos para a construção da carta. Veja-se, por exemplo, Alloway & Raghavachar (1991), Seppala *et al.* (1995), Liu & Tang (1996), Pappanastos & Adams (1996),

⁷³ Chan, L.K., D.B. Macpherson & P.H. Xiao (1996). Standardized p control charts for short runs. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **13**, 88-95.

⁷⁴ Grimshaw, S.D., S.D. Shellman & A.M. Hurwitz (1998). Real-time process monitoring for changing inputs. *Technometrics* **40**, 283-296.

⁷⁵ Yoo, C.K., J.-M. Lee, P.A. Vanrolleghem & I.-B. Lee (2004). On-line monitoring of batch processes using multiway independent component analysis. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* **71**, 151-163.

⁷⁶ Xiang, L. & F. Tsung (2008). Statistical monitoring of multi-stage processes based on engineering models. *IIE Transactions* **40**, 957-970.

Wu & Wang (1996), Champ & Rigdon (1997), Jones & Woodall (1998), Cox & Iguzquiza (2001), Vermaat *et al.* (2003), Figueiredo & Gomes (2004), Albers *et al.* (2005), referenciados só na Bibliografia, e Chakraborti *et al.*⁷⁷ (2009).

5.6.3 Cartas para Perfis

Em muitas situações práticas a característica de qualidade que pretendemos monitorizar é definida por uma relação – *perfil* – entre duas ou mais variáveis. Neste sentido têm sido desenvolvidas cartas de controlo específicas para monitorização de perfis lineares – *linear profiles* – entre outros. Note-se que na construção destas cartas estão envolvidos procedimentos de regressão, e eventualmente de análise de dados multivariados como os de redução de dimensão, entre outros. Para mais detalhes pode consultar-se Kim *et al.*⁷⁸ (2003), Woodall *et al.*⁷⁹ (2004) e Zou *et al.*⁸⁰ (2007), entre outros trabalhos.

5.6.4 Outras Cartas Univariadas

Muitas outras áreas da estatística, e não só, têm contribuído para o desenvolvimento de novos instrumentos de *Controlo da Qualidade*. Entre a grande diversidade de cartas de controlo existentes, encontramos cartas baseadas em algoritmos genéticos, redes neuronais e metodologia bayesiana, por exemplo. Algumas dessas cartas são

⁷⁷ Chakraborti, S., S. Eryilmaz & S.W. Human (2009). A phase II nonparametric control chart based on precedence statistics with runs-type signaling rules. *Computational Statistics and Data Analysis* **53**, 1054-1065.

⁷⁸ Kim, K., M.A. Mahmoud & W.H. Woodall (2003). On the monitoring of linear profiles. *J. Quality Technology* **35**, 317-328.

⁷⁹ Woodall, W.W., D.J. Spitzner, D.C. Montgomery & S. Gupta (2004). Using control charts to monitor process and product quality profiles. *J. Quality Technology* **36**, 309-320.

⁸⁰ Zou, C., C. Zhou, Z. Wang & F. Tsung (2007). A self-starting control chart for monitoring linear profiles. *J. Quality Technology* **39**, 364-375.

descritas em Noorossana *et al.*⁸¹ (2003), Aparisi & Garcia-Díaz⁸² (2004), Costa & Rahim⁸³ (2006), Erto & Pallotta⁸⁴ (2007), Kang *et al.*⁸⁵ (2007) e Torng & Lee⁸⁶ (2009).

5.6.5 Cartas de Controlo Multivariadas

Os avanços nas técnicas de aquisição de dados *on-line* leva à introdução de sistemas automáticos de inspeção em tempo real, e conseqüentemente à necessidade de utilizar ferramentas para monitorizar grandes quantidades de dados, em geral multivariados. Note-se ainda que a qualidade global de um produto é em geral determinada em função de várias características de qualidade, quase sempre correlacionadas, pelo que a monitorização conjunta destas características é mais eficaz do que a monitorização individual de cada uma delas através de cartas de controlo univariadas. Um dos problemas que surge na monitorização de dados multivariados é o da interpretação de um sinal de fora de controlo. Para o solucionar é necessário desenvolver métodos de diagnóstico que permitam identificar quais as variáveis que são responsáveis pela emissão de sinal, o que nem sempre é fácil, nomeadamente quando se utilizam métodos de redução de variáveis. Por todos estes motivos, a extensão de cartas de controlo a dados multiva-

⁸¹ Noorossana, R., M. Farrokhi & A. Saghaei (2003). Using neural networks to detect and classify out-of-control signals in autocorrelated processes. *Quality and Reliability Engineering Int.* **19**, 493-504.

⁸² Aparisi, F. & J.C. Garcia-Díaz (2004). Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted moving-average control charts using genetic algorithms. *Computers and Operations Research* **31**, 1437-1454.

⁸³ Costa, A.F. & M.A. Rahim (2006). A synthetic control chart for monitoring the process mean and variance. *J. of Quality in Maintenance Engineering* **12**, 81-88.

⁸⁴ Erto, P. & G. Pallotta (2007). A new control chart for Weibull technological processes. *Quality Technology and Quantitative Management* **34**, 553-567.

⁸⁵ Kang, C.W., M.S. Lee, Y.J. Seong & D.M. Hawkins (2007). A control chart for the coefficient of variation. *J. Quality Technology* **39**, 151-158.

⁸⁶ Torng, C.-C. & P.-H. Lee (2009). The performance of double sampling \bar{X} control charts under non-normality. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* **38**, 541-557.

riados tem sido largamente estudada na literatura. Veja-se, entre outros trabalhos, Lowry *et al.* (1992), Fuchs & Benjamini (1994), Liu (1995), MacGregor & Kourti (1995), Qiu & Hawkins (2001), Sullivan & Jones (2002), Vargas (2003), Chang & Bai (2004), Jjang (2004), Lee *et al.* (2004), Runger & Testik (2004), Testik & Borrer (2004), Hawkins *et al.* (2007), Huwang *et al.* (2007), Runger *et al.* (2007), González & Sánchez (2008), Morais *et al.* (2008), Wang & Tsung (2008), referenciados só na Bibliografia, e Bandulasiri & Scariano⁸⁷ (2009).

5.7 Políticas Amostrais

Política FSI — Os intervalos amostrais (intervalos entre qualquer par de observações fixas e consecutivas) são fixos e iguais a $d > 0$.

Política VSI — Os intervalos amostrais variam, dependendo da localização das observações recolhidas. Se o valor da estatística sumária estiver muito afastado da linha central, mas não o suficiente para se emitir sinal de perda de controlo, *antecipa-se* a recolha de uma nova amostra. Se o valor da estatística sumária se encontrar perto do alvo da carta de controlo, *adia-se* o instante de recolha da próxima amostra.

Temos usualmente dois intervalos amostrais distintos:

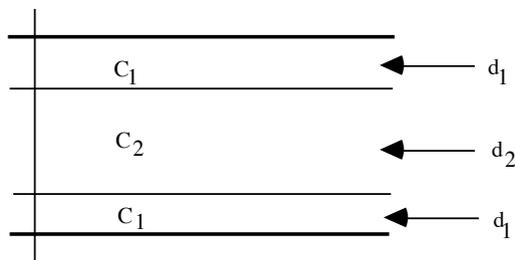
$$d_1, d_2 : 0 < d_1 < d_2.$$

A *região de continuação* da carta, $C = (LCI, LCS)$, será também dividida em duas sub-regiões

$$C_1, C_2 : C_1 \cap C_2 = \emptyset, C_1 \cup C_2 = C,$$

a que estão associados o *menor* e o *maior* dos intervalos amostrais, respectivamente.

⁸⁷ Bandulasiri, A. & S.M. Scariano (2009). The robustness of the three-way chart to non-normality. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* **38**, 441-453.



Seja W_N a estatística sumária associada à N -ésima amostra $\underline{x}_N = (x_{1N}, x_{2N}, \dots, x_{nN})$. O intervalo amostral que precede a $(N + 1)$ -ésima recolha é portanto uma variável aleatória

$$D_N = \begin{cases} d_1 & \text{se } W_N \in C_1 \\ d_2 & \text{se } W_N \in C_2. \end{cases}$$

Esta partição de C é feita considerando, para além dos limites de controlo, duas linhas adicionais chamadas *Limite de Vigilância Inferior* (LVI) e *Limite de Vigilância Superior* (LVS), determinadas de acordo com as propriedades pretendidas para a carta, como se refere na secção seguinte, obtendo-se

$$C_1 = (LCI, LVI) \cup (LVS, LCS) \quad \text{e} \quad C_2 = (LVI, LVS).$$

Tal como a política VSI pode melhorar a eficiência de uma carta de controlo relativamente à política FSI, a utilização de uma dimensão amostral variável poderá também aumentar a eficiência de uma carta de controlo, com menos problemas do ponto de vista administrativo. Obviamente que a implementação de uma carta de controlo em que se usa uma taxa de amostragem variável, mais intensa sempre que existe suspeita de problemas no processo e menos intensa quando tal suspeita não existe, é mais complicada, estando por isso a sua escolha dependente dos benefícios que daí possam advir.

Política FSS — A dimensão das amostras retiradas para inspecção é fixa e igual a n .

Política VSS — A dimensão das amostras varia, dependendo da localização das observações recolhidas.

Em geral usa-se apenas duas dimensões diferentes, n_1 e n_2 , sendo $n_1 > n_2$, e a alternância entre estas duas dimensões é feita de modo semelhante ao referido para a política VSI, dividindo a região C de continuação da carta em duas regiões, C_1 e C_2 , como se disse atrás. Se o valor da estatística sumária estiver muito afastado da linha central, mas não o suficiente para se emitir sinal de perda de controlo, a amostra seguinte terá dimensão n_1 (mais elevada). Se o valor da estatística sumária se encontrar perto do alvo da carta de controlo, a amostra seguinte terá dimensão n_2 (mais baixa).

Detalhes sobre várias políticas amostrais, incluindo as políticas VSSI (intervalos e dimensões amostrais variáveis) e VSIFT (intervalos amostrais variáveis em intervalos de tempo fixos), podem ser encontrados em Reynolds *et al.*⁸⁸ (1988), Reynolds⁸⁹ (1996), Costa⁹⁰ (1999), Morais & Pacheco⁹¹ (2007) e Dias & Infante⁹² (2008), por exemplo.

5.8 Medidas de Desempenho

Seja W a *estatística* sumária de controlo, e seja C a *região de continuação* da carta de controlo.

Como já se disse anteriormente uma carta de controlo é um teste de hipóteses relativo a um parâmetro desconhecido θ . Quando o

⁸⁸ Reynolds, M.Jr., R.W. Amin, J.C. Arnold & J.A. Nachlas (1988). \bar{X} charts with variable sampling intervals. *Technometrics* **30**, 181-192.

⁸⁹ Reynolds, M.Jr. (1996). Shewhart and EWMA variable sampling interval control charts with sampling at fixed times. *J. Quality Technology* **28**, 199-212.

⁹⁰ Costa, A.F. (1999). Joint \bar{X} and R charts with variable sample sizes and sampling intervals. *J. Quality Technology* **31**, 387-397.

⁹¹ Morais, M.C. & A. Pacheco (2007). Shewhart schemes with variable sampling intervals revisited. *Sequential Analysis* **26**, 265-282.

⁹² Dias, J.R. & P. Infante (2008). Control charts with predetermined sampling intervals. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **25**, 423-435.

estado é de controlo (estado IN) temos a validade da hipótese nula

$$H_0 : \theta = \theta_0.$$

De entre as medidas de desempenho usualmente consideradas destacamos as seguintes:

- *Risco- α* := $\mathbb{P}(\text{OUT}|\text{IN}) = \mathbb{P}(W \notin C|\theta = \theta_0)$.
- *Curva Característica* := $\text{CC}(\theta) \equiv \beta(\theta) := \mathbb{P}(W \in C|\theta)$, $\theta \in \Theta$, com $\beta(\theta_0) = 1 - \alpha$.
- *NSS* ou *RL* (*Number of Samples to Signal* ou *Run Length*) — número de amostras recolhidas desde o instante de (re)início do processo – instante 0 – até ao instante em que é emitido o sinal de perda de controlo. Deverão ser contabilizadas a amostra recolhida no instante de (re)início do processo de produção, bem como as recolhidas posteriormente, excluindo-se a amostra responsável pela emissão do sinal.
- *ANSS* ou *ARL* (*Average Number of Samples to Signal*) := $\mathbb{E}(\text{NSS})$.
- *TS* (*Time to Signal*) — tempo decorrido desde o (re)início do processo até ao instante em que é recolhida a amostra responsável pela emissão de sinal de perda de controlo.
- *ATS* (*Average Time to Signal*) := $\mathbb{E}(\text{TS})$.

Como $\text{NSS} \equiv \text{NSS}(\theta)$ é uma v.a. geométrica, de suporte $1, 2, \dots$ e de parâmetro $1 - \beta(\theta)$, tem-se

$$\text{ANSS}(\theta) = \frac{1}{1 - \beta(\theta)},$$

qualquer que seja a política amostral adoptada.

Como *TS* é o tempo decorrido desde o (re)início do processo até ao instante em que é recolhida a amostra responsável pela emissão de sinal de perda de controlo, tem-se

$$\text{TS} = \begin{cases} d \text{NSS} & \text{para a política } FSI \\ \sum_{N=1}^{\text{NSS}} D_{N-1} & \text{para a política } VSI. \end{cases}$$

O tempo médio até sinal será pois

$$ATS = \mathbb{E}(TS) = \begin{cases} d \text{ ANSS} & \text{para a política FSI} \\ \mathbb{E} \left(\sum_{N=1}^{NSS} D_{N-1} \right) & \text{para a política VSI.} \end{cases}$$

O $ATS \equiv ATS(\theta)$ vai depender da política amostral, e tem-se:

$$\text{Para a política FSI: } ATS_{FSI}(\theta) = \frac{d}{1-\beta(\theta)}.$$

Para a política VSI temos de calcular

$$\rho_i(\theta) = \mathbb{P}(D = d_i | W \in C, \theta) = \frac{\mathbb{P}(W \in C_i | \theta)}{\mathbb{P}(W \in C | \theta)}, \quad i = 1, 2,$$

a probabilidade de utilização do intervalo amostral d_i , $i = 1, 2$, quando o parâmetro a testar toma o valor θ , tendo-se

$$ATS_{VSI}(\theta) = \mathbb{E}(D | \theta) \text{ ANSS}(\theta) = \frac{d_1 \rho_1(\theta) + d_2 \rho_2(\theta)}{1 - \beta(\theta)}.$$

Embora possa acontecer que as alterações nos parâmetros estejam presentes desde que o processo de controlo se (re)inicia, em geral o processo inicia-se com as normas para os parâmetros a serem cumpridas e a mudança ocorre posteriormente, possivelmente entre a recolha de amostras para inspeção. Por este motivo, para avaliar o desempenho de uma carta de controlo deveria calcular-se o tempo médio decorrido desde que a mudança ocorre até que a carta a assinala, valor este que é designado na literatura por *tempo médio ajustado até sinal*, sendo denotado por AATS, de *Adjusted Average Time to Signal*. No entanto, dada a dificuldade em conhecer a distribuição da estatística de controlo no instante em que ocorre a mudança, e atendendo a que os valores ATS e AATS são muito próximos excepto no caso de ocorrência de grandes alterações, é usual considerar-se como medida de desempenho o valor ATS em vez do AATS, por questões de simplificação.

Em estudos de simulação é ainda usual calcular-se uma outra medida diferente, denominada *steady state* ATS, e que se denota

por SSATS. Neste caso, admitimos que a mudança ocorre após o processo estar a decorrer há algum tempo, e que, condicional à não existência de falsos alarmes, a estatística de controlo já tinha atingido uma distribuição estacionária no instante de recolha da amostra imediatamente anterior à ocorrência de alteração.

Vários estudos realizados sobre o desempenho de cartas de controlo mostram que a presença de autocorrelação e a não normalidade dos dados subjacentes ao processo têm influência no desempenho das cartas implementadas sob a hipótese de independência e normalidade, assim como a eventual estimação de alguns parâmetros associados ao processo, obtendo-se em geral uma carta com uma taxa de falsos alarmes muito superior ou inferior à esperada. Veja-se, por exemplo, alguns desses estudos em Schilling & Nelson⁹³ (1976), Balakrishnan & Kocherlakota⁹⁴ (1986), Bai & Choi⁹⁵ (1995), Amin *et al.*⁹⁶ (1997), Zhang⁹⁷ (1998), Amin & Lee⁹⁸ (1999), Lu & Reynolds⁹⁹ (1999), Shore¹⁰⁰ (2003) e Castagliola & Tsung¹⁰¹ (2005), entre outros.

⁹³ Schilling, E.G. & P.R. Nelson (1976). The effect of non-normality on the control limits of the \bar{X} charts. *J. Quality Technology* **8**, 183-188.

⁹⁴ Balakrishnan, N. & S. Kocherlakota (1986). Effects of nonnormality on \bar{X} charts: single assignable cause model. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics* **48**, 439-444.

⁹⁵ Bai, D.S. & I.S. Choi (1995). EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. *J. Quality Technology* **27**, 120-131.

⁹⁶ Amin, R.W., W. Schmid, & O. Frank (1997). The effects of autocorrelation on the R -chart and the S^2 -chart. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics* **59 B**, 229-255.

⁹⁷ Zhang, N.F. (1998). A statistical control chart for stationary process data. *Technometrics* **40**, 24-38.

⁹⁸ Amin, R.W. & S.J. Lee (1999). The effects of autocorrelation and outliers on two-sided tolerance limits. *J. Quality Technology* **31**, 286-300.

⁹⁹ Lu, C.-W. & M.Jr. Reynolds (1999). Control charts for monitoring the mean and the variance of autocorrelated processes. *J. Quality Technology* **31**, 259-274.

¹⁰⁰ Shore, H. (2004). Non-normal populations in quality applications: a revisited perspective. *Quality and Reliability Engineering Int.* **20**, 375-382.

¹⁰¹ Castagliola, P. & F. Tsung (2005). Autocorrelated SPC for non-normal situations. *Quality and Reliability Engineering Int.* **21**, 131-161.

No caso de ser necessário estimar parâmetros do processo, estes estudos sugerem o recurso a um elevado número de subgrupos iniciais para a estimação e à determinação dos limites de controlo de forma robusta, de modo a obtermos cartas com propriedades semelhantes às das cartas implementadas com limites exactos (veja-se Quesenberry,¹⁰² 1993, Nedumaran & Pignatiello,¹⁰³ 2001, Jones¹⁰⁴, 2002, Yang *et al.*¹⁰⁵, 2002, Jones *et al.*¹⁰⁶, 2004 e Bischak & Trietsch¹⁰⁷, 2007).

Alguns estimadores robustos adequados num contexto de SPC e algumas cartas de controlo mais robustas do que as usualmente utilizadas na prática, podem encontrar-se em Langenberg & Iglewicz (1986), Chan *et al.* (1988), Rocke (1992), Tatum (1997), Figueiredo & Gomes (2004), Davis & Adams (2005), Braun & Park (2008), referenciados só na Bibliografia, e Figueiredo & Gomes¹⁰⁸ (2009), entre outros trabalhos.

Relativamente às medidas de desempenho de uma carta de controlo com limites estimados vários autores referem que o valor médio e o desvio padrão do RL não são as medidas mais adequadas devido à elevada assimetria da distribuição do RL nesta situação

¹⁰² Quesenberry, D.C. (1993). The effect of sample size on estimated limits for \bar{X} and X control charts. *J. Quality Technology* **25**, 237-247.

¹⁰³ Nedumaran, G. & J. Pignatiello (2001). On estimating \bar{X} control limits. *J. Quality Technology* **33**, 206-212.

¹⁰⁴ Jones, L.A. (2002). The statistical design of EWMA control charts with estimated parameters. *J. Quality Technology* **34**, 277-288.

¹⁰⁵ Yang, Z., M. Xie, V. Kuralmani & K.-L. Tsui (2002). On the performance of geometric charts with estimated control limits. *J. Quality Technology* **34**, 448-458.

¹⁰⁶ Jones, L.A., C.W. Champ & S.E. Rigdon (2004). The run length distribution of the CUSUM with estimated parameters. *J. Quality Technology* **36**, 95-108.

¹⁰⁷ Bischak, D.P. & D. Trietsch (2007). The rate of false signals in \bar{X} control charts with estimated limits. *J. Quality Technology* **39**, 54-65.

¹⁰⁸ Figueiredo, F. & M.I. Gomes (2009). Monitoring industrial processes with robust control charts. *Revstat* **7**, 151-170.

(veja-se, Jensen *et al.*¹⁰⁹, 2006 e Chakraborti¹¹⁰, 2007). É então sugerida, como alternativa, a utilização da mediana do RL como medida de desempenho e os percentis 5% e 95% como medida de variabilidade. Afirmam ainda estes autores que se deve analisar a distribuição do RL condicional às estimativas observadas e a distribuição marginal do RL, de forma a termos em linha de conta a variabilidade introduzida pela estimação de parâmetros.

Finalmente é de referir que Morais (2002) e Morais & Pacheco¹¹¹ (2004) recorreram a alguns resultados de ordenação estocástica para avaliar como é afectado o desempenho de uma carta quando há alterações no modelo ou nos parâmetros do modelo subjacente às observações, e ainda escolher de entre vários planos de controlo o que melhor se adapta a uma dada situação específica. Para mais detalhes sobre medidas de desempenho de cartas de controlo consultem-se as monografias de Morais (2002), de Figueiredo (2003) e de Antunes (2009), assim como as referências aí citadas.

5.9 Medidas de Capacidade do Processo

Para além de todas as características amostrais referidas na Secção 2.2.1 surgem-nos também algumas características amostrais específicas da área da *Qualidade*, que iremos brevemente discutir nesta secção.

Consideremos uma característica de qualidade, X , com distribuição Normal, de valor médio μ e desvio padrão σ , que por abuso de linguagem usual em *Qualidade* identificaremos com um *processo*

¹⁰⁹ Jensen, W.A., L.A. Jones-Farmer, C.H. Champ & W.H. Woodall (2006). Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review. *J. Quality Technology* **38**, 349-364.

¹¹⁰ Chakraborti, S. (2007). Run length distribution and percentiles. The Shewhart chart with unknown parameters. *J. Quality Engineering* **19**, 119-127.

¹¹¹ Morais, M.C. & A. Pacheco (2004). A note on the ageing character of the run length of Markov-type quality control schemes. *J. of Applied Probability* **21**, 1243-1247.

Normal. Sabemos então que $\mathbb{P}(X \in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma))$ é elevada, mais precisamente igual a 0.9973. Chama-se então *intervalo de tolerância* ao intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ e *capacidade do processo* ao valor 6σ . Com base numa amostra de dimensão n da referida característica de qualidade, podem-se então usar os seguintes *limites de confiança* para a *capacidade do processo*:

$$6s\sqrt{\frac{n-1}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2}} \quad \text{e} \quad 6s\sqrt{\frac{n-1}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2}},$$

onde s é o desvio padrão empírico da amostra, dado em (2.15), sendo $\chi_{n-1,p}^2$ o quantil de probabilidade p de uma distribuição χ^2 com $n-1$ graus de liberdade.

Face a limites de especificação superior e inferior estabelecidos para o processo, denotados LES e LEI, respectivamente, é usual comparar a variabilidade σ do processo com a amplitude entre as especificações, definindo-se o chamado *índice* ou *razão de capacidade do processo*:

$$C_p := \frac{LES - LEI}{6\sigma}. \quad (5.8)$$

Quando $C_p = 1$, o *output* do processo conforma-se com as especificações *desde que o valor médio do processo esteja no alvo* $\mu_0 = (LES + LEI)/2$. Se $C_p > 1$ *podemos respirar à vontade*. Se $C_p < 1$, uma fracção significativa do *output* cairá fora das especificações.

Na área da *Qualidade* é então usual fornecer *limites de confiança* para C_p a um nível $100(1 - \alpha)\%$, dados por

$$\frac{(LES - LEI)}{6s}\sqrt{\frac{\chi_{n-1,\alpha/2}^2}{n-1}} \quad \text{e} \quad \frac{(LES - LEI)}{6s}\sqrt{\frac{\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2}{n-1}}.$$

Convém notar que a medida de capacidade em (5.8) é mais uma medida de desempenho potencial do processo do que uma medida de desempenho efectivo do processo, uma vez que a norma a atingir

não está explicitada na medida C_p . Um processo com pequena variabilidade, mas que não satisfaça a norma de localização pode perfeitamente fornecer valores muito elevados para C_p , estando a fornecer produtos não conformes com as especificações.

Um outro *índice de capacidade* que entra em linha de conta com o valor médio do processo é

$$C_{pk} := \min \left\{ \frac{LES - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LEI}{3\sigma} \right\} \\ = \frac{LES - LEI - 2 \left| \mu - \frac{LES+LEI}{2} \right|}{6\sigma}.$$

Face a uma amostra de dimensão n podemos então estimar C_{pk} usando

$$\widehat{C}_{pk} = \frac{LES - LEI - 2 \left| \bar{x} - \frac{LES+LEI}{2} \right|}{6s},$$

onde \bar{x} é a média aritmética da amostra.

Podemos então, face a um risco- α , obter-se um *limite de confiança inferior* aproximado para C_{pk} , dado por

$$\widehat{C}_{pk} - \xi_{1-\alpha; N(0,1)} \sqrt{\frac{1}{9n} + \frac{\widehat{C}_{pk}^2}{2n-2}},$$

onde $\xi_{p; N(0,1)}$ é o quantil de probabilidade p em modelo Normal(0, 1).

Finalmente é de referir o *índice de capacidade*, C_{pm} , definido por

$$C_{pm} := \frac{LES - LEI}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - \mu_0)^2}},$$

mais na linha da filosofia de Taguchi, o qual penaliza os processos mais pelo afastamento da média em relação ao valor alvo μ_0 do que pela fracção de itens não conformes produzidos.

Note-se que as medidas aqui apresentadas devem ser utilizadas com as devidas precauções caso a característica de qualidade em

estudo seja não Normal. Apesar das críticas severas por parte de muitos autores no que respeita à sua utilização, estas medidas continuam a ser muito populares em *Controlo da Qualidade*, apesar de terem sido propostas na literatura muitas outras medidas alternativas (veja-se Burdick *et al.*¹¹², 2003, Spiring *et al.*¹¹³, 2003, Ahmed¹¹⁴, 2005 e Khadse & Shinde¹¹⁵, 2009). Estas medidas poderão continuar a ter o seu lugar desde que se compreenda as suas limitações e as interpretemos como um dos muitos instrumentos de resumo do comportamento do processo.

5.10 Intervalos de Previsão e Tolerância

Uma abordagem de caracterização do *processo*, diferente da usada na Secção 5.8, e também muito popular em SPC é a utilização dos dados, não para estimar parâmetros do *processo*, mas para fornecer intervalos onde, com elevada probabilidade, estarão futuras observações.

Um *intervalo de previsão* a $100(1 - \alpha)\%$, baseado numa amostra (x_1, x_2, \dots, x_n) , de um processo estável, é um intervalo que conterà com probabilidade igual ou superior a $1 - \alpha$ uma futura observação do processo. Se X for Normal, e independente da média amostral \bar{X}_n , então $\bar{X}_n - X$ é Normal, de valor médio nulo e variância $\sigma^2(1 + 1/n)$, e consequentemente

$$\frac{\bar{X}_n - X}{S\sqrt{1 + 1/n}}$$

¹¹² Burdick, R.K., C.M. Borrór & D.C. Montgomery (2003). A review of methods for measurement systems capability analysis. *J. Quality Technology* **35**, 342-354.

¹¹³ Spiring, F., B. Leung, S. Cheng & A. Yeung (2003). A bibliography of process capability papers. *Quality and Reliability Engineering International* **19**, 445-460.

¹¹⁴ Ahmed, S.E. (2005). Assessing the process capability index for non-normal processes. *J. Statist. Planning and Inference* **129**, 1195-206.

¹¹⁵ Khadse, K.G. & R.L. Shinde (2009). Probability-based process capability indices. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* **38**, 884-904.

tem distribuição t -de-Student com $n - 1$ graus de liberdade.

Em processo Normal temos então o seguinte *intervalo de previsão* a $100(1 - \alpha)\%$ para uma futura observação do processo

$$\left(\bar{x} - t_{n-1, 1-\alpha/2} s \sqrt{1 + 1/n}, \bar{x} + t_{n-1, 1-\alpha/2} s \sqrt{1 + 1/n} \right),$$

onde $t_{n-1, p}$ denota o quantil de probabilidade p de uma t -de-Student com $n - 1$ graus de liberdade.

É também usual considerar *intervalos de previsão unilaterais* a $100(1 - \alpha)\%$,

$$\left(-\infty, \bar{x} + t_{n-1, 1-\alpha} s \sqrt{1 + 1/n} \right) \text{ ou } \left(\bar{x} - t_{n-1, 1-\alpha} s \sqrt{1 + 1/n}, +\infty \right).$$

Um *intervalo de tolerância* a $100(1 - \alpha)\%$ é um intervalo aleatório que conterá uma percentagem $100 \times p\%$ da população, p elevado, com uma probabilidade superior a $1 - \alpha$, α pequeno. Os *intervalos de tolerância* em modelo Normal são também do tipo $(\bar{x} - \tau s, \bar{x} + \tau s)$, onde τ é uma constante que depende da dimensão da amostra e do nível de confiança pretendido.

Vejamos agora a abordagem não-paramétrica de obtenção de intervalos de previsão e de tolerância quando o processo não é Normal.

Os intervalos de previsão e tolerância de índole não-paramétrica mais frequentemente usados são baseados no mínimo e máximo da amostra, embora se possam também usar intervalos com base em estatísticas ordinais superiores e inferiores. Temos os *intervalos unilaterais*

$$(x_{1:n}, +\infty) \tag{5.9}$$

e

$$(-\infty, x_{n:n}) \tag{5.10}$$

e o *intervalo bilateral*

$$(x_{1:n}, x_{n:n}). \tag{5.11}$$

Comecemos por pensar nos intervalos anteriores como *intervalos de previsão*, e calculemos os níveis de confiança associados a cada um desses intervalos. Para o intervalo em (5.9) temos como *nível de confiança da previsão*

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}(X \geq X_{1:n}) \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\{n(1 - F(x))^{n-1}f(x)\}dx, \end{aligned}$$

o que após a transformação $F(x) = t$ fornece o nível de confiança

$$1 - \alpha = n \int_0^1 (1 - t)^n dt = \frac{n}{n + 1},$$

como seria de esperar, uma vez que pretendemos que uma observação independente de n anteriores seja maior que o mínimo dessas n . Consequentemente, do lote das $n + 1$ observações independentes temos n situações favoráveis, de entre $n + 1$.

Para o intervalo unilateral, em (5.10), temos analogamente

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}(X \leq X_{n:n}) \\ &= \int_0^{+\infty} F(x)\{nF^{n-1}(x)f(x)\}dx = \frac{n}{n + 1}, \end{aligned}$$

tal como anteriormente, i.e., o *nível de confiança* de qualquer dos *intervalos de previsão unilaterais* é

$$1 - \alpha = \frac{n}{n + 1}.$$

Para o intervalo bilateral, em (5.11), teremos de condicionar na densidade conjunta do mínimo e do máximo, vindo para *nível de*

confiança do intervalo de previsão bilateral,

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}(X_{1:n} < X \leq X_{n:n}) = \\ &= n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^{+\infty} (F(y) - F(x))^{n-1} f(x)f(y) dy dx \\ &= n(n-1) \int_0^1 \int_u^1 (v-u)^{n-1} dv du = \frac{n-1}{n+1}, \end{aligned}$$

resultado este passível de ser obtido de forma intuitiva.

Pensemos agora nos intervalos não-paramétricos como *intervalos de tolerância*. Então o *nível de confiança* dos *intervalos de tolerância unilaterais* será

$$1 - p^n.$$

Na realidade, para o intervalo em (5.9), e atendendo ao facto de $F(X)$ ser uma v.a. Uniforme(0,1) desde que $F(x)$, a f.d. da v.a. X , seja contínua, não havendo ainda destruição da ordem devido ao facto de F ser não-decrescente, tem-se

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(F(X_{1:n}) \leq 1 - p) = \mathbb{P}(U_{1:n} \leq 1 - p) = 1 - p^n.$$

Para o intervalo em (5.10),

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(F(X_{n:n}) > p) = \mathbb{P}(U_{n:n} > p) = 1 - p^n.$$

Finalmente, para o intervalo bilateral,

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(F(X_{n:n}) - F(X_{1:n}) > p) = \mathbb{P}(U_{n:n} - U_{1:n} > p).$$

Precisamos pois de obter a distribuição da amplitude $R_n = U_{n:n} - U_{1:n}$ em modelo Uniforme(0,1). Começemos por proceder a esse cálculo, recorrendo ao integral em (4.8). Tem-se

$$F_{R_n}(r) = \mathbb{P}(R_n \leq r) = n \int_{\mathbb{R}} (F(u+r) - F(u))^{n-1} f(u) du.$$

Como em modelo Uniforme, $F(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq 0 \\ u & \text{se } 0 < u \leq 1, \text{ tem-se} \\ 1 & \text{se } u > 1 \end{cases}$

$$F_{R_n}(r) = n \left\{ \int_0^{1-r} r^{n-1} du + \int_{1-r}^1 (1-u)^{n-1} du \right\},$$

donde se segue que, em modelo Uniforme(0,1), a amplitude amostral tem distribuição

$$F_{R_n}(r) = r^n + nr^{n-1}(1-r), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Então o *nível de confiança* do *intervalo de tolerância bilateral* será

$$1 - p^n - n(1-p)p^{n-1}.$$

Capítulo 6

Alguns Testes de Aleatoriedade

Os testes de aleatoriedade mais usuais em *Controlo da Qualidade* são os testes de *runs* e o teste da *média dos quadrados das diferenças consecutivas*.

6.1 Testes de Runs

6.1.1 Teste de Runs dos Sinais das Diferenças entre as Observações e a Mediana Empírica

Considere-se uma sucessão de observações de uma população contínua, e associe-se a cada observação o símbolo $+$ se ela está acima da mediana empírica $Q_{1/2}$, em (2.14), e o símbolo $-$ se está abaixo dessa mediana, obtendo-se uma sucessão de $+$'s e $-$'s. Se, para simplificar a discussão, se admitir que se ignora a observação mediana quando o número de observações é ímpar, e que não existem *empates* (observações iguais), a sucessão de $+$'s e $-$'s terá para amostras de dimensão par ($n = 2m$) ou ímpar ($n = 2m + 1$) um número par de termos, $2m$, com m sinais $+$'s e m sinais $-$'s.

Um *run*, numa sucessão de dois símbolos, é constituído por um grupo de símbolos consecutivos de um tipo, precedidos e seguidos

por (se algum) símbolos de outro tipo. Por exemplo, em

$$+ + + | - | + + | - - - - | + + | - -$$

temos um número total de 6 *runs*, 3 *runs* de +'s e 3 *runs* de -'s, separados por barras verticais.

Seja R^+ o número de *runs* de +'s e R^- o número de *runs* de -'s. Seja $R = R^+ + R^-$, o número total de *runs*. Os testes dos *runs* são baseados na noção intuitiva de que um valor muito grande ou um valor muito pequeno para R sugere falta de aleatoriedade. Por exemplo, se existir uma tendência negativa os +'s virão no início e os -'s virão no fim, surgindo um número pequeno de *runs*.

Para formular um teste de aleatoriedade só precisamos ter a distribuição de amostragem de R , R^+ ou R^- , sob a validade da hipótese H_0 , de aleatoriedade.

Argumentos combinatórios conduzem à seguinte distribuição conjunta de R^+ e R^- :

$$\mathbb{P}(R^+ = x, R^- = y) = \begin{cases} \frac{2 \binom{m-1}{x-1}}{\binom{2m}{m}} & \text{se } x = y \\ \frac{\binom{m-1}{x-1} \binom{m-1}{y-1}}{\binom{2m}{m}} & \text{se } x = y \pm 1 \\ 0 & \text{se } |x - y| > 1. \end{cases}$$

Consequentemente, para $z = 2, 3, \dots, 2m$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R = z) &= \sum_{x+y=z} \mathbb{P}(R^+ = x, R^- = y) \\ &= \begin{cases} \frac{2 \binom{m-1}{k-1} \binom{m-1}{k-1}}{\binom{2m}{m}} & \text{se } z = 2k \\ \frac{2 \binom{m-1}{k} \binom{m-1}{k-1}}{\binom{2m}{m}} & \text{se } z = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

A correspondente f.d. calcula-se facilmente e encontra-se tabelada em Swed & Eisenhart¹ (1943). O valor médio e a variância de R são

$$\mathbb{E}(R) = m + 1, \quad \text{Var}(R) = \frac{m(m-1)}{2m-1},$$

e, para grandes amostras, R é aproximadamente Normal (Mood², 1940).

Usando uma correcção de continuidade, e a aproximação

$$\text{Var}(R) \approx \frac{2m-1}{4},$$

pode facilmente obter-se, para quantil de ordem p de R ,

$$r_p = \frac{1}{2} (2m + 1 + \xi_{p;N(0,1)} \sqrt{2m-1}),$$

onde $\xi_{p;N(0,1)}$ é o quantil de ordem p de uma Normal(0, 1).

A *região de rejeição* ou *crítica* do teste é usualmente bilateral e equilibrada, i.e., ao nível de significância α , considera-se a *região crítica*

$$\mathcal{R} = (-\infty, r_{\alpha/2}) \cup (r_{1-\alpha/2}, +\infty).$$

6.1.2 Teste de Runs dos Sinais das Diferenças entre Observações Consecutivas

Um outro tipo de teste de *runs* utiliza os sinais das diferenças entre observações consecutivas. Se existir uma tendência crescente, os sinais +’s serão mais frequentes. A estatística de teste é

$$S = \begin{cases} \text{Número total de } runs \text{ de } +\text{'s e } -\text{'s} \\ \text{na sucessão dos } n-1 \text{ sinais das diferenças} \\ \text{entre pares consecutivos de observações.} \end{cases}$$

¹ Swed, F.J. & C. Eisenhart (1943). Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives. *Ann. Math. Statist.* **14**, 66-87.

² Mood, A.M. (1940). The distribution theory of runs. *Ann. Math. Statist.* **11**, 367-392.

Vários aspectos da distribuição de S , sob a validade da hipótese de aleatoriedade, foram estudados por Wolfowitz & Levene³ (1944).

O valor médio e a variância de S são

$$\mathbb{E}(S) = \frac{2n-1}{3}, \quad \text{Var}(S) = \frac{16n-29}{90},$$

e a distribuição assintótica de S é também Normal. A *região crítica* a considerar deve ser bilateral, tal como no caso anterior.

6.2 Teste da Média dos Quadrados das Diferenças Consecutivas

Um outro teste de aleatoriedade, introduzido por Hart⁴ (1942), e muito em voga em SPC é o teste baseado na estatística

$$W = \frac{D^2}{S^2},$$

em que

$$D^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2,$$

sendo S^2 a variância amostral (versão centrada), i.e.

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Sob a validade da hipótese nula, $H_0 : (X_1, \dots, X_n)$ é uma amostra aleatória com variância σ^2 , a diferença $X_{i+1} - X_i$, $1 \leq i \leq n-1$, tem valor médio zero e variância $2\sigma^2$. O valor esperado de D^2 é pois σ^2 , sob a validade de H_0 . Se existir alguma tendência, o valor de D^2 não sofre tanta alteração como o valor de S^2 , que aumenta

³ Wolfowitz, J. & H. Levene (1944). The covariance matrix of runs up and down. *Ann. Math. Statist.* **15**, 58-69.

⁴ Hart, B.I. (1942). Significance levels for the ratio of the mean square successive difference to the variance. *Ann. Math. Statist.* **13**, 445-447.

assustadoramente. Deve pois escolher-se uma região crítica unilateral, $\{W < \text{constante}\}$, ao testar H_0 contra uma tendência na alternativa.

Quanto à distribuição de amostragem de W , pode-se mostrar que, sob a validade do modelo Normal, e para grandes amostras ($n > 20$), W é aproximadamente Normal, com valor médio e variância dados por

$$\mathbb{E}(W) = 1, \quad \mathbb{V}\text{ar}(W) = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n-1} \right).$$

6.3 Regras Empíricas de Aleatoriedade

Vejam algumas regras práticas que decorrem destes, e de outros, testes de aleatoriedade:

- Em modelo Normal, *oito pontos do mesmo lado da linha central* revela falta de controlo (trata-se de um acontecimento com probabilidade aproximadamente igual a $1/128$, sob a hipótese de aleatoriedade, e para a carta- \bar{X}).

Causas possíveis para a ocorrência deste padrão:

Na carta- R

- Maior variabilidade — mau funcionamento da máquina, material bruto menos uniforme.
- Menor variabilidade — há que modificar os limites de controlo.
- Mudança de sistema de medida — novo aparelho, novo inspector.
- Linha Central mal calculada.

Na carta- \bar{X}

- Mudança na localização do processo.
- Mudança no sistema de medida.
- Linha Central mal calculada.

- A existência de *pelo menos dois de entre três pontos consecutivos fora das linhas que distam mais de dois desvios padrão da linha central, e do mesmo lado*, revela falta de controle.
- A existência de *pelo menos quatro de entre cinco pontos consecutivos fora das linhas que distam mais de um desvio padrão da linha central, e do mesmo lado*, revela também falta de controle.
- *Seis diferenças consecutivas positivas ou negativas* revelam falta de controle.

Causas possíveis para a ocorrência deste padrão:

Na carta- R

- Variabilidade crescente ou decrescente — mau funcionamento progressivo da máquina.

Na carta- \bar{X}

- Tendência crescente ou decrescente na localização do processo — desgaste de material.

- A violação da *regra do terço médio* também revela falta de controle — *bastante mais ou menos do que dois terços dos pontos dentro do terço médio*, o intervalo centrado na norma com amplitude $(LCS - LCI)/3$.

Causas possíveis para a ocorrência deste padrão:

Na carta- R ou na carta- \bar{X}

- Limites mal calculados.
- Dados de mistura, eventualmente devido a controle exagerado.

Capítulo 7

Amostragem de Aceitação

7.1 Introdução

Uma outra componente importante do *Controlo Estatístico da Qualidade* é a *Amostragem de Aceitação*, que tem como aplicação típica o seguinte exemplo: uma Organização recebe um carregamento de material de um fornecedor, por exemplo, matéria prima para o processo de manufactura dessa Organização. Procede-se, em seguida, a uma amostragem de um lote, inspeccionando-se algumas características de qualidade dos elementos da amostra. Com base na informação fornecida pela amostra toma-se uma decisão em relação ao lote, consistindo, em geral, a decisão em aceitar ou rejeitar o lote. Os lotes aceites entram no processo de produção e os rejeitados são devolvidos ao fornecedor, para serem submetidos a um *processo de rectificação*.

A amostragem de aceitação consiste, pois, na inspecção de um produto, com o objectivo de o aceitar ou rejeitar, tendo como base a conformidade a uma especificação. Um *plano de amostragem* é definido pela dimensão da amostra (ou amostras) a retirar do lote e pelo critério de aceitação ou rejeição associado.

Já vimos que a inspecção de um produto como base de verificação da sua qualidade corresponde a uma fase ainda de imaturidade da Organização que a utiliza. À medida que se desenvolve a consciência de qualidade na Organização depende-se menos da *Amostragem de Aceitação* e mais do *Controlo Estatístico do Processo* e do *Delineamento de Experiências*, de modo a minimizar o efeito nefasto da produção de elementos não adequados para uso. O ponto a realçar é o de que os produtos já devem ser fabricados com a maior qualidade possível, e um programa que pretenda assegurar a qualidade do seu produto deve investir no *Controlo Estatístico do Processo* e depender cada vez menos da *Amostragem de Aceitação*, embora esta tenha sempre o seu papel a desempenhar como ferramenta de verificação da conformidade. A finalidade da *Amostragem de Aceitação* é conduzir a uma decisão (aceitar ou rejeitar o lote) e não estimar (ou melhorar) a qualidade do lote. Este é o objectivo das cartas de controlo que guiam o engenheiro para modificar a produção, de modo a obter produtos melhores. Um plano de amostragem apenas aceita ou rejeita lotes. Se os lotes forem todos da mesma qualidade, alguns serão aceites e outros rejeitados, não sendo os aceites necessariamente de melhor qualidade que os rejeitados. A amostragem de aceitação constitui um procedimento que fornece um risco especificado de aceitação de lotes de determinada qualidade, garante a sua qualidade e assegura que o *output* de um processo está conforme as especificações.

Embora a amostragem de aceitação não forneça uma forma directa de controlo da qualidade, os seus efeitos indirectos são bastante importantes. Note-se que a rejeição de um fornecimento leva não só o fornecedor a tentar melhorar os seus métodos de produção, mas também o consumidor a procurar um melhor fornecedor, aumentando desta forma indirecta a qualidade, quer pelo encorajamento à obtenção de uma melhor qualidade demonstrada por uma elevada taxa de aceitação de lotes, quer pelo desencorajamento a uma qualidade menor demonstrada por uma elevada taxa de rejeição.

Há três abordagens quanto à decisão de lotes:

1. *Aceitar sem inspecção.* Quando há confiança no fornecedor. Pelo uso adequado de técnicas de SPC pode reduzir-se ou até eliminar a necessidade de inspecção exaustiva.
2. *Inspecção a 100%.* Se uma Empresa confia apenas na inspecção final a 100% dos seus produtos, tem tendência a adquirir uma atitude descuidada para com a qualidade. E a inspecção a 100% além de ser onerosa, pode não ser eficiente: por ser monótona e maçadora pode deixar passar elementos não conformes.
3. *Um caminho intermédio:* a amostragem de aceitação, a qual é útil se os testes forem destrutivos, e se o custo e/ou erro de inspecção forem elevados. A desvantagem residirá no risco de aceitar lotes maus e rejeitar lotes bons. No entanto, a rejeição de lotes inteiros é motivadora para o vendedor se preocupar mais com a qualidade, i.e., um *programa de amostragem de aceitação* aumentará o interesse do pessoal pela qualidade e pelo lema *fazer bem à primeira vez*.

Por vezes, associado a um plano de amostragem, existe um procedimento para inspecção posterior de lotes rejeitados pelo plano. Neste caso, a amostragem de aceitação é uma parte de um programa de *rectificação da inspecção*, que fornece uma garantia em relação à média dos elementos que passam pelo programa e que não é inerente à mera amostragem de aceitação.

Os *planos* descritos neste capítulo fazem parte da actividade mais geral de inspecção conhecida como *sistemas de amostragem e esquemas de amostragem* de aceitação, que se encontram organizados em normas e que definem a dinâmica de aplicação destas técnicas à medida que aumenta a experiência com o vendedor, e o historial de qualidade que com ele se vai construindo. As normas especificam uma estratégia geral de inspecção, por exemplo, inspecção normal no início da actividade de inspecção, mais apertada se houver indícios de derrapagem na qualidade, e reduzida se o historial de qualidade do fornecedor se mantiver muito bom. Todas estas condições são especificadas nas normas, sendo as mais conhe-

cidas as normas militares americanas MIL STD 414 (1968), a sua revisão MIL STD 105E (1989), e a sua versão civil ANSI/ASQC Z1.9 (1993) da *American National Standards Institution* e *American Society for Quality Control*¹. Existem também as normas internacionais ISO 3951 (1981) da *International Standards Organization*². O objectivo a alcançar será pois delinear um sistema de amostragem de aceitação satisfatório, ou seleccionar o sistema mais adequado de entre um número possível de sistemas já existentes e delineados por outros.

Existem diversos tipos de *planos de amostragem*:

- *planos de amostragem para atributos, de aceitação lote a lote*;
- *planos de amostragem para variáveis*;
- *planos especiais*.

Planos de amostragem simples: processo de decisão sobre lotes, em que uma amostra aleatória de dimensão n é retirada do lote, e a decisão sobre o lote é baseada na informação fornecida pela amostra. Por exemplo, um plano de amostragem simples para atributos consiste em determinar a dimensão n da amostra, e o valor de aceitação c . Assim, seleccionando ao acaso n elementos do lote, este será aceite se forem encontrados c ou menos elementos defeituosos na amostra; caso contrário, se houver mais de c elementos defeituosos, rejeita-se o lote.

Planos de amostragem duplos: retira-se uma primeira amostra e com base na informação desta amostra decide-se: aceitar o lote, rejeitar o lote, ou retirar outra amostra. Neste caso, combina-se a informação fornecida pela primeira e segunda amostras para o processo de decisão. Os planos de amostragem duplos ainda podem ser generalizados, dando origem aos *planos múltiplos* e *planos*

¹ Grant, E.L. & R.S. Leavenworth (1996). *Statistical Quality Control*, 7th edition. McGraw-Hill, New York.

² Wetherill, G.B. & Brown, D.W. (1991). *Statistical Process Control: Theory and Practice*. Chapman and Hall, London.

sequenciais. Note-se que se podem delinear planos de amostragem simples, duplos, múltiplos ou sequenciais de modo a produzir os mesmos resultados, i.e., estes procedimentos podem ser desenvolvidos de modo que a probabilidade de aceitação de um lote com determinada qualidade especificada seja a mesma, qualquer que seja o plano de amostragem escolhido. Os factores de decisão prendem-se a questões como a quantidade média de inspecção requerida pelo processo, o impacto do processo na organização da Empresa, eficiência administrativa e tipo de informação fornecida pelo plano, entre outras.

O modo de formação de lotes tem influência na eficiência do plano de amostragem escolhido. Assim, os lotes devem ser homogéneos, grandes e o seu empacotamento deve ser cuidadoso e permitir uma selecção fácil dos elementos para amostragem. As unidades seleccionadas para inspecção devem ser escolhidas ao acaso e ser representativas de todos os elementos do lote. Por exemplo, não se deve inspecionar só a primeira camada, senão o vendedor pode enganar o comprador, pondo o melhor por cima e o pior por baixo, facto que se constata quando se vai às compras, em caixas de fruta ou embalagens de carne, por exemplo. Técnicas empregues: numerar todos os elementos do lote e depois seleccionar n números aleatórios; usar, por exemplo, um número aleatório de 3 dígitos, para representar as coordenadas do elemento no contentor (assim, 482 representa a unidade localizada na 4^a fila, 8^a linha e 2^a coluna); estratificar o lote não assegura aleatoriedade completa, mas garante que se seleccionam unidades de todas as localizações do lote. Para outros detalhes sobre métodos de amostragem consulte-se a monografia de Infante³ (2004), e as referências nela citadas.

³ Infante, P. (2004). *Métodos de Amostragem em Controlo de Qualidade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Évora.

7.2 Planos de Amostragem para Atributos, Lote a Lote

7.2.1 Planos de Amostragem Simples

Os planos de amostragem mais vulgares são os *planos simples*, para atributos. O produto a inspeccionar tem apenas de ser classificado como *conforme* ou *não conforme*, e o julgamento do lote é feito com base numa única amostra. Um plano de amostragem simples é definido pela dimensão n da amostra a retirar do lote e pelo critério de aceitação associado, i.e., pelo valor de c , usualmente designado por *número de aceitação*, o qual representa o número de unidades defeituosas que não pode ser excedido para que o lote seja aceite. Assim, para lotes de dimensão 10 000, o plano $n = 89$, $c = 2$, significa que dum lote de dimensão 10 000 se vai retirar uma amostra aleatória de 89 unidades a serem inspeccionadas. Observa-se o número de unidades defeituosas. Rejeita-se o lote se esse valor for maior que 2, aceitando-se caso contrário.

Curva Característica Operacional, CCO

O critério usual de optimalidade de um plano de amostragem de aceitação é baseado na curva característica operacional, curva que se ajusta aos pontos $(p, P_a(p))$, $p = 0, 1/N, 2/N, \dots, 1$, onde N representa a dimensão do lote e $P_a(p)$ a probabilidade de aceitação do lote em função da percentagem de artigos defeituosos que ele contém, i.e.,

$$P_a(p) = \mathbb{P}(\text{aceitar o lote} \mid p).$$

Esta curva descreve, assim, o poder discriminatório do plano, e mostra como a probabilidade de aceitação de um lote varia com a qualidade do material fornecido para inspeção.

Se se considerar que a dimensão dos lotes é suficientemente grande, na prática $N/n > 10$, onde N é a dimensão do lote, n a dimensão da amostra a retirar e c o número de aceitação, a distribuição da v.a. X , número de defeituosos na amostra, é bem aproximada

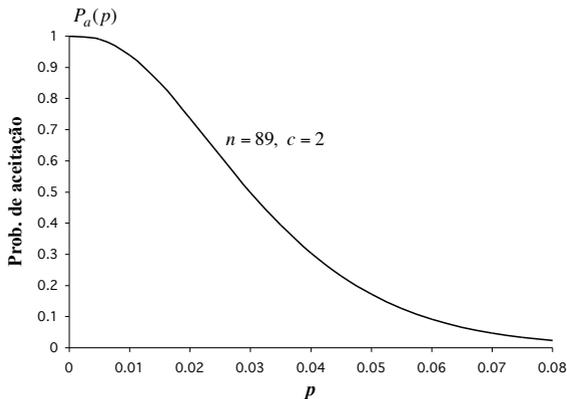
por uma distribuição Binomial(n, p), sendo p a percentagem de defeituosos no lote. Então

$$P_a(p) = \mathbb{P}(X \leq c | p) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

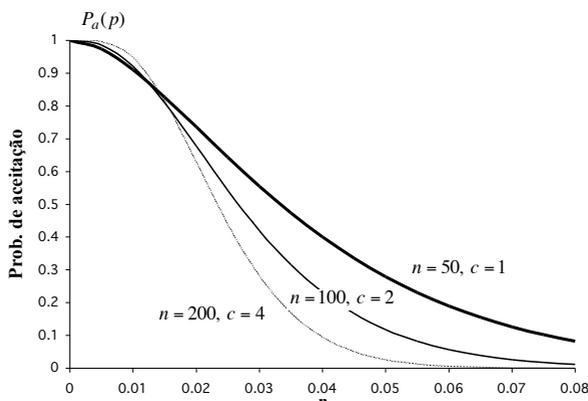
A curva característica operacional que se vai referir daqui para a frente, também denominada *curva-B*, será calculada a partir desta expressão. Nos casos em que a dimensão da amostra é uma fracção significativa da dimensão do lote, o correcto é considerar que a distribuição de X é a distribuição Hipergeométrica(N, n, p), com f.m.p. definida em (3.14), e a curva característica operacional resultante designa-se por *curva-A*, a qual é calculada a partir de

$$P_a(p) = \mathbb{P}(X \leq c | p) = \sum_{x=0}^c \frac{\binom{Np}{x} \binom{N-Np}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

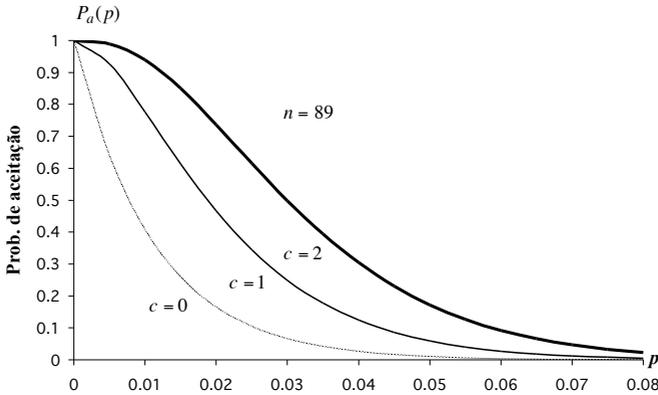
Por exemplo, no plano $n = 89$, $c = 2$, para lotes de dimensão $N = 10000$, se considerarmos $p = 2\%$, a probabilidade de aceitação é aproximadamente 74%, o que significa que se se submeterem a inspecção 100 lotes em que a fracção de defeituosos é de 2%, espera-se aceitar 74 lotes e rejeitar 26. A figura seguinte apresenta a curva característica operacional, CCO, para o plano $n = 89$, $c = 2$.



A curva característica operacional ideal discriminaria perfeitamente entre lotes bons e maus; tomaria o valor um, correspondendo a uma probabilidade de aceitação um, enquanto a qualidade do lote fosse boa, i.e., p não atingisse um valor crítico p_0 ; passaria a tomar o valor zero desse ponto em diante. Assim, todos os lotes de boa qualidade seriam aceites e todos os lotes de má qualidade rejeitados. Esta curva ideal só poderia ser atingida com inspecção a 100%, sem erro. No entanto pode ser aproximada, se se aumentar a dimensão da amostra. Assim, a precisão com que um plano separa os lotes bons e maus cresce com a dimensão da amostra. A figura seguinte mostra a influência de n no poder discriminatório de um plano.



Na figura que se segue mostra-se o efeito da variação do *número de aceitação* c na curva característica operacional. Quando c diminui, a curva baixa, chega-se para a esquerda, o que significa que um decréscimo em c conduz a planos que discriminam lotes a níveis inferiores de p .



A curva característica operacional é analisada de modo diferente por vendedores e consumidores. O vendedor está interessado nos valores de p que conduzem a uma elevada taxa de aceitação, por exemplo 0.95. Se o valor de p correspondente for 0.02, quer dizer que até 2% de defeituosos ainda há uma grande probabilidade dos lotes serem aceites. O consumidor, pelo seu lado, está interessado na protecção contra má qualidade, i.e., em não aceitar lotes de má qualidade, o que em termos de CCO corresponde ao extremo direito da curva.

Construção de planos simples

Como habitualmente, existem dois tipos de decisão, aceitar ou rejeitar o lote, e dois tipos de erros associados. À decisão de *rejeitar o lote, sendo o lote bom* (i.e, o produto está dentro das especificações) e à decisão de *aceitar o lote, sendo o lote mau*, estão associadas probabilidades, que neste caso, tomam a designação particular de *risco do produtor* e *risco do consumidor*. Em geral os planos de amostragem são delineados, i.e., são determinados os valores de n e de c , de forma a satisfazer duas condições correspondentes aos interesses do vendedor e do consumidor. Assim, definem-se dois níveis de qualidade, para efeitos do julgamento dos lotes:

- Para protecção do vendedor em lotes de boa qualidade, define-se o *nível aceitável de qualidade*, AQL (*Acceptable Quality Level*), cujo valor representa a pior qualidade a que o processo pode operar e que ainda conduz a uma probabilidade de aceitação do lote elevada, em geral 95%. Espera-se, no entanto, que o vendedor opere a uma qualidade consideravelmente melhor que AQL.
- Para protecção do consumidor contra lotes de baixa qualidade, define-se a *fracção tolerável de defeituosos*, LTPD (*Lot Tolerance Percent Defective*), também denotada por RQL (*Rejectable Quality Level*), a qual representa o valor da qualidade a partir do qual se considera que o produto não é aceitável pelo consumidor e que deve conduzir a uma probabilidade grande de rejeição do lote, ou o que é equivalente, a uma pequena probabilidade de aceitação, em geral 10%.

O risco do produtor, α , será definido por

$$\alpha = 1 - P_a(AQL) = 1 - \mathbb{P}(\text{aceitar o lote} \mid p = AQL),$$

e o risco do comprador, β , será definido por

$$\beta = P_a(LTPD) = \mathbb{P}(\text{aceitar o lote} \mid p = LTPD).$$

Os planos de amostragem são então, a maior parte das vezes, determinados a partir das especificações que se fazem em AQL e LTPD. Isto equivale a encontrar um plano cuja CCO passe por dois pontos pré-especificados (AQL, $1-\alpha$) e (LTPD, β), pontos estes que tomam relevo especial no planeamento da amostragem de aceitação.

Rectificação da inspecção

A *rectificação da inspecção* refere-se ao programa correctivo que se segue à rejeição de um lote por um *plano de amostragem de*

aceitação. Consiste, em geral, na inspecção a 100% das unidades que constituem esse lote, sendo as unidades defeituosas substituídas por boas, o que assegura que se não houver erros de inspecção os lotes previamente rejeitados saem do programa de rectificação com 0 unidades defeituosas. No entanto, se os lotes aceites tiverem uma fracção de artigos defeituosos igual a p_0 , correspondente à taxa de defeituosos com que opera o processo, a fracção de defeituosos dos lotes que resultam do processo de inspecção será igual a $p_1 < p_0$, uma vez que estes lotes são constituídos por uma mistura de lotes aceites, com uma fracção de defeituosos p_0 , e de lotes rejeitados que saem do processo de rectificação com uma fracção de defeituosos de 0%, o que mostra o efeito indirecto na qualidade de um produto resultante do processo de inspecção.

Tem pois interesse conhecer a *qualidade média à saída*, AOQ, de *Average Outgoing Quality*, do material fornecido, face à combinação do processo de amostragem com rectificação a 100%. Assim, se N denotar a dimensão do lote, n a dimensão da amostra e p a percentagem de defeituosos no processo, teremos:

- os n elementos da amostra, sem artigos defeituosos após a inspecção, pois todos os elementos defeituosos são substituídos por bons;
- os restantes $(N - n)$ elementos do lote, também sem artigos defeituosos, caso o lote tenha sido rejeitado, ou com $p(N - n)$ elementos defeituosos, se o lote tiver sido aceite.

Em termos da v.a. número de unidades defeituosas no lote a adquirir pelo comprador, admitindo rectificação dos lotes rejeitados a 100%, esta tomará o valor 0 ou $p(N - n)$, conforme o lote seja rejeitado ou aceite, e portanto, com probabilidades, $1 - P_a$ e P_a , respectivamente.

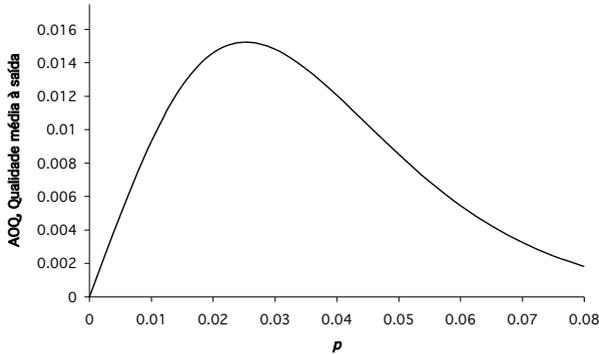
A v.a. *qualidade à saída*, que representa a fracção de elementos defeituosos no lote a adquirir pelo comprador, admitindo rectificação dos lotes rejeitados a 100%, tomará os valores 0 e $p(1 - n/N)$ com probabilidades, $1 - P_a$ e P_a , respectivamente, sendo portanto o seu

valor médio dado por

$$AOQ = 0 \times (1 - P_a) + p \left(1 - \frac{n}{N}\right) P_a = p \left(1 - \frac{n}{N}\right) P_a.$$

A qualidade média à saída, AOQ, pode ainda ser aproximada, quando n/N for suficientemente pequeno, por $AOQ \simeq pP_a$. Por exemplo, se $N = 10000$, $n = 89$, $c = 2$, $p = 0.01$, ter-se-á $P_a = 0.9397$ e $AOQ = 0.0093$, o que mostra um pequeno ganho na qualidade do produto, resultante do processo de inspeção.

Como se vê pelas fórmulas anteriores, a qualidade média à saída AOQ é uma função de p , i.e., da qualidade com que o produto é fornecido. A representação gráfica dessa função resulta numa curva, denominada *curva-AOQ*, exemplificada, em seguida, para o plano anterior.



Pode-se observar que a qualidade média à saída, AOQ, é particularmente baixa, quer quando p é pequeno (lotes que são fornecidos com boa qualidade e portanto também saem com boa qualidade), quer quando p é grande, correspondendo a lotes que entram com má qualidade, são rejeitados, entram em rectificação e saem com qualidade muito melhorada. Para valores intermédios de p , a AOQ atinge um máximo, chamado AOQL, *limite da qualidade média à saída*, o qual se obtém por derivação da função $AOQ(p)$. Este valor AOQL representa a pior qualidade média com que um produto pode sair de um programa de rectificação da inspeção.

O processo de rectificação torna aleatórias, não só a *qualidade média à saída*, mas também a quantidade do produto sujeita a inspecção, que era anteriormente fixo e igual a n . Tem também interesse conhecer o seu valor médio que se chamará *quantidade média de inspecção total*, ATI, de *Average Total Inspection*. Este dependerá da qualidade do material submetido. Assim, para um lote produzido com uma percentagem de defeituosos p , a quantidade de inspecção será igual a n , se o lote for aceite, e igual a N se o mesmo for rejeitado e portanto sujeito a inspecção 100%. Ter-se-á então

$$ATI = nP_a + N(1 - P_a) = N - (N - n)P_a,$$

que também se pode representar graficamente como uma função de p , e que para o plano do exemplo considerado conduz a $P_a = 0.9397$ e $ATI = 687$.

Estes dois parâmetros de um programa de rectificação, AOQL e ATI, podem conduzir a critérios alternativos aos parâmetros α e β de delineamento de planos de amostragem, que têm a ver com o esforço de amostragem, traduzido na quantidade média de inspecção, que se pretende que seja o menor possível. Assim, pode-se delinear um plano com um AOQL especificado (que garanta uma determinada qualidade à saída) e que minimize ATI, para o nível mais provável de qualidade do lote, p . Uma outra possibilidade consiste em encontrar o plano com um nível de protecção especificado em LTPD e que minimize ATI. Os planos resultantes podem ser facilmente obtidos por consulta das tabelas de Dodge-Romig (ver Duncan⁴, 1986). Outros detalhes podem ser encontrados em Klaassen⁵ (2001).

⁴ Duncan A.J. (1986). *Quality Control and Industrial Statistics*, 5th edition. Irwin, Homewood, Illinois.

⁵ Klaassen, C.A. (2001). Credit in acceptance sampling on attributes. *Technometrics* **43**, 212-222.

7.2.2 Planos Duplos

Um *plano de amostragem duplo* é caracterizado por quatro parâmetros: n_1 a dimensão da primeira amostra, c_1 o número de aceitação para a primeira amostra, n_2 a dimensão da segunda amostra e c_2 o número de aceitação para a amostra conjunta. Funciona do seguinte modo: retira-se uma amostra aleatória de dimensão n_1 do lote. Se o número de unidades defeituosas encontrado, X_1 , for menor ou igual a c_1 , aceita-se o lote, se for maior que c_2 rejeita-se e, se for maior que c_1 e menor ou igual a c_2 retira-se uma segunda amostra do lote, de dimensão n_2 . Conta-se o número de unidades defeituosas nesta segunda amostra, X_2 . Se o número de unidades defeituosas na amostra conjunta, $X_1 + X_2$, for menor ou igual a c_2 , aceita-se o lote, caso contrário rejeita-se.

A principal vantagem que se aponta a um plano duplo é que pode reduzir a quantidade de inspeção necessária e o custo associado, já que a dimensão da primeira amostra costuma ser inferior à dimensão usada num plano simples. Isto é óbvio sempre que a decisão seja possível apenas com o uso da primeira amostra, podendo ter efeito contrário se for necessário inspeccionar a segunda amostra até ao fim. Para obviar a este possível inconveniente é costume fazer-se *censura* (em inglês, *curtailment*) na segunda amostra, que consiste em terminar a inspeção logo que se exceda o valor c_2 . Uma outra vantagem apontada, mais do ponto de vista psicológico, consiste em dar ao lote uma segunda oportunidade, uma vez que especialmente o fornecedor acha injusto rejeitar o lote com base numa única amostra. Em termos de desvantagens refira-se, essencialmente, a maior complexidade associada a um plano duplo e o maior esforço de amostragem que pode eventualmente resultar.

Curva Característica Operacional, CCO

Representando por P_a a probabilidade de aceitação de um lote, e por P_a^I e P_a^{II} as probabilidades de aceitação na primeira e segunda amostra, respectivamente, tem-se

$$P_a = P_a^I + P_a^{II},$$

onde

$$P_a^I = \mathbb{P}(X_1 \leq c_1),$$

$$\begin{aligned} P_a^{II} &= \mathbb{P}(c_1 < X_1 \leq c_2, X_1 + X_2 \leq c_2) \\ &= \sum_{k=c_1+1}^{c_2} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 \leq c_2 - k), \end{aligned}$$

sendo para *curvas do tipo-B* (admitindo independência entre X_1 e X_2), $X_1 \sim \text{Binomial}(n_1, p)$ e $X_2 \sim \text{Binomial}(n_2, p)$.

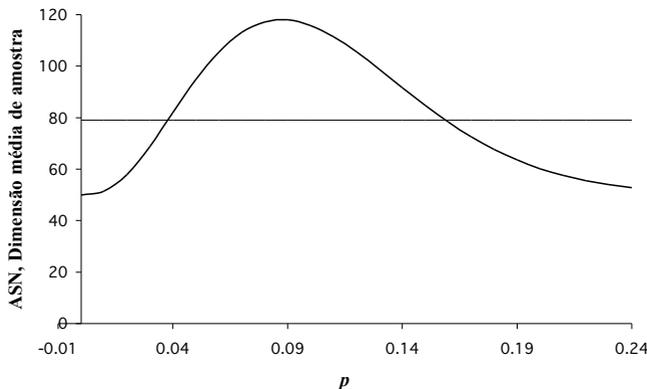
Dimensão média da amostra, ASN

Nos planos duplos, admitindo que não há censura na segunda amostra, o número de itens da amostra efectivamente inspeccionados é uma v.a. que toma os valores n_1 se não há dúvidas na decisão com base na primeira amostra (ou se aceita ou se rejeita o lote) e $n_1 + n_2$ se há necessidade de uma segunda amostra para a decisão. Assim, a dimensão média da amostra, ASN, é dada por

$$ASN = n_1 P_I + (n_1 + n_2)(1 - P_I) = n_1 + n_2(1 - P_I),$$

com $P_I = \mathbb{P}(X_1 \leq c_1 \vee X_1 > c_2)$.

Se se comparar a curva ASN do plano duplo $n_1 = 50$, $c_1 = 2$, $n_2 = 100$, $c_2 = 6$ com a recta do plano simples $n = 79$, $c = 4$ equivalente (i.e. com riscos idênticos), a figura seguinte mostra que embora o plano duplo possa ter vantagem em termos do esforço de amostragem, isso nem sempre acontece. A dimensão média da amostra é vantajosa no plano duplo quando p é pequeno ou grande; para p 's intermédios o esforço de amostragem é superior nos planos duplos.



Censura

Para ultrapassar este inconveniente é usual terminar a inspeção da segunda amostra e rejeitar o lote assim que o número de unidades defeituosas nas duas amostras exceda o número de aceitação conjunto c_2 . A este processo chama-se *censura* na segunda amostra e o seu efeito é fazer decrescer o ASN nos planos duplos, ficando agora a curva ASN abaixo da recta do plano simples. Note-se que não se recomenda, contudo, fazer censura nos planos simples, ou na primeira amostra, para que o estimador da qualidade do material sob análise seja centrado. Por exemplo, se $c = 1$, se os dois primeiros elementos inspeccionados forem defeituosos e se houver censura, a estimativa da fracção de defeituosos no lote seria um, o que é difícil de aceitar.

Construção de planos duplos

O problema do delineamento de planos de inspeção torna-se mais complicado no caso de amostragem dupla. Para a construção de planos duplos, que protejam quer o produtor quer o consumidor, verifica-se que já não é suficiente especificar dois pontos da curva característica operacional, por exemplo $(AQL, 1 - \alpha)$ e (RQL, β) , uma vez que existem agora mais parâmetros a determinar. O pro-

cesso mais usual consiste em fixar relações entre as dimensões das duas amostras n_1 e n_2 , que conduzam a planos bons. Existem tabelas, denominadas *tabelas de Grubbs* (ver Montgomery, 2004) que permitem determinar os valores de c_1 , c_2 , n_1 e n_2 , por exemplo para $n_2 = 2n_1$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.10$ e diversas razões RQL/AQL.

Rectificação da inspecção

Se todos os lotes rejeitados forem submetidos a rectificação a 100%, i.e., se inspecionarmos todos os itens do lote e substituímos os itens defeituosos por bons, pode-se calcular a *qualidade média à saída* AOQ, de um produto de qualidade p , sujeito a rectificação de inspecção num plano duplo. O número de elementos defeituosos no lote passará a ser $p(N - n_1)$ se o lote for aceite à primeira, o que acontece com probabilidade P_a^I ; será $p(N - n_1 - n_2)$ se o lote for aceite à segunda, o que acontece com probabilidade P_a^{II} ; e será zero se o lote for rejeitado, o que ocorre com probabilidade $1 - P_a$, com $P_a = P_a^I + P_a^{II}$. Assim, a *qualidade média à saída* será dada por

$$AOQ = p \left(\left(1 - \frac{n_1}{N}\right) P_a^I + \left(1 - \frac{n_1}{N} - \frac{n_2}{N}\right) P_a^{II} \right),$$

a qual será bem aproximada por $AOQ \simeq p(P_a^I + P_a^{II}) = pP_a$, para valores de n_1/N e n_2/N suficientemente pequenos.

A *quantidade de inspecção* será, neste caso de amostragem dupla, n_1 se o lote for aceite à primeira, com probabilidade P_a^I ; será $n_1 + n_2$ se o lote for aceite à segunda, com probabilidade P_a^{II} ; e será N se o lote for rejeitado e em seguida rectificado a 100%, o que ocorre com probabilidade $1 - P_a$. Logo, a *quantidade média de inspecção* do plano duplo será

$$ATI = n_1 P_a^I + (n_1 + n_2) P_a^{II} + N(1 - P_a).$$

Comparando as curvas ATI de um plano duplo e de um plano simples, com aproximadamente a mesma CCO, verifica-se um comportamento semelhante ao das curvas ASN; o plano duplo é melhor para valores pequenos ou grandes de p , mas pode ser pior para valores intermédios de p .

7.2.3 Planos Múltiplos e Planos Sequenciais

Como extensão dos planos anteriores referem-se os *planos múltiplos* e os *planos sequenciais*.

Os *planos múltiplos* usam mais de duas amostras para sentenciar o lote. Em cada etapa, se o número de elementos defeituosos for inferior ou igual ao número de aceitação, aceita-se o lote; se o número de elementos defeituosos for superior ao número de aceitação, rejeita-se o lote; caso contrário retira-se outra amostra, e o procedimento repete-se do mesmo modo, até se atingir o número de amostras pré-determinadas. As propriedades destes planos são estudadas com pormenor em Duncan (1986). A principal vantagem é a de usar amostras de dimensão mais pequena em cada etapa, o que pode ter benefícios económicos, diminuindo em termos globais o esforço de amostragem. Já se viu também que esta vantagem pode não ocorrer, se não houver censura, e além disto, estes planos são mais complexos de administrar.

Os *planos sequenciais* são também uma extensão dos planos duplos e múltiplos, mas em que não se fixa, à partida, o número máximo de amostras a utilizar para sentenciar o lote. Esse número vai depender do desenrolar do processo de amostragem. Assim, teoricamente, pode continuar indefinidamente até à inspeção a 100%. Na prática, para obviar a este inconveniente, os planos sequenciais são truncados, se o número de elementos inspeccionados for 3 vezes superior ao número que seria inspeccionado se se usasse um plano simples. Se em cada passo se usar uma amostra de dimensão um, o processo chama-se sequencial elemento-a-elemento; se a dimensão for maior que um, chama-se sequencial por grupos. O *plano sequencial elemento-a-elemento* baseia-se no teste de Wald e as suas propriedades são estudadas em Duncan (1986). A curva ASN para este plano atinge valores particularmente baixos nos extremos de p , o que pode conduzir a importantes benefícios económicos.

7.3 Planos de Amostragem para Variáveis

Quando a característica de qualidade de interesse é medida numa escala contínua, usam-se, em geral, planos de amostragem baseados na média e desvio padrão da amostra, em substituição dos anteriormente estudados planos de amostragem para atributos. Estes planos denominam-se *planos de amostragem para variáveis* e assumem que se conhece a distribuição de probabilidade da característica de qualidade. Neste caso é possível determinar o número de elementos a recolher e o critério para sentenciar lotes, com riscos escolhidos α e β de rejeição e aceitação de lotes de qualidade especificada.

A principal vantagem dos planos para variáveis é a de que necessitam de amostras de menor dimensão que os planos para atributos, para idênticas CCO (ou para idênticos riscos α e β), o que pode conduzir a menores custos de amostragem, sendo particularmente úteis se os elementos forem dispendiosos ou os testes destrutivos. Especialmente quando o AQL é muito pequeno, os planos para atributos requerem amostras de dimensão muito grande. Além disso, os dados na forma de medições fornecem mais informação sobre o processo do que apenas o número de elementos defeituosos. Mas estes planos também têm desvantagens. A distribuição da característica de qualidade tem de ser conhecida e, em geral, assume-se que é Normal. Se se desenvolverem planos baseados nestes pressupostos, e houver afastamento da normalidade, podem-se correr riscos reais bastante diferentes dos especificados. Além disso, é preciso desenvolver um plano para cada característica de qualidade a analisar. Se se tiver quatro características de qualidade, precisamos de quatro planos, enquanto com a amostragem para atributos bastava apenas um plano para aceitar ou rejeitar o lote. Finalmente, o plano para variáveis pode rejeitar um lote, mesmo que não se observe nenhum elemento defeituoso na amostra, o que é raro, mas quando acontece conduz a veementes protestos do fornecedor, quanto ao método de rejeição.

7.3.1 Relação entre os Parâmetros de um Modelo Gaussiano e a Fracção de Não-conformes

Se determinada característica de qualidade segue uma distribuição Normal, existe uma relação fundamental entre a fracção de não conformes produzida pelo processo, e o respectivo valor médio μ e desvio padrão σ . Exemplifique-se com o caso mais simples de haver apenas um limite de especificação, o limite de especificação inferior, LEI. Assim, a fracção de não conformes p é dada por $\Phi(z)$, com $z = (LEI - \mu)/\sigma$. Por exemplo, se σ for constante, a fracção de não conformes varia inversamente com μ , i.e., quanto maior for o afastamento entre μ e LEI, com $\mu > LEI$, menor é a fracção de não conformes. É então equivalente, dados os limites de especificação, conhecer μ e σ , ou então z , ou ainda p , daí ser possível representar a qualidade do processo, como alternativa a p , pelo valor de z correspondente.

De seguida descrevem-se os planos para variáveis mais usados, que assumem que a característica de qualidade em estudo é distribuída de acordo com um modelo Normal, com desvio padrão conhecido. Veremos na Secção 7.3.2 planos que controlam a fracção defeituosa, e na Secção 7.3.3 planos que controlam a média do processo. Para outros planos ver Duncan (1986) e Montgomery (2004), já atrás referidos, bem como Schilling & Neubauer⁶ (2009). Algumas considerações sobre as vantagens de utilizar técnicas não destrutivas para a avaliação da qualidade são apresentadas em Reese *et al.*⁷ (2008).

⁶ Schilling, E.G. & D.V. Neubauer (2009). *Acceptance Sampling in Quality Control*, 2nd edition, Chapman and Hall/CRC.

⁷ Reese, C.S., P. Deininger, M.S. Hamada & R. Krabill (2008). Exploring the statistical advantages of nondestructive evaluation over destructive testing. *J. Quality Technology* **40**, 259-267.

7.3.2 Planos para Variáveis, para Controlar a Fracção de Não-conformes, σ Conhecido

Este plano será ilustrado no caso da existência de um limite de especificação inferior LEI. Retira-se uma amostra do lote, referente a uma característica de qualidade contínua com distribuição Normal(μ, σ) ou, equivalentemente, de qualidade $p = \Phi(z)$, com $z = (LEI - \mu)/\sigma$, e considera-se \bar{X} como estimador de μ . Pretende-se sentenciar o lote com base no valor da média amostral: se esta conduzir a uma fracção de defeituosos pequena aceita-se o lote; caso contrário rejeita-se. Para o efeito pode-se proceder por duas vias (métodos) equivalentes:

via 1. Calcula-se o valor da estatística $z_L = (\bar{X} - LEI)/\sigma$. Um valor de z_L grande corresponde também a um afastamento grande entre \bar{X} e LEI, assim como entre μ e LEI, e portanto a um valor estimado para a fracção de não conformes, \hat{p} , pequeno. Se se rejeita o lote quando \hat{p} for superior a um determinado valor crítico, p_{cri} , que conduza a um risco α , pode-se transformar esse p_{cri} num valor crítico k , e rejeitar o lote se $z_L < k$, pois um valor de z_L pequeno significa que a média está demasiado próxima de LEI para conseguir assegurar uma fracção de não conformes que seja satisfatória.

via 2. Transforma-se o z_L anterior na estimativa para p correspondente, $\hat{p} = 1 - \Phi(z_L)$. No entanto, para obter o estimador centrado de variância mínima para p deve usar-se $Q_L = z_L \sqrt{n/(n-1)}$ em vez de z_L . Se \hat{p} exceder um valor crítico conveniente p_{cri} , rejeita-se o lote.

Os dois processos anteriores podem ser delineados de forma a dar resultados equivalentes. Pretende-se determinar a dimensão da amostra n , e o valor crítico k ou p_{cri} que garantam as características especificadas para o plano, em geral que passe por dois pontos de interesse da CCO, nomeadamente (AQL, $1 - \alpha$) e (LTPD, β).

Suponha-se, por exemplo, que a tensão de ruptura X de determinado produto tem uma especificação inferior de 17 000 psi e que se pretende delinear, para esse produto, um plano de amostragem para variáveis que, em termos da fracção de não conformes apresentada para AQL=0.01 um valor de $\alpha = 0.05$ e para LTPD=0.08 um valor de $\beta = 0.10$. Considere-se que X tem distribuição Normal, com desvio padrão conhecido e igual a 800 psi.

Atendendo a que a fracção de não conformes é dada por $p = \Phi((LEI - \mu)/\sigma) = 1 - \Phi((\mu - LEI)/\sigma)$, para esta distribuição, um valor de fracção não conforme AQL=0.01 corresponde a um valor $z_1 = (\mu_1 - 17000)/800 = 2.3263$ e consequentemente, a um valor médio $\mu_1 = 17000 + 2.3263 \times 800 = 18861$ psi. Da mesma forma, um valor de LTPD=0.08 corresponde a $z_2 = 1.4051$ e a um valor médio $\mu_2 = 18124$ psi.

Seguindo a *via 1* aceita-se o lote se $z_L = (\bar{X} - 17000)/800 > k$. Os valores de n e k serão determinados de modo a verificarem $\mathbb{P}(z_L > k | \mu_1) = 1 - \alpha$ e $\mathbb{P}(z_L > k | \mu_2) = \beta$, o que conduz ao sistema de equações $(k - z_1)\sqrt{n} = \Phi^{-1}(\alpha)$ e $(k - z_2)\sqrt{n} = \Phi^{-1}(1 - \beta)$. Daqui pode-se tirar $n = ((\xi_{1-\alpha} + \xi_{1-\beta})/(z_1 - z_2))^2$, onde ξ_α denota o quantil de probabilidade α na distribuição Normal reduzida, que no nosso exemplo conduz a $n \approx 10$ e $k = 2.3263 - 1.6449/\sqrt{10} = 1.806$ se se usar a primeira equação, ou $k = 1.4051 + 1.2816/\sqrt{10} = 1.810$ se se usar a segunda. Tomar-se-á então a média destes dois valores, obtendo-se $k = 1.808$ e $n = 10$ como solução para o nosso plano. A regra de decisão será então a seguinte: toma-se uma amostra de dimensão 10 do lote e calcula-se $z_L = (\bar{X} - 17000)/800$. Se $z_L > 1.808$ aceita-se o lote.

Seguindo a *via 2*, tem-se o passo extra de transformar o valor de z_L numa estimativa da fracção não conforme. No nosso exemplo, aceita-se o lote quando $z_L > 1.808$, ou usando $Q_L = z_L \sqrt{n/(n-1)}$, quando $Q_L > 1.808 \sqrt{10/9} = 1.906$, ou, equivalentemente, se $\hat{p} = 1 - \Phi(Q_L) < 1 - \Phi(1.906)$, ou seja, para $\hat{p} < 0.0283 = p_{cri}$.

7.3.3 Planos para Variáveis, para Controlar o Valor Médio do Processo, σ Conhecido

Os planos que se descrevem de seguida, são também planos para variáveis e usam como variável de decisão a média amostral \bar{X} . São utilizados, em geral, na amostragem de produtos que são fornecidos em embalagens, sacos, caixas ou contentores. O julgamento dos lotes em bons e maus baseia-se, agora, não na fracção de não conformes ser alta ou baixa, mas sim no valor da estimativa para o valor médio do processo. Estes planos são delineados com recurso aos testes de hipóteses. Continua a assumir-se que a característica de qualidade de interesse segue uma distribuição Normal, com variância conhecida σ^2 .

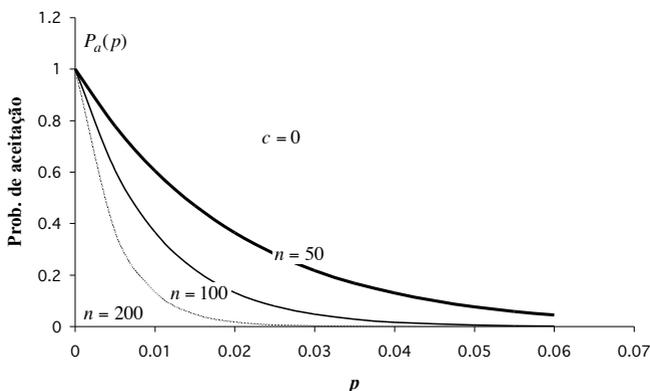
Suponha-se, por exemplo, que um industrial de transformação de madeira considera que um lote de material bruto é bom se o valor médio do nível de formaldeído emitido for inferior ou igual a 0.3 ppm, e que o nível de formaldeído emitido segue uma distribuição Normal, com desvio padrão conhecido, $\sigma = 0.10$. As hipóteses de interesse são então, $H_0 : \mu \leq 0.3$ vs $H_1 : \mu > 0.3$, aceitando-se o lote quando $\bar{X} < k$. Se os valores de n e k forem determinados de acordo com as especificações $P(\bar{X} < k | \mu = 0.3) = 0.95$ e $P(\bar{X} < k | \mu = 0.4) = 0.10$, obtemos $n = 9$ e $k = 0.356$ (média dos valores de k obtidos recorrendo às duas condições especificadas, depois de se arredondar n para 9). Isto significa que os lotes são sentenciados com base em amostras de dimensão $n = 9$, rejeitando-se o lote se a emissão média de formaldeído na amostra for superior a 0.356 ppm.

Estes planos para variáveis podem ser generalizados ao caso de σ desconhecido. Pode-se também julgar a qualidade dos lotes com base nos valores tomados pelo desvio padrão da característica de qualidade, em vez do valor médio, ou usar métodos sequenciais na tentativa de encontrar os planos mais económicos ou mais rápidos. Em caso de afastamento da hipótese de normalidade devem-se fazer os ajustamentos necessários, correspondentes a cada distribuição particular (ver Duncan, 1986).

7.4 Planos Especiais

7.4.1 Amostragem em Cadeia (*Chain Sampling*)

Quando os processos de inspeção são destrutivos ou muito dispendiosos são recomendáveis planos de amostragem que utilizem amostras de dimensão reduzida. Estes planos conduzem frequentemente a números de aceitação zero. Planos com $c = 0$ apresentam curvas características convexas e, como consequência, uma queda abrupta na probabilidade de aceitação do lote para uma pequena variação na qualidade p do produto, o que é bastante gravoso para o produtor e obriga-o, se se usar rectificação da inspeção, a verificar uma grande quantidade de lotes de qualidade aceitável. A figura seguinte compara as curvas características de planos com número de aceitação zero.



Dodge⁸ (1955a) sugeriu um processo alternativo aos planos de amostragem simples com número de aceitação zero, o chamado *método de amostragem em cadeia*, que utiliza também a informação dos lotes precedentes. Assim, para cada lote, selecciona-se uma amostra de dimensão n e observa-se o número de elementos defeituosos. Para um plano de ordem i , procede-se

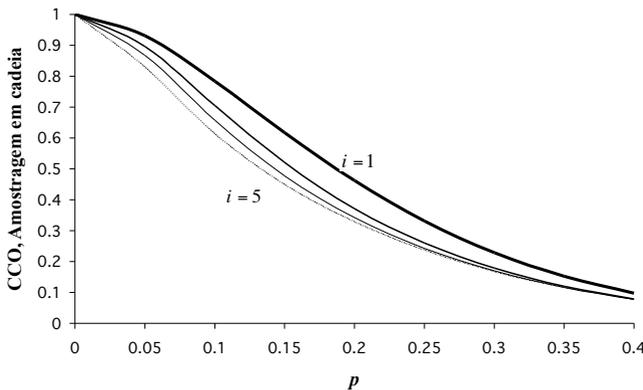
⁸ Dodge, H.F. (1955a). Chain sampling inspection plan. *Industrial Quality Control* 11, 10-13.

do seguinte modo: se a amostra tiver zero defeituosos, aceita-se o lote; se a amostra tiver dois ou mais defeituosos, rejeita-se o lote; se a amostra tiver um elemento defeituoso, aceita-se o lote, desde que não tenha havido elementos defeituosos nos i lotes precedentes. Por exemplo, o plano $n = 5$, $i = 3$, aceita um lote se não houver elementos defeituosos na amostra de dimensão cinco, ou se houver um elemento defeituoso nesta amostra, mas os três lotes precedentes não continham defeituosos nas respectivas amostras, também de dimensão 5. Este procedimento já conduz a uma CCO alternativa, com uma forma conveniente perto da origem, sendo agora mais difícil rejeitar lotes com valores de p muito pequenos.

A CCO para este plano terá a forma

$$P_a = P(0, 5) + P(1, 5)(P(0, 5))^3,$$

em que $P(0, n)$ e $P(1, n)$ representam as probabilidades de obter 0 e 1 elementos defeituosos, respectivamente, numa amostra de dimensão $n = 5$.



7.4.2 Amostragem Contínua. Planos CSP-1

Os planos descritos anteriormente partiam do princípio de que o produto se apresentava para inspeção, em lotes. No entanto,

há certos processos de fabrico contínuo em que a produção não se apresenta naturalmente formada em lotes como, por exemplo, processos complexos de montagem. Neste caso, o lote terá um sentido mais lato e corresponderá a um certo segmento da produção. Para este tipo de produção contínua existem planos especiais que consistem em alternar sequências de inspecção por amostragem, com inspecção a 100%.

Os planos começam, em geral, pela inspecção a 100% e se não houver unidades defeituosas num determinado número de elementos, passa-se à inspecção por amostragem, até que um número especificado de elementos defeituosos seja encontrado, retomando-se a inspecção a 100%. Estes planos podem considerar-se de rectificação, na medida em que a qualidade do produto é melhorada pelo processo de inspecção. O plano mais simples, *plano* CSP-1, *Continuous Sampling Plan*, de Dodge⁹ (1943) começa pela inspecção a 100% de todas as unidades. Quando se atingir o número pré-especificado i de unidades consecutivas não defeituosas, passa-se a uma fase de inspecção por amostragem, em que apenas uma fracção f dos elementos é inspeccionada. Estas unidades amostrais são seleccionadas aleatoriamente, de tempos a tempos, do processo contínuo de produção. Passa-se novamente à inspecção a 100% quando se detecta uma unidade defeituosa (o que dá o nome CSP-1), sendo esta substituída. As propriedades deste plano dependem dos valores de i e f , sendo o número médio de unidades inspeccionadas a 100%, após a ocorrência de um defeito, dado por $u = (1 - q^i)/(pq^i)$, em que $q = 1 - p$ e p é a fracção de defeituosos quando o processo está a operar sob controlo, e o número médio de unidades amostradas até ocorrer um defeito é dado por $v = \frac{1}{fp}$. Para mais propriedades deste plano e suas generalizações veja-se Duncan (1986) e Gao & Tang¹⁰ (2005).

⁹ Dodge, H.F. (1943). A sampling inspection plan for continuous production. *The Ann. Math. Statist.* **14**, 264-279.

¹⁰ Gao, Y. & L.-C. Tang (2005). The effect of correlation on chain sampling plans. *Quality and Reliability Engineering Int.* **21**, 51-61.

7.4.3 Planos de Amostragem Skip-lot

Dodge¹¹ (1955b) apresentou estes *planos skip-lot*, SkSP, como extensão dos planos de amostragem contínua a lotes. Quando se conhece a história de qualidade do vendedor e esta é boa, pode-se apenas inspeccionar uma fracção f dos lotes submetidos, reduzindo o esforço de inspeção. À semelhança dos planos CSP começa-se por inspeccionar todos os lotes. Quando se atingir determinado critério (por exemplo, i lotes consecutivos aceites) passa-se só a inspeccionar alguns lotes. Estes são escolhidos aleatoriamente de acordo com uma certa frequência, por exemplo, um lote em dois, o que significa que a proporção média de lotes inspeccionados é 50%. Quando, por exemplo, um lote for rejeitado, retoma-se a inspeção de todos os lotes.

7.4.4 Planos de Amostragem para Produtos de Alta Qualidade

Estes planos, veja-se Schilling¹² (1978), estão vocacionados para inspeção de lotes isolados ou produtos cuja inspeção exija grande segurança, em que se requerem amostras de dimensão mínima. Estes planos têm número de aceitação zero e, devido às características especiais da CCO neste caso, só devem ser utilizados se $p \leq 0.05$ LTPD, para garantir um risco do produtor razoavelmente pequeno (da ordem de 0.1). Se o valor de LTPD se aproximar mais que o estipulado de p , devem usar-se planos de amostragem com $c > 0$ (por exemplo os planos de Dodge-Romig, descritos na Secção 7.4.5). Estes planos especificam o risco do consumidor em LTPD, considerando por exemplo $P_a(LTPD) = 0.1$, e dão a dimensão da amostra como uma fracção da dimensão do lote. Para mais pormenores e tabela de derivação do plano, veja-se Montgomery (2004).

¹¹ Dodge, H.F. (1955b). Skip-lot sampling plans. *Industrial Quality Control* **11**, 3-5.

¹² Schilling, E.G. (1978). A lot sensitive sampling plan for compliance testing and acceptance inspection. *Journal of Quality Technology* **10:2**, 47-51.

7.4.5 Planos de Amostragem de Dodge-Romig

Estes planos minimizam o ATI, quantidade total média de inspeção, para uma protecção especificada em LTPD (ou um dado AOQL). Dodge e Romig (1959) tabelaram extensivamente estes planos, quer para o caso de amostragem simples, quer para amostragem dupla (ver Montgomery, 2004).

7.5 Erros de Inspeção

No delineamento de planos de amostragem assume-se que o processo de inspeção está isento de erros, o que nem sempre é o caso, chegando-se a ter 25% a 30% de erro de inspeção em processos complexos. Os erros distorcem as curvas características dos planos de amostragem e, portanto, também características desses planos como o AOQ e o ATI, entre outras. Há dois tipos de erros passíveis de serem cometidos em amostragem de aceitação: o erro de tipo I, que consiste em classificar como defeituoso um elemento que é bom, e o erro de tipo II, que consiste em classificar como bom um elemento que é defeituoso. O efeito de um erro de tipo I na CCO consiste em reduzir P_a , para todos os valores de p , pois está-se a classificar incorrectamente como defeituoso um elemento bom. De igual forma, um erro de tipo I reduz AOQ, pois está-se a aumentar a inspeção a 100% e consequentemente, aumenta o valor ATI, devido à classificação incorrecta de um elemento bom.

Capítulo 8

Teoria da Fiabilidade

Em *Teoria da Fiabilidade* estamos essencialmente interessados em conhecer o comportamento de determinado equipamento ou *sistema*, mais ou menos complexo, com um certo número finito n de *componentes*, estimando parâmetros relacionados com a variável aleatória T , tempo de vida desse sistema.

Admitiremos que o estado do sistema, considerado num instante fixo do tempo (usualmente o momento presente) ou, mais geralmente, evoluindo no tempo, depende exclusivamente do estado das suas componentes.

A um sistema também chamaremos frequentemente uma *estrutura* e ao número n das suas componentes chamaremos *ordem* dessa estrutura.

8.1 Conceitos Fundamentais em Fiabilidade

Em Teoria da Fiabilidade são de particular relevo:

- A v.a. não negativa T , *tempo de vida* do sistema, que admitimos ser função exclusiva das variáveis aleatórias T_i , tempo de vida da i -ésima componente, $1 \leq i \leq n$.

- Numa perspectiva *estática*, a *função de estrutura* do sistema, definida por

$$\phi = \phi(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{se o sistema está a funcionar} \\ 0 & \text{se o sistema está avariado,} \end{cases} \quad (8.1)$$

onde $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, e

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se a } i\text{-ésima componente está a funcionar} \\ 0 & \text{se a } i\text{-ésima componente está avariada.} \end{cases}$$

Nesta perspectiva *estática*, temos ainda a *fiabilidade*,

$$\rho = \mathbb{P}(\phi(\underline{X}) = 1) = \mathbb{E}(\phi(\underline{X})), \quad (8.2)$$

onde ϕ é a função estrutura em (8.1).

- Numa perspectiva *dinâmica*, temos a *função de fiabilidade* $R(t)$ (*R de reliability*), usualmente designada por *fiabilidade do sistema no instante t*, directamente relacionada com a f.d. da v.a. T , pois

$$R(t) = R_T(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F_T(t). \quad (8.3)$$

8.2 Importância das Estatísticas Ordinais em Fiabilidade

A importância das estatísticas ordinais em *Fiabilidade* reside, entre outros, nos seguintes factos:

- De um ponto de vista probabilístico, a v.a. T , tempo de vida do sistema, pode-se sempre exprimir como uma função de estatísticas ordinais que envolvem as variáveis aleatórias T_i , $1 \leq i \leq n$.
- Em *testes de vida*, testes cujo objectivo é usualmente inferir sobre características populacionais de T , como por exemplo o tempo médio de vida, $\mu_T = \mathbb{E}(T)$, a variância do tempo de

vida, $\sigma_T^2 = \text{Var}(T)$, ou mais geralmente a função de fiabilidade $R_T(t)$, $t > 0$, as amostras recolhidas são quase sempre *amostras censuradas*, e conseqüentemente a verosimilhança dessas amostras pode ser identificada com a f.d.p. de um certo número de estatísticas ordinais.

8.2.1 Tempos de Vida de Estruturas Usuais e Estatísticas Ordinais

Designemos por T o tempo de vida de uma estrutura com n componentes independentes e idênticamente distribuídas (i.i.d.), com tempos de vida (T_1, T_2, \dots, T_n) , com f.d. comum $F(\cdot)$.

Designemos por

$$(T_{1:n} \leq T_{2:n} \leq \dots \leq T_{n:n})$$

a amostra das estatísticas ordinais ascendentes associada à amostra de tempos de vida das componentes, sendo

$$T_{1:n} = \min_{1 \leq i \leq n} T_i \quad \text{e} \quad T_{n:n} = \max_{1 \leq i \leq n} T_i.$$

As estruturas mais frequentes são:

Estruturas em série

Uma estrutura em série funciona se e só se funcionarem todas as suas componentes. Tem-se pois para a v.a. T , tempo de vida,

$$T = \min_{1 \leq i \leq n} T_i = T_{1:n},$$

e conseqüentemente

$$F_T(t) = F_{1:n}(t) = 1 - (1 - F(t))^n.$$

Para a função de fiabilidade $R_T(t)$, definida em (8.3), tem-se

$$R_T(t) = (1 - F(t))^n,$$

tendo-se para a função de estrutura ϕ , definida em (8.1),

$$\phi(\underline{X}) = \min_{1 \leq i \leq n} X_i = X_{1:n} \left(\equiv \prod_{i=1}^n X_i \right).$$

Conseqüentemente, a fiabilidade da estrutura, definida em (8.2), é

$$\rho = p^n,$$

onde p é a probabilidade de funcionamento de qualquer uma das componentes idênticas.

Estruturas em paralelo

Uma estrutura em paralelo funciona se e só se funcionar pelo menos uma das suas componente. Tem-se pois

$$T = \max_{1 \leq i \leq n} T_i = T_{n:n},$$

e conseqüentemente

$$F_T(t) = F_{n:n}(t) = F^n(t),$$

$$R_T(t) = 1 - F^n(t),$$

$$\phi(\underline{X}) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i = X_{n:n} \left(\equiv 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i) \right),$$

também denotado por $\prod_{i=1}^n X_i$, tendo-se

$$\rho = 1 - (1 - p)^n,$$

onde p é mais uma vez a probabilidade de funcionamento de qualquer uma das componentes idênticas.

Estruturas i -de- n

Uma estrutura i -de- n funciona se e só se funcionarem pelo menos i das suas componentes, $1 \leq i \leq n$. Então

$$T = T_{n-i+1:n},$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} F_T(t) = F_{n-i+1:n}(t) &= \sum_{k=n-i+1}^n \binom{n}{k} (F(t))^k (1 - F(t))^{n-k} \\ &= \frac{1}{B(i, n - i + 1)} \int_0^{F(t)} t^{n-i} (1 - t)^{i-1} dt, \end{aligned}$$

que é a função *Beta Incompleta* $I_{F(t)}(n-i+1, i)$, convenientemente tabelada em Pearson & Hartley¹ (1970), Tabela 16. Tem-se ainda

$$\begin{aligned} R_T(t) &= \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} (1 - F(t))^k (F(t))^{n-k}, \\ \phi(\underline{X}) &= X_{n-i+1:n}, \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\rho = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$$

onde p é a probabilidade de funcionamento de qualquer uma das componentes idênticas.

Esta estrutura engloba obviamente as estruturas anteriores:

- Estrutura 1-de- n \equiv Estrutura em paralelo;
- Estrutura n -de- n \equiv Estrutura em série.

¹ Pearson, E.S. & H.O. Hartley (1970). *Biometrika Tables for Statisticians*. Cambridge University Press.

Outras estruturas

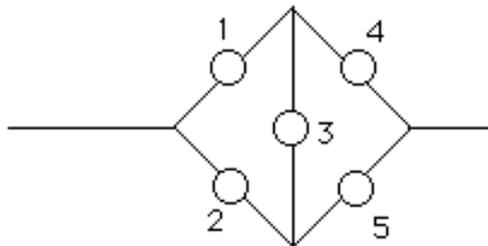
Estrutura coerente é qualquer estrutura cuja *função de estrutura* é *não decrescente* e cujas *componentes* são *todas relevantes*.

Note-se que, por definição, a i -ésima componente diz-se *irrelevante* para a estrutura se a função de estrutura ϕ for constante em x_i .

Sem entrarmos em detalhe sobre a teoria das *estruturas coerentes* (que pode ser estudada em Barlow & Proschan², 1975 e Yang³, 2007) convém referir que é possível demonstrar o seguinte teorema:

Teorema. *Qualquer estrutura coerente pode-se exprimir como uma estrutura em série de componentes em paralelo, denominada estrutura série-paralelo, ou uma estrutura em paralelo de componentes em série, denominada estrutura paralelo-série.*

Consideremos o seguinte exemplo de uma estrutura em ponte:



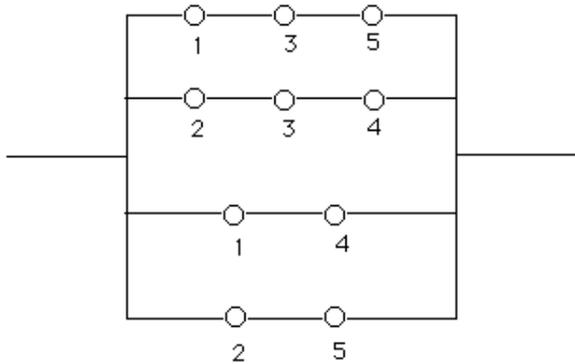
Para proceder às representações explicitadas no teorema torna-se necessário identificar os *caminhos mínimos* — caminhos que permitem o funcionamento do circuito e sem componentes irrelevantes, e os *cortes mínimos* — conjunto de componentes, todas relevantes, que quando retiradas implicam o não funcionamento do circuito. No exemplo em estudo temos:

² Barlow, R.E. & F. Proschan (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing — Probability Models*. John Wiley and Sons.

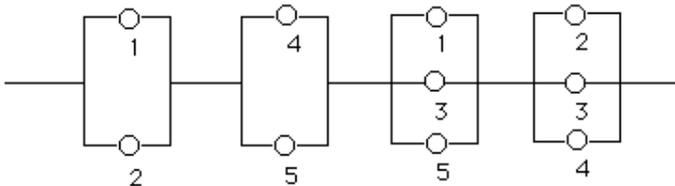
³ Yang, G. (2007). *Life Cycle Reliability Engineering*. John Wiley and Sons.

- Caminhos mínimos: $\{1,4\}$, $\{2,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$;
- Cortes mínimos: $\{1,2\}$, $\{4,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$.

Temos conseqüentemente as seguintes representações do sistema inicial:



e



Conseqüentemente

$$T = \max(\min(T_1, T_3, T_5), \min(T_2, T_3, T_4), \min(T_1, T_4), \min(T_2, T_5)) \\ = \min(\max(T_1, T_2), \max(T_4, T_5), \max(T_1, T_3, T_5), \max(T_2, T_3, T_4))$$

Se forem

- $P_j, 1 \leq j \leq k$, os caminhos mínimos,
- $C_j, 1 \leq j \leq r$, os cortes mínimos,

tem-se

$$\phi(X) = \prod_{j=1}^k \phi_{P_j}(X) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in P_j} X_i = 1 - \prod_{j=1}^k \left(1 - \prod_{i \in P_j} X_i\right),$$

ou

$$\phi(X) = \prod_{j=1}^r \phi_{C_j}(X) = \prod_{j=1}^r \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - X_i)\right).$$

Neste caso particular tem-se

$$\rho = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5. \quad (8.4)$$

A distribuição não idêntica das componentes não causa problemas, pois:

Estrutura em série

$\mathbb{P}(\phi(\underline{X}) = 1) = \prod_{i=1}^n p_i$, com p_i probabilidade de funcionamento da i -ésima componente, $1 \leq i \leq n$.

$R(t) = \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t))$, com $F_i(t)$, tempo de vida da i -ésima componente, $1 \leq i \leq n$.

Estrutura em paralelo

$\mathbb{P}(\phi(\underline{X}) = 1) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$, com p_i probabilidade de funcionamento da i -ésima componente, $1 \leq i \leq n$.

$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t)$, com $F_i(t)$, tempo de vida da i -ésima componente, $1 \leq i \leq n$.

No entanto se as componentes estiverem associadas (situação frequente pois as diferentes componentes estão em princípio sujeitas ao mesmo tipo de fadiga e a avaria de uma componente vai com certeza trazer sobrecarga para as outras componentes) as fórmulas anteriores não são obviamente válidas. Num contexto geral, o que se pode fornecer são *limites superiores* ou *limites inferiores* para a *fiabilidade* ou *função de fiabilidade*.

Sob a validade de uma *associação positiva* temos para a *estrutura em série*,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(\phi(X) = 1) \geq \prod_{i=1}^n p_i \\ R(t) \geq \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t)). \end{array} \right.$$

Os valores $\prod_{i=1}^n p_i$ e $\prod_{i=1}^n (1 - F_i(t))$ fornecem pois sub-estimativas para a fiabilidade e função de fiabilidade.

Para uma *estrutura em paralelo* temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(\phi(X) = 1) \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \\ R(t) \leq 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t). \end{array} \right.$$

Os valores $1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$ e $1 - \prod_{i=1}^n F_i(t)$ fornecem pois supra-estimativas para a fiabilidade e função de fiabilidade, respectivamente.

Genericamente, qualquer que seja o sistema coerente, com componentes *positivamente associadas*,

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq \rho \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i), \quad (8.5)$$

e

$$\prod_{i=1}^n (1 - F_i(t)) \leq R(t) \leq 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t).$$

Estes limites superiores e inferiores são obviamente grosseiros e podem ser melhorados. Convém desde já alertar para o facto óbvio destes limites serem usualmente mais fáceis de obter do que $\rho = \mathbb{P}(\phi(\underline{X}) = 1)$ ou $R(t)$, sendo muitas vezes utilizados pelos fabricantes, na informação dada ao cliente.

Limites superiores e inferiores mais rigorosos podem ser obtidos através da representação da estrutura coerente em série ou em paralelo.

Mais uma vez, se forem

$$\begin{aligned} & P_j, 1 \leq j \leq k, \quad \text{os caminhos mínimos,} \\ e & C_j, 1 \leq j \leq r, \quad \text{os cortes mínimos,} \end{aligned}$$

tem-se

$$\prod_{j=1}^r \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right) \leq \rho \leq 1 - \prod_{j=1}^k \left(1 - \prod_{i \in P_j} p_i \right), \quad (8.6)$$

uma vez que

$$\prod_{j=1}^r \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - X_i) \right) = \phi(X) = 1 - \prod_{j=1}^k \left(1 - \prod_{i \in P_j} X_i \right).$$

No exemplo apresentado anteriormente, enquanto a primeira desigualdade para a fiabilidade, fornecida em (8.5), nos daria

$$l_I^{(1)} := p^5 \leq \rho \leq 1 - (1 - p)^5 =: l_S^{(1)}, \quad (8.7)$$

a segunda desigualdade, em (8.6), dar-nos-á

$$\begin{aligned} l_I^{(2)} &:= (1 - (1 - p)^2)^2 (1 - (1 - p)^3)^2 \leq \rho \\ &\leq 1 - (1 - p^2)^2 (1 - p^3)^2 =: l_S^{(2)}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

que nos vai permitir obter, neste caso particular, um intervalo bastante mais apertado, como veremos adiante.

Convém no entanto notar que nem sempre os limites em (8.6) estão muito próximos da fiabilidade real, podendo mesmo ser piores que os limites inicialmente considerados, em (8.5).

Outro tipo de limites frequentemente utilizados são os min-max e max-min, que se baseiam no facto de se ter, para qualquer estrutura coerente

$$\max_j (\mathbb{E}(\phi_{P_j}(\underline{X}))) \leq \rho \leq \min_j (\mathbb{E}(\phi_{C_j}(\underline{X}))),$$

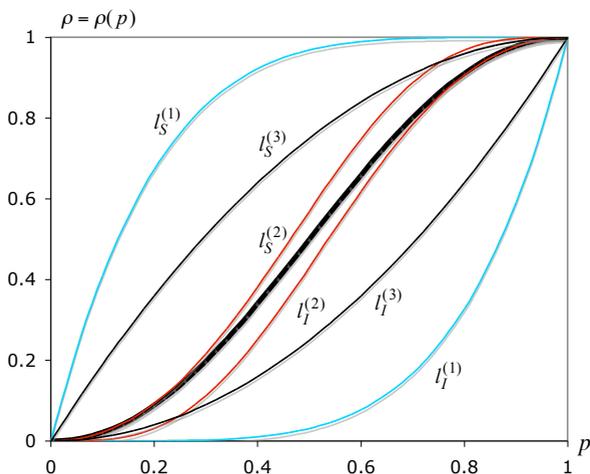
ou equivalentemente,

$$\max_j \left(\prod_{i \in P_j} p_i \right) \leq \rho \leq \min_j \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right). \quad (8.9)$$

No caso particular do exemplo apresentado, e com base em (8.9), teremos

$$l_I^{(3)} := p^2 \leq \rho \leq 1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2 =: l_S^{(3)}. \quad (8.10)$$

Na figura seguinte, apresentamos para além do verdadeiro valor da fiabilidade $\rho = \rho(p)$ da estrutura em ponte, fornecido em (8.4), os limites superiores e inferiores em (8.7), (8.8) e (8.10).



8.2.2 Mecanismos de Censura

Começaremos por nos referir aos diferentes tipos de censura, e passaremos em seguida a um exemplo do mecanismo de censura mais frequente em Fiabilidade, a *censura no número de componentes*.

Conceito de censura

Um tipo de dados contínuos importante em *Fiabilidade* são os dados de avarias de equipamento. Será com este tipo de dados que iremos exemplificar o conceito de *censura*.

Ao colocarmos em experiência n unidades, com o objectivo de inferir sobre a variável T , tempo de vida dessas unidades, podemos recolher dados dos seguintes tipos:

1. *Completo*s — se recolhermos os *instantes de avaria* de todas as n unidades na amostra;
2. *Incompletos* ou *Censurados* — se recolhermos os *instantes de avaria* de k unidades que falharam e os *tempos de funcionamento* das $n - k$ unidades não avariadas. A esses tempos de funcionamento chamamos *tempos de censura*.

Se as unidades que não se avariaram tiverem todas o mesmo tempo de censura, diremos que os dados foram sujeitos a *censura simples*; caso contrário, diremos que os dados foram sujeitos a *censura múltipla*.

No caso particular referido anteriormente, houve uma porção superior da amostra ordenada que foi excluída. Estamos pois perante um caso de *censura à direita* — decidiu-se parar a experiência quando k unidades falharam, ou seja, estamos a trabalhar com a amostra das k estatísticas ordinais inferiores de uma amostra potencial de dimensão n . Podemos no entanto ter, de forma análoga, *censura à esquerda* ou *censura dupla*.

Se se fixar um instante T_0 em que se pretende parar a experiência, o número de observações censuradas é uma variável aleatória, e temos aquilo que usualmente se designa por *censura de tipo I* ou *censura no tempo*, sendo designada por *censura de tipo II* aquele tipo de censura em que a uma amostra potencial de dimensão n falta um número conhecido de observações (de um lado ou de ambos os lados).

E quando é que temos dados multiplamente censurados? Podemos distinguir as seguintes situações:

1. Algumas unidades foram removidas antes de falharem.
2. Perderam-se algumas unidades ou avariaram-se, mas devido a causas estranhas.
3. Em alguns processos de *testes de vida*, que referiremos a seguir e estudaremos mais adiante na Secção 8.5, as unidades começam a ser testadas em instantes diversos, mas são retiradas simultaneamente da experiência.

Temos então dados multiplamente censurados.

Exemplo de aplicação

Admitamos um dos *testes de vida* mais simples em modelo de vida $F(\cdot)$, em que de um lote de n unidades postas em funcionamento num instante inicial $t = 0$, se recolheram k tempos de vida $U_1 < \dots < U_k$. Tem-se então

$$(U_1, U_2, \dots, U_k) \stackrel{d}{=} (T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{k:n}),$$

em que (T_1, T_2, \dots, T_n) é a amostra *potencial* (não observada) dos n tempos de vida das n unidades postas em funcionamento no instante inicial.

A função densidade de probabilidade da amostra é então

$$\frac{n!}{(n-k)!} \prod_{i=1}^k f(u_i) (1 - F(u_k))^{n-k} \quad \text{se } u_1 < u_2 < \dots < u_k.$$

No caso particular do modelo exponencial com valor médio σ , modelo extraordinariamente importante em Fiabilidade, i.e., quando estamos perante o modelo de vida

$$F(t) = F_\sigma(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t/\sigma} & t \geq 0 \end{cases} \quad (\sigma > 0),$$

a verosimilhança da amostra censurada é

$$L(\sigma; u_1, u_2, \dots, u_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\sigma^k} \prod_{i=1}^k \exp(-u_i/\sigma) \exp(-(n-k)u_k/\sigma),$$

se $u_1 < u_2 < \dots < u_k$,

donde se segue o estimador de máxima verosimilhança

$$\hat{\sigma}_k = \frac{1}{k} \left\{ \sum_{i=1}^k U_i + (n-k)U_k \right\} = \frac{1}{k} \left\{ \sum_{i=1}^k T_{i:n} + (n-k)T_{k:n} \right\}. \quad (8.11)$$

Para o estudo da distribuição deste estimador necessitamos pois conhecer o comportamento conjunto das estatísticas ordinais em modelo exponencial, já estudado anteriormente. Iremos aqui usar uma abordagem heurística que nos permitirá chegar à distribuição de $\hat{\sigma}_k$.

Sendo $T_{i:n}$ a duração da unidade que falhou em i -ésimo lugar, $1 \leq i \leq n$, por entre as n unidades, tem-se

$$\mathbb{P}(T_{i+1:n} - T_{i:n} > x | T_{i:n} = y) = \mathbb{P}(T_{i+1:n} > x + y | T_{i:n} = y),$$

e esta última probabilidade, sendo a probabilidade de que nenhum dos $n - i$ acontecimentos que ainda estão em progresso no instante y acabe antes de $x + y$ é, devido à falta de memória da exponencial, igual a

$$\{\mathbb{P}(T > x)\}^{n-i} = e^{-(n-i)x/\sigma}.$$

Consequentemente,

$$\mathbb{P}(T_{i+1:n} - T_{i:n} \leq x | T_{i:n} = y) = 1 - e^{-(n-i)x/\sigma}, \quad x \geq 0,$$

independentemente de y , o que significa que $T_{i+1:n} - T_{i:n}$ é uma v.a. Exponencial de valor médio $\sigma/(n-i)$, independente de $T_{i:n}$.

Mais geralmente tem-se em modelo Exponencial a validade do seguinte resultado:

$$V_i = (n - i + 1)(T_{i:n} - T_{i-1:n}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad T_{0:n} = 0,$$

são variáveis aleatórias exponenciais independentes de valor médio σ , tendo-se consequentemente a validade da *representação de Rényi* (Rényi⁴, 1953)

$$T_{i:n} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^i \frac{V_j}{n - j + 1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (8.12)$$

i.e. $T_{i:n}$ é uma combinação linear de i exponenciais unitárias e independentes, de valor médio σ .

A utilização de (8.12) na expressão de $\hat{\sigma}_k$, em (8.11), leva-nos à representação em distribuição,

$$\hat{\sigma}_k = \frac{1}{k} \left\{ \sum_{i=1}^k T_{i:n} + (n - k)T_{k:n} \right\} \stackrel{d}{=} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k V_j,$$

e segue-se, por exemplo, que

$$k \hat{\sigma}_k / \sigma$$

é uma variável aleatória Gama(k), resultado que exploraremos mais adiante em detalhe, aquando do estudo, na Secção 8.5, dos *testes de vida*.

8.3 Noção de Envelhecimento. Distribuições IFR e DFR

No que se segue designaremos por

- S — Sistema arbitrário;

⁴ Rényi, A. (1953). On the theory of order statistics. *Acta Math. Acad. Sc. Hung.* 4, 191-231.

- T — Tempo de vida de S (v.a. positiva);
- $F(t)$ — f.d. de T , com suporte $t \geq 0$, $F(0) = 0$;
- $f(t) = F'(t)$, f.d.p. de T ;
- $R(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F(t)$ — fiabilidade, no instante t , de um sistema que entrou em funcionamento em $t = 0$.

8.3.1 Funções para Caracterização do Tempo de Vida

Chama-se *probabilidade condicional de avaria* no intervalo $(x, x + t]$ de um sistema com idade $x \geq 0$, à função

$$\begin{aligned} F(t|x) &:= \mathbb{P}(T \leq t + x | T > x) \\ &= 1 - \frac{1 - F(t + x)}{1 - F(x)} =: 1 - R(t|x). \end{aligned} \quad (8.13)$$

A função

$$R(t|x) = 1 - F(t|x)$$

é designada por *fiabilidade condicional* em t de um sistema com idade $x \geq 0$. Tem-se obviamente $F(t) = F(t|0)$ e $R(t) = R(t|0)$, pois $\mathbb{P}(T > 0) = 1$.

Chama-se *taxa de avaria* (ou *de mortalidade*) *instantânea* à função

$$h(t) := \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{F(dt|t)}{dt} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t \geq 0. \quad (8.14)$$

A função

$$H(t) := \int_0^t h(x) dx, \quad t \geq 0,$$

é a chamada *função de mortalidade (cumulativa)*.

Vejam os quais as relações principais entre as diferentes funções definidoras do tempo de vida:

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^t h(x)dx = -\log R(t) = -\log(1 - F(t)), \\ h(t) &= H'(t), \\ R(t) &= e^{-H(t)}. \end{aligned}$$

8.3.2 Noção de Envelhecimento Estocástico

Modelos de vida que não envelhecem

Diz-se que um sistema *não envelhece estocasticamente* quando

$$R(t|x) = R(t), \quad t \geq 0, \quad \forall x > 0,$$

com $R(t|x)$ definida em (8.13), ou equivalentemente,

$$\frac{1 - F(t+x)}{1 - F(t)} = 1 - F(x) \iff R(t+x) = R(t)R(x).$$

A única função que satisfaz esta equação funcional é a exponencial, e como a fiabilidade, sendo uma probabilidade, está em $[0, 1]$, tem de se ter

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Consequentemente, $h(t) = \lambda$, $\forall t \geq 0$, i.e., temos uma *taxa de mortalidade instantânea* constante no tempo, para um sistema que não envelhece nem rejuvenesce estocasticamente.

A distribuição Exponencial vai pois ser sem dúvida importante como *modelo de vida* — trata-se na realidade do único modelo de vida com uma taxa de mortalidade instantânea constante ao longo do tempo.

Modelos de vida que envelhecem

Diz-se que o sistema S *envelhece* no tempo se e só se $R(t|x)$, em (8.13), for uma função *decrecente* em $x \geq 0$, para $t \geq 0$.

Como

$$R(t|x) = \frac{R(t+x)}{R(x)}$$

é função decrescente em x , e se tem

$$h(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left(1 - \frac{R(t+dt)}{R(t)} \right),$$

a função $h(t)$, em (8.14), será então uma função crescente em t , sempre que $f(t) = F'(t)$ exista, o que foi admitido desde início.

Reciprocamente, se $h(t)$ for uma função crescente em t , $R(t|x)$ é decrescente em x , i.e., sistemas que envelhecem no tempo têm uma taxa de mortalidade instantânea associada crescente.

Definição 1. $F(\cdot)$ é uma distribuição IFR (de *Increasing Failure Rate*) se e só se $R(t|x)$, em (8.13), for decrescente em $x \geq 0$, $\forall t \geq 0$, ou ainda (caso exista a função densidade) se e só se $h(t)$, em (8.14), for crescente em $t \geq 0$.

Modelos de vida que rejuvenescem

Definição 2. $F(\cdot)$ é uma distribuição DFR (de *Decreasing Failure Rate*) se e só se $R(t|x)$, em (8.13), for crescente em $x \geq 0$, $\forall t \geq 0$, ou ainda (caso exista a função densidade) se e só se $h(t)$, em (8.14), for decrescente em $t \geq 0$.

Exemplos.

1. Há certos materiais, como o aço, que aumentam em resistência quando são trabalhados.
2. Misturas de modelos exponenciais podem ser DFR.
3. Sistemas com mortalidade infantil têm (pelo menos nessa fase) uma taxa de mortalidade instantânea decrescente.

Outros modelos

Para além dos modelos de vida atrás referidos, muito usados na prática, outra classe importante de modelos é a que inclui distribuições com uma taxa de mortalidade instantânea do seguinte tipo: inicialmente decrescente (*mortalidade infantil*), seguida de uma fase constante (*vida útil*) e por fim crescente (*velhice*). São as chamadas *funções de mortalidade em banheira*.

8.4 Modelos Paramétricos Importantes em Fiabilidade

8.4.1 Modelo Exponencial

Este modelo fornece uma boa descrição de uma unidade que não envelhece, nem rejuvenesce no tempo.

Usaremos, conforme seja mais conveniente, uma das duas parametrizações seguintes:

$$F_{\sigma}(t) = 1 - e^{-t/\sigma}, \quad t \geq 0 \quad \text{ou} \quad F_{\lambda}(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0;$$

$$f_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma} e^{-t/\sigma}, \quad t \geq 0 \quad \text{ou} \quad f_{\lambda}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0;$$

$$R_{\sigma}(t) = e^{-t/\sigma}, \quad t \geq 0 \quad \text{ou} \quad R_{\lambda}(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Propriedades da distribuição exponencial com importância em Fiabilidade

- O tempo de vida de uma componente usada é independente da sua idade inicial (*falta de memória da exponencial*). Por outras palavras, *uma unidade exponencial usada é tão boa como uma nova*.

Matematicamente: Se T tem f.d. exponencial $F_{\sigma}(t)$, a probabilidade condicional de sobrevivência é dada por,

$$\mathbb{P}(T > t + x | T > x) = e^{-t/\sigma}, \quad t \geq 0,$$

independentemente de x . Mas também se $F(\cdot)$ é uma f.d. de uma v.a. não degenerada e não negativa, tal que $R(t) = 1 - F(t)$ satisfaz a equação funcional,

$$R(t+x) = R(t)R(x), \quad t \geq 0, \quad x \geq 0,$$

então $F(\cdot)$ é uma f.d. exponencial, i.e. $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$, $t \geq 0$, para algum $\lambda > 0$.

- A distribuição exponencial é a única distribuição de vida com taxa de avaria instantânea constante no tempo.

Algumas implicações teóricas e práticas desta propriedade:

1. Como, de um ponto de vista estocástico, uma componente usada é tão boa como uma nova, não há nenhuma vantagem em seguir uma política de substituição planejada das componentes usadas, que ainda estão em funcionamento.
 2. Na estimação da vida média, dos percentis, da fiabilidade, e assim por diante, os dados podem ser colecionados com obtenção exclusiva do número total de horas de vida observado e do número de avarias observadas. As idades efectivas das componentes em observação são irrelevantes.
- Uma v.a. exponencial T , com f.d. $F_\sigma(t) = 1 - e^{-t/\sigma}$, $t \geq 0$, $\sigma > 0$, tem momentos

$$\mu_n = \mathbb{E}(T^n) = n!\sigma^n, \quad n \geq 1.$$

Em particular, o *valor médio* de uma distribuição exponencial é o *recíproco da taxa instantânea de avaria*,

$$\mu = \mathbb{E}(T) = \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

- Sejam T_1, T_2, \dots, T_n variáveis aleatórias i.i.d. com função de distribuição $F_\sigma(t) = 1 - e^{-t/\sigma}$, $t \geq 0$, $\sigma > 0$. Sejam $T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{n:n}$ as n estatísticas ordinais crescentes associadas a (T_1, T_2, \dots, T_n) , usualmente interpretadas em *Fiabilidade* como os sucessivos instantes de avaria de n componentes de um sistema, ou de n unidades postas em experiência num instante inicial. Seja

$$D_k = T_{k:n} - T_{k-1:n}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (8.15)$$

o k -ésimo *espaçamento*, com $T_{0:n} = 0$. Então:

1. As variáveis aleatórias D_1, \dots, D_n , têm distribuição exponencial, i.e.,

$$\mathbb{P}(D_k \leq t) = F_{\frac{\sigma}{n-k+1}}(t) = 1 - e^{-\frac{n-k+1}{\sigma}t}, \quad t \geq 0, \quad \sigma > 0,$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

2. As variáveis aleatórias D_1, \dots, D_n são independentes.
3. $\mathbb{E}(D_k) = \frac{\sigma}{n-k+1}$ e $\text{Var}(D_k) = \frac{\sigma^2}{(n-k+1)^2}$, $k = 1, \dots, n$.
4. As variáveis aleatórias $nD_1, (n-1)D_2, \dots, D_n$ são i.i.d., com distribuição exponencial de valor médio σ .
5. O tempo de vida da k -ésima unidade a avariar-se, $T_{k:n}$, é uma combinação linear de exponenciais i.i.d. e unitárias, ou seja,

$$\begin{aligned} T_{k:n} &= D_1 + D_2 + \dots + D_k \\ &\stackrel{d}{=} \sigma \left(\frac{E_1}{n} + \frac{E_2}{n-1} + \dots + \frac{E_k}{n-k+1} \right) \end{aligned}$$

com $E_j, 1 \leq j \leq k$, exponenciais unitárias, independentes.

6. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{k:n}) &= \sigma \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1} \right) \\ &= \sigma [\psi(n+1) - \psi(n-k+1)] \end{aligned}$$

onde $\psi(\cdot)$ é a função digama, introduzida em (3.18).

7. Tem-se ainda

$$\begin{aligned}
 \text{Tempo total de vida} &= T_1 + T_2 + \cdots + T_n \\
 &= T_{1:n} + T_{2:n} + \cdots + T_{n:n} \\
 &\stackrel{d}{=} \sigma \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{E_j}{n-j+1} \\
 &= \sigma \sum_{i=1}^n E_i \\
 &\stackrel{d}{=} \sigma \text{Gama}(n).
 \end{aligned}$$

Iremos em seguida referir os dois tipos de amostragem mais usuais em *Fiabilidade*. São eles:

1. **Amostragem sem reposição ou substituição:** Admitamos que se colocam n unidades em funcionamento no instante $t = 0$. Recolhem-se em seguida os tempos de vida das diferentes unidades que se avariaram, mas *sem substituição* das unidades avariadas, i.e., recolhem-se $T_{1:n}, T_{2:n}, \dots$. Os tempos entre avarias consecutivas são independentes e exponenciais, mas com valores médios distintos, tal como vimos anteriormente.
2. **Amostragem com reposição ou substituição imediata** das componentes avariadas: Neste caso os tempos entre avarias consecutivas, W_1, W_2, \dots , são exponenciais i.i.d. com valor médio σ/n .

Pensemos na variável aleatória $\tau(i)$, *tempo total de teste* até se terem recolhido i avarias, em ambos os esquemas de amostragem.

Num esquema *sem reposição*:

$$\begin{aligned}
 \tau_S(i) &= nT_{1:n} + \cdots + (n-i+1)(T_{i:n} - T_{i-1:n}) \\
 &= nD_1 + (n-1)D_2 + \cdots + (n-i+1)D_i \\
 &\stackrel{d}{=} \sigma(E_1 + E_2 + \cdots + E_i).
 \end{aligned}$$

Num esquema *com reposição*:

$$\begin{aligned}
 \tau_R(i) &= n(W_1 + W_2 + \cdots + W_i) \\
 &\stackrel{d}{=} \sigma(E_1 + E_2 + \cdots + E_i).
 \end{aligned}$$

Não há pois distinção entre os dois esquemas de amostragem, no que se refere ao *tempo total de teste*.

Processo de Poisson em Fiabilidade

O *processo de Poisson*, estando directamente relacionado com o modelo Exponencial, aparece frequentemente em *Fiabilidade* como processo de avarias, em contextos diversificados, como por exemplo:

1. *Manutenção de equipamento*. Uma unidade é colocada em funcionamento no instante inicial, $t = 0$. Quando ocorre uma falha, essa unidade é imediatamente substituída por uma unidade do mesmo tipo.

O *processo de instantes de avaria*, $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, com

$$N(t) = \text{Número de falhas em } [0, t),$$

é um *processo de Poisson* de taxa λ , i.e.,

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

2. Na amostragem *com reposição* o processo de avarias também é um *processo de Poisson* de taxa $\lambda_R = n/\sigma = n\lambda$.
3. Se pensarmos num sistema em série, com n componentes exponenciais, com tempos médios de vida $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, e taxas de mortalidade instantânea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i = 1/\sigma_i$, $1 \leq i \leq n$, então $T = T_{1:n}$ e $F_T(t) = 1 - \exp(-\sum_{i=1}^n \lambda_i t)$, $t \geq 0$, i.e., T é exponencial com taxa de avaria instantânea $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Tal é a base teórica para o chamado *método de contagem das partes* — o analista conta o número n_i de componentes de tipo i presentes no sistema, multiplica por λ_i , a taxa de mortalidade

instantânea da componente de tipo i , e soma relativamente a todas as componentes.

Não temos aqui mais do que uma *superposição* de *processos de Poisson*. No sistema em série, quando uma componente se avaria será substituída imediatamente. A sucessão de avarias da componente i e das suas substitutas é um processo de Poisson de taxa λ_i .

Como o sistema falha quando falhar qualquer uma das componentes, os instantes de falha do sistema constituem um processo de Poisson de taxa $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

8.4.2 Modelo Weibull

A função de distribuição e a f.d.p. do modelo Weibull (de mínimos), usualmente conhecido como modelo Weibull, são

$$W_{\alpha,\sigma}(t) = 1 - e^{-(t/\sigma)^\alpha}, \quad t \geq 0 \quad (\alpha > 0, \sigma > 0), \quad (8.16)$$

e

$$w_{\alpha,\sigma}(t) = \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha-1} e^{-(t/\sigma)^\alpha}, \quad t \geq 0 \quad (\alpha > 0, \sigma > 0),$$

respectivamente.

Componentes Weibull têm tempo médio de vida

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\sigma}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

e taxa de mortalidade instantânea

$$h(t) = \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha-1}, \quad t \geq 0.$$

Consequentemente:

$$W_{\alpha,\sigma}(\cdot) \quad \text{é} \quad \begin{cases} DFR & \text{se } \alpha < 1 \\ IFR & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

A função de distribuição Exponencial é um caso particular da Weibull de mínimos, correspondente ao valor $\alpha = 1$, em (8.16) ($W_{1,\sigma}(\cdot) \equiv F_{\sigma}(\cdot)$).

8.4.3 Outros Modelos Univariados em Fiabilidade

Modelo Gama

A função densidade de probabilidade e a função de distribuição do modelo Gama(σ, α), usual em *Fiabilidade*, caso particular do modelo genérico estudado na Secção 3.1.4, com $\lambda = 0$ e δ substituído por σ , são

$$g_{\alpha,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma^{\alpha}} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-t/\sigma}, \quad t \geq 0 \quad (\alpha > 0, \sigma > 0),$$

e, também para $\alpha > 0, \sigma > 0$,

$$G_{\alpha,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} e^{-(u/\sigma)} du, \quad t \geq 0, \quad (8.17)$$

respectivamente.

Componentes Gama têm tempo médio de vida

$$\mathbb{E}(T) = \sigma\alpha,$$

e o recíproco da taxa de mortalidade instantânea $h(t)$, em (8.14), é

$$\frac{1}{h(t)} = \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} e^{-u/\sigma} du, \quad t \geq 0.$$

Consequentemente:

$$G_{\alpha,\sigma}(\cdot) \quad \text{é} \quad \begin{cases} DFR & \text{se } \alpha < 1 \\ IFR & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

A função de distribuição Exponencial é também um caso particular da função de distribuição Gama, em (8.17), correspondente ao valor $\alpha = 1$ ($G_{1,\sigma}(\cdot) \equiv F_\sigma(\cdot)$).

Modelo Normal Truncado

A função densidade de probabilidade associada ao modelo Normal truncado em $[0, +\infty)$ é

$$f(t) = \frac{1}{a} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad \text{sendo} \quad a = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Trata-se de um caso particular do modelo em (3.2), com $A = 0$ e $B = +\infty$, sendo uma distribuição IFR, $\forall \mu$ e $\sigma > 0$. Se $\mu \gg 3\sigma$, então $a \approx 1$, e temos praticamente o modelo Normal.

Modelo Lognormal

O modelo Lognormal(μ, σ), já estudado na Secção 3.1.3, é frequentemente usado em fiabilidade para modelar tempos de vida de processos que apresentam inicialmente uma taxa de falha crescente e depois decrescente. A função taxa de mortalidade instantânea, $h(t)$, é dada por

$$h(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma t \sqrt{2\pi} \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)\right)}, \quad t \geq 0,$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a f.d. de uma Normal *standard*. Trata-se de uma função não monótona, inicialmente crescente e depois decrescente, com taxa de falha assintótica nula, o que constitui uma desvantagem.

Modelo Gaussiano Inverso

O modelo GI(λ, μ), já estudado na Secção 3.1.6, é um modelo alternativo ao modelo Lognormal(μ, σ) em estudos de fiabilidade,

com função taxa de mortalidade instantânea, $h(t)$, dada por

$$h(t) = \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi t^3}} e^{-\frac{\lambda(t-\mu)^2}{2\mu^2 t}}}{\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\right) - e^{\frac{2\lambda}{\mu}} \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 + \frac{t}{\mu}\right)\right)}, \quad t \geq 0,$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a f.d. de uma Normal *standard*. Esta função é inicialmente crescente e depois decrescente, tal como a função $h(t)$ associada ao modelo Lognormal(μ, σ), mas apresenta uma taxa de falha assintótica não nula, igual a $\lambda/(2\mu^2)$.

8.4.4 Distribuição Exponencial Multivariada, para Componentes Dependentes

Consideremos duas componentes C_1 e C_2 com tempos de vida, T_1 e T_2 , respectivamente. Admitamos que as componentes C_1 e C_2 estão sujeitas a 3 tipos de choques independentes:

- um choque proveniente da fonte 1 destrói C_1 ;
- um choque proveniente da fonte 2 destrói C_2 ;
- um choque proveniente da fonte 3 destrói simultaneamente as componentes C_1 e C_2 .

Os choques especificados de tipo 1, 2 e 3, ocorrem em instantes aleatórios exponenciais U_1, U_2 e U_{12} , respectivamente, tendo-se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_1 > t) &= \exp(-\lambda_1 t), \quad t \geq 0 \\ \mathbb{P}(U_2 > t) &= \exp(-\lambda_2 t), \quad t \geq 0 \\ \mathbb{P}(U_{12} > t) &= \exp(-\lambda_{12} t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{Tempo de vida de } C_1 = \min(U_1, U_{12}), \\ T_2 &= \text{Tempo de vida de } C_2 = \min(U_2, U_{12}). \end{aligned}$$

A função de fiabilidade conjunta é pois dada por

$$R(t_1, t_2) = \exp \{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)\}, \quad t_1 \geq 0, t_2 \geq 0.$$

É a esta distribuição conjunta que é usual chamar Exponencial Bivariada.

Tem-se obviamente, para as *distribuições marginais*

$$F_{T_1}(t) = 1 - \lim_{t_2 \rightarrow 0} R(t, t_2) = 1 - \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})t), \quad t \geq 0,$$

e

$$F_{T_2}(t) = 1 - \lim_{t_1 \rightarrow 0} R(t_1, t) = 1 - \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{12})t), \quad t \geq 0.$$

Podemos escrever a fiabilidade conjunta em termos das fiabilidades marginais $R_1(\cdot)$ e $R_2(\cdot)$ do modo seguinte,

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \exp(-\theta t_2) R_1(t_1 - t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ \exp(-\theta t_1) R_2(t_2 - t_1) & \text{se } t_1 \leq t_2, \end{cases}$$

com $\theta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$.

A falta de memória da Exponencial Bivariada continua a ser válida, e traduz-se matematicamente através da seguinte equação funcional:

$$R(t + s_1, t + s_2) = R(t, t) R(s_1, s_2), \quad t \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0.$$

As generalizações multivariadas são óbvias e interessantes, embora com expressões matemáticas pesadas. A *função de fiabilidade* associada a um modelo Exponencial Multivariado, $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$, é dada por

$$e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} \max(t_i, t_j) - \dots + (-1)^n \lambda_{12 \dots n} \max(t_1, t_2, \dots, t_n)}.$$

8.5 Testes de Vida em Modelo Exponencial

Num *teste de vida*, associado a um modelo genérico de vida T , pretendemos usualmente planear o tipo de experiência a efectuar de modo a podermos inferir, com determinada precisão e sem ultrapassar um determinado custo C , algumas propriedades importantes do sistema em estudo, como o tempo médio de vida,

$$\mu = \mathbb{E}(T),$$

e a função de fiabilidade,

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t), \quad t \geq 0.$$

Com um *teste de vida* procuram-se então estimativas para o parâmetro μ e para o funcional $R(t)$. Procuram-se usualmente estimadores centrados de variância uniformemente mínima (UMVUE, de *Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimators*), sempre que existam.

Iremos aqui exemplificar com o modelo Exponencial, o de abordagem mais simples. Para mais detalhes sobre *testes de vida* pode-se consultar Sinha⁵ (1986), Blischke & Murthy⁶ (2003), Rausand & Hyland⁷ (2004), Hahn & Doganaksoy⁸ (2008) e Bergman *et al.*⁹ (2009). Seja T o tempo de vida exponencial de determinada unidade, com função de distribuição

$$F_{\sigma}(t) = 1 - \exp(-t/\sigma), \quad t \geq 0 \quad (\sigma > 0).$$

⁵ Sinha, S.K. (1986). *Reliability and Life Testing*. John Wiley and Sons.

⁶ Blischke, W.R. & D.P. Murthy (2003). *Case Studies in Reliability and Maintenance*. John Wiley and Sons.

⁷ Rausand, M. & A. Hyland (2004). *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications*, 2nd edition. John Wiley and Sons.

⁸ Hahn, G.J. & N. Doganaksoy (2008). *The Role of Statistics in Business and Industry*. John Wiley and Sons.

⁹ Bergman, B., J. Mare, T. Svensson & S. Loren (2009). *Robust Design Methodology for Reliability: Exploring the Effects of Variation and Uncertainty*. John Wiley and Sons.

8.5.1 Amostra Completa

Admitamos, como ilustração, a situação mais simples, mas a menos frequente em *Fiabilidade* — recolha da *amostra completa* (t_1, t_2, \dots, t_n) .

A log-verosimilhança da amostra é

$$\ln L(\sigma; t_1, t_2, \dots, t_n) = -n \ln \sigma - \sum_{i=1}^n t_i / \sigma,$$

e conseqüentemente

$$\hat{\sigma}_n = \bar{T} = \sum_{i=1}^n T_i / n.$$

Como T/σ é Exponencial unitária, tem-se

$$\frac{n\hat{\sigma}_n}{\sigma} \stackrel{d}{=} \text{Gama}(n),$$

e

$$\mathbb{E}(\hat{\sigma}_n) = \sigma, \quad \text{Var}(\hat{\sigma}_n) = \sigma^2/n.$$

O estimador de máxima verosimilhança, $\hat{\sigma}_n = \bar{T} = \sum_{i=1}^n T_i/n$ é então UMVUE para $\mu = \mathbb{E}(T) = \sigma$.

E como estimar $R(t)$? O estimador de máxima verosimilhança de $R(t)$ é

$$\hat{R}(t) = e^{-t/\bar{T}}, t \geq 0,$$

mas $\mathbb{E}(\hat{R}(t)) \neq R(t)$.

É então necessário procurar como alternativa a $\hat{R}(t)$ o UMVUE de $R(t)$.

Como obter tal estimador? Um método possível de pesquisa do estimador UMVUE de $\phi(\theta)$ é o seguinte:

1º— Seja $\hat{\theta}_n$ uma estatística completa e suficiente para θ ;

2º– Encontre-se uma estatística W , centrada para $\phi(\theta)$;

3º– O UMVUE de $\phi(\theta)$ é então $W_n^* = \mathbb{E}(W|\hat{\theta}_n)$.

Vejam os a forma como o método anterior funciona neste caso particular. Como $\hat{\sigma}_n = \bar{T}$ é uma estatística completa e suficiente para σ , e é fácil encontrar W , bastando para isso pensar em

$$W = \begin{cases} 1 & \text{se } T_1 > t \\ 0 & \text{se } T_1 \leq t, \end{cases}$$

então o UMVUE de $R(t)$ é dado por:

$$\tilde{R}(t) = \mathbb{E}(W|\bar{T}) = \mathbb{P}(T_1 > t|\bar{T}) = \int_t^{+\infty} f_{T_1|\bar{T}}(t_1|\bar{t}) dt_1.$$

Como cálculo intermédio teremos de obter a distribuição condicional de T_1 dado \bar{T} .

As variáveis aleatórias T_1 e $Y = (T_2 + \dots + T_n)/(n-1)$ são independentes, sendo a sua distribuição fácil de obter. Tem-se

$$\begin{cases} T_1/\sigma \stackrel{d}{=} \text{Gama}(1), \\ (n-1)Y/\sigma \stackrel{d}{=} \text{Gama}(n-1). \end{cases}$$

Logo, a distribuição conjunta de (T_1, Y) é dada por

$$f(t_1, y) = \frac{(n-1)^{n-1}}{\sigma^n \Gamma(n-1)} y^{n-2} e^{-[(n-1)y+t_1]/\sigma}, \quad t_1 \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Mas $(n-1)Y + T_1 = T_1 + \dots + T_n = n\bar{T}$.

Se considerarmos a transformação

$$\begin{cases} T_1 = T_1 \\ \bar{T} = \frac{n-1}{n}Y + \frac{T_1}{n}, \end{cases}$$

obtemos para distribuição conjunta de (T_1, \bar{T}) ,

$$f(t_1, \bar{t}) = \frac{n}{n-1} \frac{(n-1)^{n-1}}{\sigma^n \Gamma(n-1)} \left(\frac{n\bar{t} - t_1}{n-1} \right)^{n-2} e^{-n\bar{t}/\sigma}, \quad n\bar{t} > t_1 \geq 0,$$

sendo pois a distribuição condicional dada por

$$f_{T_1|\bar{T}}(t_1|\bar{t}) = \frac{n-1}{n\bar{t}} \left(1 - \frac{t_1}{n\bar{t}}\right)^{n-2}, \quad 0 \leq t_1 \leq n\bar{t},$$

uma vez que

$$g(\bar{t}) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{n}{\sigma}\right)^n \bar{t}^{n-1} \exp^{-n\bar{t}/\sigma}, \quad t \geq 0.$$

O estimador UMVUE de $R(t)$ é então

$$\tilde{R}(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n\bar{T}}\right)^{n-1} & \text{se } t < n\bar{T} \\ 0 & \text{se } t \geq n\bar{T}. \end{cases}$$

Tem-se assim um estimador centrado de $R(t)$, com uma variância que compara favoravelmente com a do estimador de máxima verossimilhança de $R(t)$.

8.5.2 Censura no Número de Componentes (Tipo II)

Coloquem-se n unidades em funcionamento no instante inicial $t = 0$. Recolham-se $k \ll n$ tempos de vida, e baseie-se toda a inferência nesses k tempos de vida.

Amostragem sem reposição (substituição)

Amostra recolhida: $(u_1, u_2, \dots, u_k) \stackrel{d}{=} (t_{1:n}, t_{2:n}, \dots, t_{k:n})$.

A verossimilhança da amostra recolhida é então

$$\begin{aligned} L(\sigma; u_1, \dots, u_k) &= \prod_{i=1}^k \frac{n-i+1}{\sigma} e^{-u_i/\sigma} (e^{-u_k/\sigma})^{n-k} \\ &= \frac{1}{\sigma^k} \prod_{i=1}^k (n-i+1) e^{-(\sum_{i=1}^k u_i + (n-k)u_k)/\sigma} \end{aligned}$$

tendo-se para log-verossimilhança

$$\ln L(\sigma; u_1, u_2, \dots, u_k) \propto -k \ln \sigma - \sum_{i=1}^k u_i/\sigma - (n-k)u_k/\sigma.$$

O estimador de máxima verosimilhança é pois o estimador já obtido em (8.11), ou seja,

$$\hat{\sigma}_k = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k U_i + (n-k)U_k \right) = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k T_{i:n} + (n-k)T_{k:n} \right).$$

Note-se que se fizermos $k = n$ na expressão anterior obtemos obviamente o resultado derivado em amostra completa, isto é, $\hat{\sigma}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = \bar{T}$.

Vejamus em seguida qual a distribuição de amostragem do estimador de máxima verosimilhança do tempo médio de vida. Com base nas variáveis D_i , $1 \leq i \leq n$, definidas em (8.15), tem-se

$$T_{i:n} = \sum_{j=1}^i D_j,$$

e consequentemente

$$\sum_{i=1}^k T_{i:n} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i D_j = \sum_{j=1}^k (k-j+1)D_j.$$

Logo

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_k &= \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k (k-j+1)D_j + (n-k) \sum_{j=1}^k D_j \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k (n-j+1)D_j \right). \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\frac{k \hat{\sigma}_k}{\sigma} \stackrel{d}{=} \text{Gama}(k), \quad (8.18)$$

e

$$\mathbb{E}(\hat{\sigma}_k) = \sigma, \quad \text{Var}(\hat{\sigma}_k) = \frac{\sigma^2}{k}.$$

Daqui se conclui que o estimador de máxima verosimilhança, $\widehat{\sigma}_k$, é UMVUE para $\mu = \mathbb{E}(T) = \sigma$.

O estimador de máxima verosimilhança da função de fiabilidade é

$$\widehat{R}(t) = \exp(-t/\widehat{\sigma}_k), \quad t \geq 0,$$

e o estimador UMVUE dessa mesma função é

$$\widetilde{R}(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{k\widehat{\sigma}_k}\right)^{k-1} & \text{se } t < k\widehat{\sigma}_k \\ 0 & \text{se } t \geq k\widehat{\sigma}_k. \end{cases}$$

Amostragem com reposição (substituição)

Amostra recolhida: (v_1, v_2, \dots, v_k) .

A verosimilhança da amostra recolhida é então

$$\begin{aligned} L(\sigma; v_1, v_2, \dots, v_k) &= \prod_{i=1}^k \frac{n}{\sigma} e^{-(v_i - v_{i-1})/\sigma} e^{-n v_k/\sigma} \\ &= \frac{n^k}{\sigma^k} e^{-nv_k/\sigma}. \end{aligned}$$

para $v_0 = 0 < v_1 < \dots < v_k < \infty$.

O estimador de máxima verosimilhança é pois

$$\widehat{\sigma}_k^* = \frac{n V_k}{k}.$$

Vejamos agora qual a distribuição de amostragem do estimador de máxima verosimilhança do tempo médio de vida. Tal como no esquema sem reposição tem-se

$$\frac{k \widehat{\sigma}_k^*}{\sigma} \stackrel{d}{=} \text{Gama}(k), \quad (8.19)$$

e

$$\mathbb{E}(\widehat{\sigma}_k^*) = \sigma, \quad \text{Var}(\widehat{\sigma}_k^*) = \frac{\sigma^2}{k},$$

concluindo-se de novo que o estimador de máxima verosimilhança, $\hat{\sigma}_k^*$, é UMVUE para $\mu = \mathbb{E}(T) = \sigma$. O estimador de máxima verosimilhança da função de fiabilidade é

$$\hat{R}^*(t) = \exp(-t/\hat{\sigma}_k^*), \quad t \geq 0,$$

e o estimador UMVUE dessa mesma função é

$$\tilde{R}^*(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{k\hat{\sigma}_k^*}\right)^{k-1} & \text{se } t < k\hat{\sigma}_k^* \\ 0 & \text{se } t \geq k\hat{\sigma}_k^*. \end{cases}$$

Méritos e limitações de cada um dos dois esquemas

Um teste de vida *com reposição* é um teste dispendioso, se a substituição das unidades avariadas for dispendiosa. No entanto tal teste requer inicialmente uma amostra de dimensão pequena.

Um teste de vida *sem reposição* é um teste mais fácil do ponto de vista de assistência, mas que requer uma amostra inicial de dimensão razoável.

Como distinguir os dois esquemas de amostragem?

- As distribuições de amostragem de $\hat{\sigma}_k$ e de $\hat{\sigma}_k^*$ coincidem, como vimos anteriormente, em (8.18) e (8.19), e consequentemente, a precisão das estimativas obtidas sob os dois esquemas de amostragem é a mesma.
- Quando pensamos no *tempo total de teste*, também não conseguimos distinguir os dois esquemas de amostragem. Na realidade, no esquema sem reposição, e fazendo $T_{0:n} = 0$, tem-se

$$\tau_S(k) = \sum_{j=1}^k (n - j + 1)(T_{j:n} - T_{j-1:n}) \stackrel{d}{=} \sigma \text{ Gama}(k),$$

e no esquema com reposição,

$$\tau_R(k) \stackrel{d}{=} \sigma \text{Gama}(k).$$

- A diferença entre os dois esquemas reside no facto de eles terminarem em instantes diferentes. As variáveis aleatórias *instantes de paragem* de cada um dos dois esquemas são diferentes em distribuição.

Na realidade, o esquema *sem reposição* vai terminar em $U_k = T_{k:n}$, e

$$\mathbb{E}(U_k|n) = \sigma \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1} \right),$$

enquanto o esquema *com reposição* termina em V_k , e

$$\mathbb{E}(V_k|n) = \frac{\sigma k}{n} < \mathbb{E}(U_k|n).$$

Coloca-se pois a seguinte questão: Face a um dado valor de n e de k , no esquema sem reposição, qual é o menor inteiro m que permite terminar mais cedo o teste com reposição imediata?

Matematicamente, pretende-se encontrar o menor m tal que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1} \geq \frac{k}{m}.$$

Por exemplo, para $n = 60$ e $k = 10$, obtemos $m = 56$. Temos pois uma poupança de $6.7\% = ((60 - 56)/60) \times 100\%$.

Finalmente, note-se que a escolha particular de k , num teste de vida, depende do custo do equipamento em teste e da precisão pretendida.

8.5.3 Censura no Tempo (Tipo I)

Neste tipo de teste de vida colocam-se n unidades em funcionamento no instante inicial $t = 0$, e pára-se o teste de vida em T_0 .

Amostragem sem reposição (substituição)

Seja K o número de unidades que se avariaram em $(0, T_0)$ e $p = 1 - e^{-T_0/\sigma}$ a probabilidade de qualquer uma das unidades se avariar em $(0, T_0)$.

Então a v.a. K tem distribuição Binomial(n, p), isto é,

$$\mathbb{P}(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

A verosimilhança da amostra recolhida é pois

$$L(\sigma; u_1, u_2, \dots, u_k) = \begin{cases} e^{-nT_0/\sigma} & \text{se } K = 0 \\ \frac{n! e^{-(\sum_{i=1}^k u_i + (n-k)T_0)/\sigma}}{(n-k)! \sigma^k} & \text{se } K = k > 0, \end{cases}$$

e o estimador de máxima verosimilhança do tempo médio de vida é

$$\hat{\sigma}_K^{T_0} = \begin{cases} +\infty & \text{se } K = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^k U_i + (n-k)T_0}{k} & \text{se } K = k > 0. \end{cases} \quad (8.20)$$

O estimador $\hat{\sigma}_K^{T_0}$, em (8.20), é pois uma v.a. imprópria, que toma o valor $+\infty$ com probabilidade positiva, $\mathbb{P}(K = 0) = \exp(-nT_0/\sigma)$. Tem-se pois $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_K^{T_0}) = +\infty$, ou seja, o estimador não é consistente para σ .

Que fazer? Escolha-se T_0 suficientemente grande, para obviar ter-se $K = 0$. Note-se que $K = 0$ se e só se todas as unidades tiverem tempo de vida superior a T_0 , i.e., se o mínimo tempo de vida, que sabemos ser Exponencial de valor médio σ/n , for superior a T_0 . Bartholomew¹⁰ (1957) sugere que se estime σ fazendo

¹⁰ Bartholomew, D.J. (1957). A problem in life testing. *J. Amer. Statist. Assoc.* **52**, 350-355.

$\sigma/n = T_0$ sempre que $K = 0$. Temos então o novo estimador:

$$\widehat{\sigma}_K^{T_0} = \begin{cases} nT_0 & \text{se } K = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^k U_i + (n-k)T_0}{k} & \text{se } K = k > 0. \end{cases} \quad (8.21)$$

As propriedades de amostragem do estimador em (8.21) não são muito fáceis de obter, e pensamos que o problema de obtenção do UMVUE para σ continua por resolver. Esta situação ilustra como modificações extraordinariamente pequenas na experiência podem conduzir a dificuldades na estimação dos parâmetros. Tal tem levado ao desenvolvimento de diversos estimadores alternativos.

Iremos aqui referir um outro estimador baseado só em n e na v.a. $K =$ número de avarias em $(0, T_0)$, entre as n unidades postas em funcionamento em $t = 0$.

A verosimilhança da amostra é então

$$L(\sigma|k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad p = 1 - e^{-T_0/\sigma}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

e tem-se para log-verosimilhança

$$\ln L(\sigma|k) \propto k \ln(1 - e^{-T_0/\sigma}) + (n-k) \ln(e^{-T_0/\sigma}).$$

Consequentemente

$$\frac{\partial \ln L(\sigma|k)}{\partial \sigma} = \frac{T_0}{\sigma^2} \left(n - \frac{k}{1 - e^{-T_0/\sigma}} \right) = 0,$$

fornece o estimador de máxima verosimilhança

$$\widehat{\sigma}_{K,n} = \begin{cases} 0 & \text{se } K = n \\ -\frac{T_0}{\ln(1-k/n)} & \text{se } K = k, 0 < k < n \\ +\infty & \text{se } K = 0. \end{cases}$$

Temos mais uma vez $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_{K,n}) = +\infty$, tendo Bartholomew¹¹ (1963) mais uma vez sugerido o seguinte estimador alternativo

$$\hat{\sigma}_{K,n} = \begin{cases} -\frac{T_0}{\ln(1-k/n)} & \text{se } K = k, 0 < k < n \\ nT_0 & \text{se } K = 0. \end{cases} \quad (8.22)$$

Se se tiver $K = n$, terá de se forçar a repetição da experiência com um valor de T_0 mais pequeno.

Note-se que o estimador em (8.22), baseado só em K e n , compara favoravelmente com o obtido em (8.21) se se tiver $0.2 < k/n < 0.8$.

Se tivermos unidades altamente fiáveis ($k/n < 0.1$) é de utilizar um outro estimador alternativo, que se obtém por simplificação de $\hat{\sigma}_{K,n}$, em (8.22). Uma vez que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{K,n} &= -\frac{T_0}{\ln(1-k/n)} = \frac{T_0}{k/n + (k/n)^2/2 + \dots} \\ &= \frac{nT_0}{k} \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{2n} + o\left(\frac{k}{n}\right)} \right) \approx \frac{nT_0}{k} \left(1 - \frac{k}{2n} \right), \end{aligned}$$

temos o estimador

$$\hat{\hat{\sigma}}_{K,n} = \frac{T_0}{k} \left(n - \frac{k}{2} \right), \quad \text{se } 0 < k < n.$$

Amostragem com reposição (substituição)

Neste caso, como o processo de avarias é um *processo de Poisson* de intensidade $\lambda = n/\sigma$, tem-se que

$$\mathbb{P}(K = k) = \frac{1}{k!} e^{-nT_0/\sigma} \left(\frac{nT_0}{\sigma} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

onde $K =$ número de avarias em $(0, T_0] \stackrel{d}{=} \text{Poisson} \left(\frac{nT_0}{\sigma} \right)$.

¹¹ Bartholomew, D.J. (1963). The sampling distribution of an estimate arising in life testing. *Technometrics* **5**, 361-374.

Tem-se então o estimador

$$\hat{\sigma}_K^* = \begin{cases} \frac{nT_0}{k} & \text{se } K = k > 0 \\ nT_0 & \text{se } K = 0. \end{cases}$$

Neste caso não existe UMVUE de σ . Mas existe UMVUE da função de fiabilidade, i.e., de $R(t|\sigma) = e^{-t/\sigma}$, $t \geq 0$.

Na realidade K é suficiente para σ . Logo, se existir uma função $\Phi(K)$ tal que

$$\mathbb{E}(\Phi(K)) = e^{-t/\sigma},$$

então $\Phi(K)$ é UMVUE para $R(t|\sigma)$.

Procuremos então a função $\Phi(K)$. Ela terá de ser tal que

$$\sum_{k \geq 0} \Phi(k) \left(\frac{nT_0}{\sigma} \right)^k \frac{1}{k!} e^{-nT_0/\sigma} = e^{-t/\sigma}$$

o que acontece se e só se

$$\sum_{k \geq 0} \Phi(k) \left(\frac{nT_0}{\sigma} \right)^k \frac{1}{k!} = e^{(nT_0 - t)/\sigma} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{nT_0 - t}{\sigma} \right)^k \frac{1}{k!}.$$

Segue-se pois que

$$\Phi(k) \left(\frac{nT_0}{\sigma} \right)^k = \left(\frac{nT_0 - t}{\sigma} \right)^k,$$

e tem-se

$$\Phi(k) = \left(\frac{nT_0 - t}{\sigma} \frac{\sigma}{nT_0} \right)^k = \left(1 - \frac{t}{nT_0} \right)^k.$$

O estimador UMVUE da função de fiabilidade é pois

$$\tilde{R}(t) = \left(1 - \frac{t}{nT_0} \right)^k, \quad \text{se } t < nT_0 \quad \text{e } k > 0.$$

Capítulo 9

Metodologia de Taguchi e TQM

A metodologia da Qualidade de Taguchi coloca a ênfase mais no controlo da qualidade *off-line*, i.e. fora de linha de produção, sendo pois colocada em primeiro lugar a qualidade do projecto, e só depois a qualidade por inspecção. O objectivo primordial da abordagem de Taguchi à qualidade é pois o de *acertar no alvo com a menor variação possível*.

Para atingir este objectivo, Taguchi introduziu a *razão sinal-ruído*, a estudar na Secção 9.1 e a *função prejuízo quadrática*, a estudar na Secção 9.2, como instrumentos em engenharia da qualidade.

Taguchi desenvolveu uma abordagem em três passos com vista a assegurar a qualidade:

1. o projecto do *sistema* (de modo a assegurar a sua funcionalidade);
2. o projecto de *parâmetros* (de modo a alcançar robustez);
3. o projecto de *tolerâncias* (de modo a identificar as componentes que precisam de aperfeiçoamento).

O passo mais importante é o segundo: trata-se de um método de experimentação cujo objectivo é o de projectar um produto, seleccionando quais as condições (níveis) dos factores de *controlo* necessárias para diminuir a sensibilidade do produto relativamente aos factores *incontroláveis* ou de *ruído*. Neste passo analisam-se os factores de controlo expondo-os aos factores de ruído através de *arranjos ortogonais*.

Referindo Kackar¹ (1986) a filosofia de Taguchi pode ser sumariada nos seguintes sete princípios:

1. A medida de qualidade mais importante de um produto manufacturado é o *prejuízo total* por ele causado à sociedade.
2. Numa economia competitiva a manutenção no negócio depende de uma melhoria contínua da qualidade e da redução de custos.
3. Em qualquer programa de melhoria contínua da qualidade deve estar sempre presente a necessidade de uma redução sistemática da variabilidade das características do produto em torno do seu valor padrão ou valor objectivo.
4. O prejuízo do consumidor devido à variabilidade das características de qualidade relevantes pode ser considerado proporcional ao quadrado do desvio da característica relativamente ao valor objectivo.
5. A qualidade final e o custo de fabricação do produto são determinados pelos projectos de engenharia do produto e pelo processo de fabrico.
6. A variabilidade do produto (ou processo) pode ser reduzida pela exploração dos efeitos não lineares dos parâmetros do processo nas características de qualidade relevantes.
7. Experiências de amostragem estatisticamente planeadas devem ser usadas para identificar quais os parâmetros do pro-

¹ Kackar, R.N. (1986). Taguchi's quality philosophy: analysis and commentary. *Quality Progress* **12**, 21-29.

cesso que permitem a redução da variabilidade das características de qualidade de interesse.

Segundo Taguchi *a qualidade de um produto pode ser definida como o mínimo prejuízo causado à sociedade por esse produto, desde que é expedido, prejuízo esse causado por outras que não as suas intrínsecas funções* (por exemplo, o cigarro causa prejuízos a quem o fuma, mas esses prejuízos não são perdas de qualidade, não podendo pois ser contabilizados). Taguchi refere-se essencialmente a duas categorias de prejuízos:

- Prejuízo causado pela variabilidade na função (por exemplo, o automóvel que não arranca num dia muito frio);
- Prejuízo causado por efeitos laterais perniciosos (por exemplo, a constipação que pode atingir o dono desse automóvel, devido ao facto de ele não ter funcionado).

Segundo Taguchi são quatro os *factores* que influenciam a qualidade do produto (processo):

1. *Factores de sinal* — factores que podem ser ajustados pelo utilizador ou operador, como o ajustamento do volume de uma televisão;
2. *Factores de controlo* — factores cujos valores (os chamados *níveis do factor*) podem ser seleccionados e controlados pelo experimentador, como o tipo de material a utilizar;
3. *Factores de nivelamento* — factores que podem ser facilmente ajustados de modo a obtermos uma relação funcional desejada entre o *factor de sinal* e a variável resposta, como por exemplo a desmultiplicação usada no mecanismo da caixa de direcção de um automóvel. Tratam-se de casos especiais dos factores de controlo;
4. *Factores de ruído* — factores aleatórios, incontroláveis, ou aqueles que sendo controláveis, exigiriam um tal esforço (ou despesa) de controlo, que é pois preferível considerá-los como incontroláveis.

Taguchi divide ainda os *factores de ruído* em três tipos:

- *Ruídos externos* — fontes externas ou factores que actuando no ambiente em que funciona o produto transmitem variabilidade às características de qualidade do produto com interesse. São exemplo de ruídos externos a temperatura, a humidade, a pressão e flutuações na voltagem, entre outros;
- *Ruídos internos* — fontes internas de variação relativamente aos valores objectivos, como por exemplo o uso e a deterioração;
- *Ruídos de variação de peça para peça* — fontes de imperfeição do processo de fabrico.

9.1 Razão Sinal-Ruído (S/R)

Caso determinada característica de qualidade não atinja o valor objectivo, há que tomar uma de duas atitudes:

- alterar o valor médio do processo, i.e., alteração do *signal*;
- alterar a variabilidade em torno do valor objectivo, i.e., redução do *ruído*.

Taguchi sugere então a utilização da *razão sinal-ruído*, a seguir definida, como meio de avaliação da *performance* do sistema.

Chama-se *razão sinal-ruído*, ou abreviadamente *S/R*, a uma medida conjunta da média \bar{x} (*signal*) e do desvio padrão s (*ruído*) associados a uma amostra (x_1, x_2, \dots, x_n) de uma característica de qualidade X , que se pretende maximizar.

Razões S/R usuais:

1. O recíproco do *coeficiente de variação*, medida usual em estatística descritiva,

$$(S/R)_1 := \frac{\bar{x}}{s}.$$

2. Uma função decrescente do *erro quadrático médio* empírico,

$$EQM := s^2 + (\bar{x} - \mu_0)^2,$$

como por exemplo

$$(S/R)_2 := -10 \log(EQM).$$

3. Para características de qualidade do tipo *nominal é melhor*, em que se pretende atingir um valor estabelecido como objetivo, com variação mínima, como por exemplo, em situações de dimensão ou voltagem, é usual utilizar

$$(S/R)_3 := 10 \log \left(\frac{\bar{x}^2}{s^2} \right).$$

4. Para características de qualidade do tipo *menor é melhor*, em que se pretende minimizar uma reacção, tal como o desgaste, é frequente utilizar

$$(S/R)_4 := -10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

5. Para características de qualidade de tipo *maior é melhor*, cuja pretensão é maximizar uma reacção, como por exemplo a resistência ao calor, é então utilizada a razão sinal-ruído

$$(S/R)_5 := -10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \right).$$

6. Para características de qualidade na qual está em causa um *atributo*, i.e., a identificação de um produto como defeituoso ou não-defeituoso, e sendo p a proporção de defeituosos, define-se a razão de sinal-ruído

$$(S/R)_6 := -10 \log \left(\frac{p}{1-p} \right).$$

Alguns detalhes sobre estas medidas podem ser encontrados em Léon *et al.*² (1987).

9.2 **Função Prejuízo**

Como já vimos no Capítulo 5, o *índice de capacidade* de um processo, definido por $C_p = (LES - LEI)/(6\sigma)$, é uma medida frequentemente usada em *Controlo da Qualidade* para determinar o nível de qualidade dos produtos expedidos. Como também já foi referido, esta medida tem insuficiências pois não temos uma base imediata para determinar o seu valor óptimo, não sendo sempre evidente a interpretação dos seus valores.

A *função prejuízo* surge a Taguchi devido à necessidade de encontrar métodos apropriados para a predição da qualidade antes da expedição do produto, através de uma medida de avaliação em termos monetários da qualidade do produto.

Consideremos um mesmo produto, por exemplo um televisor, produzido em fábricas distintas do Japão e dos EUA segundo os mesmos projectos, e respeitando as mesmas tolerâncias, mais precisamente, com *limites de tolerância* $\mu_0 \pm 5$, coincidentes com os *limites de especificação*. Admitamos que a característica de qualidade de interesse é a densidade da cor, X . Nos EUA nenhum televisor com densidade de cor fora dos limites de tolerância é expedido, mas no Japão a percentagem de televisores não conformes (defeituosos) expedidos é 0.27%.

Poderá haver alguma razão para os televisores japoneses serem preferidos aos dos EUA? Tudo vai depender da *qualidade média* dos referidos aparelhos — as tolerâncias só por si não garantem a qualidade; ditam simplesmente os limites de funcionalidade do produto.

² Léon, R.V., A.C. Shoemaker & R.N. Kacker (1987). Performance measures independent of adjustment. An explanation and extension of Taguchi's signal-to-noise ratios (with discussion). *Technometrics* **29**, 253-285.

Admitamos que os televisores japoneses têm uma densidade de cor Normal($\mu_0, 5/3$) e os televisores produzidos nos EUA têm uma densidade de cor Uniforme de valor médio μ_0 e desvio padrão $10/\sqrt{12}$. O índice de capacidade do processo é, para os televisores japoneses,

$$C_p = \frac{10}{6 \times \frac{5}{3}} = 1,$$

enquanto para os televisores produzidos nos EUA temos

$$C_p = \frac{10}{6 \times \frac{10}{\sqrt{12}}} = 0.577.$$

Sendo o *índice de capacidade* do processo de produção japonês superior ao do americano é de esperar uma preferência dos consumidores pelo produto japonês.

9.2.1 Função Prejuízo de Taguchi

Sempre que a característica de qualidade de um produto, X , se desvia do seu valor nominal objectivo μ_0 incorremos obviamente num prejuízo, que aumentará à medida que nos afastamos de μ_0 . Para um custo de fabrico igual a A , e limites de tolerância $\mu_0 \pm \Delta$, coincidentes com os limites de especificação, a *função de prejuízo* de Taguchi é definida por

$$L(x) := \begin{cases} \frac{A}{\Delta^2}(x - \mu_0)^2, & \text{se } x \in [\mu_0 - \Delta, \mu_0 + \Delta] \\ A, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (9.1)$$

Face a uma amostra sob controlo, $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, de determinada característica de qualidade, a estimativa usual da função prejuízo $L(x)$, em (9.1), é dada por

$$L(\underline{x}) = \frac{A}{n\Delta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2,$$

que é afinal proporcional ao *erro quadrático médio* da nossa amostra relativamente ao valor nominal objectivo, μ_0 .

Vejam os em seguida o exemplo apresentado no livro de Taguchi *et al.*³ (1989), para explicação da forma de determinação de tolerâncias.

Consideremos a produção de transformadores de alta voltagem. Esses transformadores são considerados não-funcionais para o consumidor quando as saídas de voltagem não pertencem ao intervalo de especificação (tolerância) $115V \pm 25$, i.e., a *tolerância* do consumidor é igual a 50. Sabe-se que caso sejam excedidos os limites de especificação teremos um prejuízo de 300\$ para o cliente.

Contudo, antes de expedir o produto, o produtor pode ajustar a voltagem através de uma mudança de resistência que custará 1\$ ao produtor. A questão que se coloca é a de quais as especificações a usar para essa mudança de resistência.

Estamos numa situação em que $A = 300$, $\Delta = 25$ e $\mu_0 = 115$. Logo,

$$L(x) = \frac{A}{\Delta^2}(x - 115)^2 = 0.48(x - 115)^2, \quad \text{para } 90 \leq x \leq 140.$$

Como na fábrica é fácil ajustar a voltagem ao valor nominal objectivo por mudança de uma resistência com um custo de 1\$, a tolerância do produtor deve ser diferente da tolerância do consumidor. Como

$$0.48(x - 115)^2 = 1 \quad \text{se e só se } x = 115 \pm 1.4V,$$

a *tolerância* do produtor deve ser de 2.8 Volts, i.e., o intervalo de tolerância do produtor deve ser 115 ± 1.4 .

Se não forem cumpridos os limites de tolerância teremos perda social. Na realidade, se o produtor resolver mudar a resistência de um transformador com saída de voltagem de 114V ele gasta 1\$, e o prejuízo para o cliente, associado a essa voltagem, é $L(114)=0.48\$$, inferior ao custo suportado pelo produtor. Há pois um prejuízo

³ Taguchi, G, E. Elsayed & T. Hsiang (1989). *Quality Engineering in Production Systems*. MacGraw-Hill.

social de $(1 - 0.48) = 0.52\%$. Também se por exemplo o produtor expedir um transformador que tem na fábrica uma saída de voltagem de 120V, ele poupa 1\$, mas o cliente vai ter um prejuízo $L(120) = 12\%$, o que resulta num prejuízo líquido para a sociedade de 11\$.

Conseqüentemente, face a valores A_c , A_p , Δ_p e Δ_c , em que

$$\begin{aligned} A_c &= \text{Prejuízo causado ao cliente por um produto defeituoso,} \\ A_p &= \text{Prejuízo causado ao produtor por um ajustamento,} \\ 2\Delta_p &= \text{Tolerância do produtor,} \\ e \quad 2\Delta_c &= \text{Tolerância do consumidor,} \end{aligned}$$

a tolerância para o produtor deve ser determinada com base na igualdade das funções perda, i.e. devemos ter

$$\frac{A_p}{\Delta_p^2} = \frac{A_c}{\Delta_c^2} \quad \text{sse} \quad \Delta_p = \sqrt{\frac{A_p}{A_c}} \Delta_c.$$

9.2.2 Funções Prejuízo Alternativas

Para maior detalhe sobre o estudo de funções prejuízo pode consultar-se por exemplo o livro de Taguchi *et al.* (1989), já atrás referido, Adams & Woodall⁴ (1989), Belavendram⁵ (1995) e Pearn *et al.*⁶ (2006).

Apresentámos na secção anterior uma função de prejuízo simétrica em torno do valor objectivo μ_0 . Há no entanto situações em que, quando se verifica um desvio em relação ao valor objectivo, não é indiferente que esse desvio seja positivo ou negativo. Por exemplo, um transformador com uma saída de voltagem inferior ao

⁴ Adams, B.M. & W.H. Woodall (1989). An analysis of Taguchi's on-line process-control procedure under a random-walk model. *Technometrics* **31**, 401-413.

⁵ Belavendram, N. (1995). *Quality by Design*. Prentice-Hall.

⁶ Pearn, W.L., Y.C. Chang & C.-H. Wu (2006). Measuring process performance based on expected loss with asymmetric tolerances. *J. Applied Statistics* **33**, 1105-1120.

valor nominal pode tornar determinado aparelho mais lento, mas se essa saída de voltagem for superior ao valor nominal objectivo o aparelho pode ser seriamente danificado. Nestas situações a especificação é $\mu_0 \pm \Delta_2$, i.e., deverá considerar-se uma função de prejuízo assimétrica, definida por

$$L(x) = \begin{cases} A_1, & \text{se } x \leq \mu_0 - \Delta_1 \\ \frac{A_1}{\Delta_1^2}(x - \mu_0)^2, & \text{se } \mu_0 - \Delta_1 < x \leq \mu_0 \\ \frac{A_2}{\Delta_2^2}(x - \mu_0)^2, & \text{se } \mu_0 < x \leq \mu_0 + \Delta_2 \\ A_2, & \text{se } x > \mu_0 + \Delta_2. \end{cases} \quad (9.2)$$

Face a uma amostra sob controlo, (x_1, x_2, \dots, x_n) , de determinada característica de qualidade, a estimativa usual da função prejuízo $L(x)$, em (9.2), é dada por

$$L(\underline{x}) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{A_1}{\Delta_1^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 I_{[x_i < \mu_0]} + \frac{A_2}{\Delta_2^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 I_{[x_i > \mu_0]} \right\},$$

onde I_A representa, como usualmente, a função indicatriz do acontecimento A , i.e.,

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ ocorre} \\ 0 & \text{se } A \text{ não ocorre.} \end{cases}$$

Para uma característica de qualidade não negativa de tipo *menor é melhor*, o valor nominal objectivo é $\mu_0 = 0$, e só existe limite superior de especificação, Δ , tendo-se

$$L(x) = \frac{A}{\Delta^2} x^2,$$

que, face a uma amostra sob controlo, $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, pode ser estimada por

$$L(\underline{x}) = \frac{A}{n\Delta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Por sua vez, para uma característica de qualidade não negativa de tipo *maior é melhor*, o valor nominal objectivo é $\mu_0 = +\infty$, e só existe limite inferior de especificação, Δ , tendo-se

$$L(x) = A\Delta^2 \left(\frac{1}{x^2} \right),$$

que, face a uma amostra sob controlo, $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, pode ser estimada por

$$L(\underline{x}) = \frac{A\Delta^2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}.$$

9.3 Planos de Taguchi

Neste texto não iremos abordar em detalhe os planos de Taguchi. Para o leitor interessado aconselhamos por exemplo o livro genérico sobre planeamento de experiências de Dean & Voss⁷ (1999) e os próprios livros de Taguchi e de seus colaboradores. Aconselha-se ainda a monografia de Torres⁸ (1996).

A necessidade de identificação das oportunidades de melhoria de qualidade obriga a um estudo cuidadoso dos factores em jogo e dos seus efeitos na *performance* do produto ou processo. Torna-se então necessária a realização de testes e experiências.

Os japoneses privilegiam aqui o *planeamento de experiências* para a selecção dos parâmetros nas fases de projecto quer do processo quer do produto. O objectivo é o de realizar experiências com várias combinações, a fim de identificar a combinação óptima,

⁷ Dean, A. & D. Voss (1999). *Design and Analysis of Experiments*. Springer-Verlag.

⁸ Torres, D.F. (1996). *Contribuição dos Métodos de Taguchi para o Controlo Estatístico da Qualidade*. Dissertação de Mestrado, ISEG, Universidade Técnica de Lisboa.

face a critérios de avaliação da qualidade previamente definidos. O mundo ocidental dava essencialmente ênfase aos *testes*, face aos quais se tornava difícil detectar quais as alterações a efectuar. Os japoneses colocam a ênfase no *planeamento de experiências*: o teste e a experimentação não são substitutos, mas complementam-se, sendo a experimentação a ditar o que deve ser testado.

As aplicações da experimentação ao nível da engenharia da qualidade devem, segundo Montgomery (2004, 2008), preencher os seguintes requisitos:

1. Avaliação e comparação das configurações básicas dos projectos.
2. Avaliação das alterações dos materiais.
3. Selecção de parâmetros do projecto com os quais o produto atinge a melhor *performance*, sob condições diversas, i.e., com os quais é mais robusto.
4. Determinação da combinação de parâmetros que melhor impacto tem na *performance* do produto.

Em seguida, referiremos brevemente algumas formas de planear experiências e de determinar a importância dos factores intervenientes num planeamento, finalizando com a contribuição de Taguchi nesta área. Para mais detalhes sobre planeamentos de experiências, consulte-se Montgomery⁹ (2009).

9.3.1 Planeamento com Alteração de um Factor de Cada Vez

Neste planeamento comparam-se os diferentes níveis de um mesmo factor, mantendo-se constantes as condições ou níveis dos outros factores.

⁹ Montgomery, D.C. (2009). *Design and Analysis of Experiments*, 7th edition. Arizona State University.

Admitamos uma variável resposta (x) dependente de três factores A, B e C. Admitamos que cada factor tem dois níveis, designados de *baixo* e *alto*, denotados de -1 e $+1$, respectivamente.

Para realizar uma experiência com os três factores (A, B e C), fazendo variar um factor de cada vez, necessitamos de quatro testes, indicados no quadro seguinte.

Factores				
Teste	A	B	C	Resposta (x)
1	-1	-1	-1	x_1
2	+1	-1	-1	x_2
3	-1	+1	-1	x_3
4	-1	-1	+1	x_4

De acordo com este planeamento de experiências podem-se comparar os dois níveis de qualquer um dos factores (por exemplo, A) enquanto os outros factores (neste caso, B e C) permanecem invariáveis. Num planeamento deste tipo nunca se sabe o que aconteceria à variável resposta caso a alteração do nível de um dos factores (por exemplo, A) fosse acompanhada simultaneamente por uma alteração do nível de B ou de C. Este tipo de planeamento não serve pois para identificar *interacções* entre os factores. Note-se que se diz existir *interacção* entre dois factores quando o efeito de um dos factores depende do nível assumido pelo outro.

Este tipo de planeamento tem pois a desvantagem apresentada anteriormente, aliada a um elevado número de testes quando há muitos níveis para cada um dos factores. Trata-se no entanto de um planeamento extraordinariamente simples de elaborar.

9.3.2 Planeamento Factorial Completo

Testam-se neste caso todas as possíveis combinações dos níveis dos factores. No exemplo apresentado anteriormente, de três factores, cada um com dois níveis, necessitamos de $2^3 = 8$ testes, apresentados em seguida.

Teste	Factores			Resposta (x)
	A	B	C	
1	-1	-1	-1	x_1
2	-1	-1	+1	x_2
3	-1	+1	-1	x_3
4	-1	+1	+1	x_4
5	+1	-1	-1	x_5
6	+1	-1	+1	x_6
7	+1	+1	-1	x_7
8	+1	+1	+1	x_8

Estes oito testes contemplam todas as combinações possíveis dos níveis dos três factores, permitindo pois avaliar interacções entre os mesmos. Estamos perante um planeamento com colunas ortogonais (produto interno nulo), o que permite que a estimação do efeito de um factor seja independente dos outros factores. Se existirem k factores estamos perante o que é usual designar por *planeamento factorial completo* 2^k .

Ao efectuar um determinado estudo de factores, tem-se como objectivo saber quais são os factores que afectam a variável resposta, e em que medida é que a vão afectar. Interessa pois proceder ao cálculo dos *efeitos principais* e das interacções. Após o cálculo dos efeitos dos factores interessa saber quais são os efeitos significativos, de modo a estabelecer uma distinção entre os efeitos que são realmente importantes e os que o não são. É então usual utilizar métodos estatísticos sobre os quais não iremos entrar em detalhe, como a *Análise de Variância* (ANOVA), os *Testes de Significância* ou os *Intervalos de Confiança*.

9.3.3 Planeamentos Factoriais Fraccionados

Como vimos atrás, os planeamentos factoriais completos são de aplicação fácil quando o número de factores e o número de níveis de cada um dos factores não é muito elevado, mas tornam-se de aplicação pesada à medida que tais números vão aumentando.

Num planeamento factorial completo 2^k teremos de estimar $\binom{k}{0}=1$ resposta média, $\binom{k}{1} = k$ efeitos principais, $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ interações-2, $\binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$ interações-3, e assim por diante.

Box¹⁰ (1986) refere-se à grande redundância existente nos planeamentos factoriais com muitos factores, devido ao facto de não serem significativas as interações de terceira ordem e de ordem superior. Ao tipo de planeamento que resulta de uma fracção dum planeamento factorial completo dá-se o nome de *planeamento factorial fraccionado*.

Num planeamento com k factores (cada um com 2 níveis), ao considerarmos um *planeamento factorial fraccionado* 2^{k-p} , estudam-se os k factores em 2^{k-p} testes, o que requer a introdução de p factores num *planeamento factorial completo* de $k - p$ factores. Esta introdução de p factores é feita nas colunas correspondentes às interações dos primeiros $k - p$ factores.

9.3.4 Arranjos Ortogonais

Os *arranjos ortogonais* são planeamentos factoriais altamente fraccionados nos quais surgem muitos efeitos confundidos com interações de baixa ordem, como as interações-2. O número de graus de liberdade de um arranjo ortogonal é igual ao número de combinações dos factores presentes no arranjo (número de linhas do arranjo) menos uma unidade.

Os *planos de Taguchi* são arranjos ortogonais simples com o número de graus de liberdade suficiente para acomodar todos os factores. Como na filosofia de Taguchi as interações são normalmente desprezadas, não havendo grande preocupação com a resolução do planeamento, a escolha do arranjo ortogonal recai naquele, que tendo o número de graus necessários, menor número de testes exige.

¹⁰ Box, G.E.P. (1986). Signal-to-noise ratios, performance criteria, and transformations, *Technometrics* **30**, 1-40.

Por exemplo, para estudar 7 factores, cada um com dois níveis, em 8 testes, Taguchi propõe o arranjo ortogonal seguinte, que denota por $L_8(2^7)$.

Teste	Factores							Resposta (x)
	A	B	C	D	E	F	G	
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	x_1
2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	x_2
3	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	x_3
4	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	x_4
5	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	x_5
6	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	x_6
7	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	x_7
8	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	x_8

Taguchi interpreta os resultados dos arranjos ortogonais pressupondo que todas as interações podem ser desprezadas qualquer que seja a sua ordem. Isto tem causado alguma controvérsia por entre os estatísticos ocidentais, que consideram a potencial importância das interações-2.

Taguchi ao não atribuir grande importância às interações entre os factores de controlo, trata as mesmas como se fossem um ruído. Para mais detalhes sobre o tema veja-se Torres (1996), já anteriormente citado neste capítulo, onde são ainda estudados os *gráficos lineares* de Taguchi e os seus *planeamentos robustos*.

9.4 Gestão da Qualidade Total

Os métodos estatísticos de garantia da qualidade têm tido grande aplicação no mundo real. Pessoas diversas, trabalhando a partir de bases filosóficas particulares, em Organizações com culturas peculiares, utilizam muitos dos instrumentos apresentados neste livro. E muito frequentemente, o ambiente em que são usados os instrumentos de *Controlo da Qualidade* tem tanto ou mais que ver com o sucesso ou a falha dos esforços de garantia da qualidade, do

que propriamente a eficiência dos métodos estatísticos utilizados. Como já referimos logo de início, este livro é essencialmente sobre metodologia estatística. Foi no entanto feito algum esforço para colocar a metodologia estatística no contexto adequado à área da *Qualidade*. Iremos nesta parte final fazer por um lado uma revisão dos elementos associados à moderna cultura da *Qualidade*, fornecendo alguns comentários sobre os aspectos positivos e potencialmente negativos do ambiente actual.

A terminologia mais popular e comum para a filosofia e a cultura modernas de *Qualidade* é a TQM, de *Total Quality Management*. O objectivo desta terminologia é o de realçar que numa economia mundial, as Empresas de sucesso terão de *gerir a totalidade* do que fazem, com a perspectiva de produção de trabalho de *qualidade*. Sob o ponto de vista de alguns qualquer paradigma de engenharia ou gestão potencialmente útil para alcançar o objectivo de qualidade pretendido faz parte da TQM. Para outros, a TQM é mais restricta, e leva à letra o ditado *o cliente é rei*. Vejamos quais são os principais elementos da TQM, de acordo com Vardeman & Jobe (1999):

1. *Foco no cliente* — a voz do cliente é imperativa;
2. *Orientação processo/sistema* — só a compreensão e o melhoramento dos processos permite melhorar a eficiência de uma Empresa e a qualidade dos seus produtos finais;
3. *Melhoria contínua* — num contexto TQM o melhoramento é um trabalho que nunca acaba; qualquer Organização deve estar constantemente a melhorar qualquer faceta de tudo aquilo que faz;
4. *Auto-avaliação e Promoção* — é importante saber como é que as técnicas de uma Empresa comparam com o melhor mundial, e reagir em conformidade com isso; mesmo se se for líder mundial haverão oportunidades de melhoramento.
5. *Mudança de culturas e estruturas corporativas, com mudança para Organizações sem barreiras, envolvimento global dos trabalhadores com envolvimento da Gestão (e de todos) em*

TQM — participação global e simultânea de todo o pessoal nas actividades de TQM, começando com os gestores de nível mais elevado, e reduzindo o número de níveis entre o *topo* e a *classe mais baixa* de uma Organização, tornando-a mais equalitária. Condenação da tendência humana de criar *pequenos impérios* dentro de uma Organização, que se degladiam, em vez de cooperar;

6. *Apreciação e compreensão da variabilidade* — numa dimensão mais directamente relacionada com a *Estatística*, o movimento TQM coloca grande ênfase na compreensão e apreciação das consequências da variabilidade. Na realidade, um dos passos iniciais típicos em programas de TQM é o de fornecer treino em estatística elementar (com métodos básicos, numéricos e gráficos, de descrição de variabilidade, e ainda alguns rudimentos sobre cartas de Shewhart);
7. *Os gurus da qualidade* — o ambiente de TQM está sem dúvida repleto de muitos *consultores da qualidade* (competitivos), e dos seus bandos de seguidores leais. Há nomes grandes, como os de Deming, Juran, Feigenbaum, e Crosby, bem como milhares de outros menos famosos.

Tal como foi descrita, e se bem aplicada, a TQM é suficientemente atractiva, sendo pois difícil encontrar uma base para a criticar. Trata-se da *democratização da Ciência*, como afirma G.P. Box.

Há no entanto que ter alguns cuidados. Palavras e conceitos importantes como *dever*, *princípio*, *integridade* não parecem ter grande importância num mundo *guiado pelo consumidor*. O que o *cliente* quer nem sempre é consistente, e muito menos moral ou sensato. A preocupação da TQM com a contínua melhoria dos processos ou sistemas, também tem recebido críticas. O esforço e o volume de trabalho relacionado com o planeamento, a documentação desse planeamento e a avaliação, têm aumentado exponencialmente nos últimos anos a nível das Empresas, do Governo e das Universidades. Todos estes planos estratégicos, avaliação de resultados, e assim por diante, podem facilmente transformar uma tarefa rela-

tivamente fácil para uma única pessoa, numa grande tarefa para um grupo, com grande perda de produtividade. Também o grande investimento feito na determinação daquilo que os outros fazem pode ser pernicioso, e travar a inovação. Essa inovação não tem na realidade saído dos trabalhos em grupo, mas sim de *esforços individuais* de pessoas brilhantes, motivadas e trabalhadoras. Os pontos 5 e 6 não merecem grande controvérsia; o mesmo já não acontece com o ponto 7, devido à idolatria criada relativamente a alguns gurus da qualidade.

Como moral, a TQM deve ser usada de forma limitada, e apropriada, por pessoas de ética, que sabem pensar, e, no seu melhor, fornece um terreno fértil para a utilização de métodos de garantia estatística da qualidade.

Capítulo 10

Exercícios de Aplicação

10.1 Introdução às Cartas de Controlo

1. Uma característica de qualidade X , Normal, com normas de qualidade fixadas em (μ_0, σ_0) , está a ser monitorizada por uma carta- \bar{X}_n com limites de controlo 3-sigma, i.e., $LCI = \mu_0 - 3\sigma_0/\sqrt{n}$ e $LCS = \mu_0 + 3\sigma_0/\sqrt{n}$.
 - a) Qual o risco- α associado, i.e., qual a probabilidade de um ponto representado na carta, i.e., uma média amostral, cair fora dos limites de controlo, quando o processo está sob controlo?
 - b) Sabendo que o processo se mantém sob controlo, qual o número médio de amostras necessárias para a emissão de um falso sinal de fora de controlo?
 - c) Considere de novo a carta- \bar{X}_n com limites 3-sigma, à qual se associam as seguintes regras de decisão:
Regra 1. Se uma ou mais das próximas sete amostras fornecer um valor da estatística de teste fora dos limites de controlo, então o processo está fora de controlo.
Regra 2. Se todas as sete observações seguintes estão do mesmo lado da linha central, então o processo está fora de controlo.

- c1) Qual é o risco- α associado a cada uma destas regras de decisão? Qual o risco- α global se se aceitarem ambas as regras como regras de fora de controlo?
- c2) Se o valor médio da característica de qualidade sofrer uma alteração de μ_0 para $\mu_0 + \sigma_0$, e se se mantiver nesse valor durante a recolha das sete observações seguintes, qual é o risco- β associado com ambas as regras de decisão, i.e., qual é a probabilidade de nos decidirmos por uma situação de controlo, quando na realidade o processo está fora de controlo.
- d) Refaça as alíneas a) e b) para limites de controlo 2-sigma.
2. Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória de dimensão n retirada de uma população X .
- a) Mostre que enquanto $S^2 := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-1} (X_i - \bar{X})^2$ é um estimador centrado de $\sigma^2 = \text{Var}(X)$, S não é necessariamente centrado para σ .
- b) Obtenha o valor médio de S em população Normal(μ, σ) e indique qual a função de S que é estimador centrado de σ .
- c) Indique como estabeleceria uma carta de controlo de desvios padrão, em modelo Normal(μ, σ).
3. Uma certa característica de qualidade é monitorizada por uma carta de controlo para a qual é $1 - \beta$ a probabilidade de detecção de uma certa condição de fora de controlo na primeira amostra recolhida após mudança para o estado OUT. Calcule:
- a) a probabilidade de a condição de fora de controlo só ser detectada na 2^a amostra recolhida após ter ocorrido mudança;

- b) a probabilidade de a condição de fora de controlo só ser detectada na k -ésima amostra recolhida após ter ocorrido mudança;
 - c) o número esperado de subgrupos analisados antes de ser detectada mudança;
 - d) a probabilidade de a primeira amostra recolhida, após ocorrer mudança, produzir uma estatística dentro dos limites de controlo;
 - e) a probabilidade da mudança não ser detectada nas k amostras seguintes;
 - f) a probabilidade de as duas amostras recolhidas a seguir à mudança produzirem estatísticas fora dos limites de controlo;
 - g) a probabilidade de pelo menos uma das k amostras seguintes produzir uma estatística de teste fora dos limites de controlo.
4. Numa carta 3-sigma de médias (carta- \bar{X}_n), em processo $X \sim \text{Normal}(\mu_0, \sigma_0)$, é dado um alerta de fora de controlo quando existem pelo menos 4 de entre 6 médias fora do intervalo $(\mu_0 - \sigma_0/\sqrt{n}, \mu_0 + \sigma_0/\sqrt{n})$.
- a) Qual o risco- α associado à regra de fora de controlo indicada?
 - b) Se o valor médio do processo sofrer uma diminuição igual a σ_0/\sqrt{n} , calcule o risco- β associado à regra anteriormente especificada.
 - c) Qual passa a ser o risco- α se adicionalmente à regra anterior se considerar também a regra de rejeição universal em carta 3-sigma?
5. Numa carta 3-sigma de médias (carta- \bar{X}_n), pretende-se controlar o processo em modelo $\text{Normal}(\mu_0, \sigma_0)$.
- a) Sabendo que é dado um alerta de fora de controlo quando existem 3 pontos ordenados ascendentemente

entre $\mu_0 + 2\sigma_0/\sqrt{n}$ e $\mu_0 + 3\sigma_0/\sqrt{n}$, qual o risco- α associado a esta regra de fora de controlo?

- b) Se adicionalmente à regra anterior for considerada a regra universal de fora de controlo, qual o valor que passa a ter o risco- α ?
- c) Qual a dimensão n dos subgrupos racionais a recolher, caso se pretenda detectar de imediato, e com probabilidade superior a 0.8, uma alteração no valor médio para $\mu_0 + 2\sigma_0$?

6. Considere uma carta- \bar{X} , com limites de controlo 3-sigma, para controlar uma característica de qualidade Normal, e as seguintes regras de decisão:

Regra 1. Se 8 pontos consecutivos estiverem entre o LCI e a LC o processo está fora de controlo.

Regra 2. Se 2 de entre 3 pontos consecutivos distarem da LC em mais de σ o processo está fora de controlo.

Qual é o risco- α associado à consideração de uma situação de fora de controlo caso se tenha a veracidade da regra 1 ou da regra 2 ou da regra universal de fora de controlo?

7. Uma característica de qualidade X está a ser controlada através de cartas- \bar{X} e R (ambas 3-sigma), e todos os pontos caíram dentro dos limites de controlo em ambas as cartas. Face à ocorrência de uma mudança súbita no valor médio do processo, o valor médio de X aumentou de 1.5σ , sem mudar σ . Ao responder às perguntas seguintes, admita que a característica de qualidade é Normal antes e depois da mudança, e que os limites de controlo são baseados nas observações que ocorreram antes da mudança. Estão a utilizar-se subgrupos racionais de dimensão $n = 4$.

- a) Diga qual a percentagem de pontos que espera que caiam fora dos limites de controlo.
- b) Qual a probabilidade de pelo menos duas de entre 8

médias, numa sequência de 8 subgrupos caírem acima do LCL ?

8. Uma carta- \bar{X} de controlo de determinado processo usa limites 3-sigma e subgrupos racionais de dimensão $n = 4$.
 - a) Qual é a probabilidade de 8 pontos consecutivos caírem entre a linha central e o LCL ?
 - b) Qual a probabilidade de nenhuma das médias, numa sequência de 8 subgrupos caírem abaixo do LCS , dado que a média do processo se alterou para $\mu_0 - 0.6\sigma_0/\sqrt{n}$?
9. Numa carta 3-sigma de observações individuais, em processo Normal(μ_0, σ_0), é dado um alerta de fora de controlo quando existem pelo menos 5 de entre 6 pontos consecutivos do mesmo lado da linha central.
 - a) Qual o risco- α associado à regra de fora de controlo indicada?
 - b) Se o valor médio do processo sofrer um aumento igual a σ_0 , calcule o risco- β associado à regra anteriormente especificada.
10. Considere uma carta- X , 3-sigma, para controlo de observações individuais de um processo proveniente de um modelo F , simétrico em torno de μ_0 , e com variância σ_0^2 . Considere as seguintes regras de detecção de fora de controlo:

Regra 1. Pelo menos três de entre cinco observações consecutivas distam de μ_0 mais de σ_0 .

Regra 2. Pelo menos duas de entre dez observações consecutivas estão fora dos limites de controlo.

 - a) Qual o risco- α associado à regra 1?
 - b) Qual o risco- α associado à regra 2?
 - c) Qual o risco- α global?
 - d) Se o processo sofrer um aumento de 20% na variabilidade, qual o risco- β associado à regra 2?

10.2 Papel de Probabilidade

1. Considere os dados ordenados $z_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, $n = 50$:

-2.4	-1.9	-1.5	-1.3	-1.0	-0.8	-0.5	-0.3	-0.1	0.1
0.3	0.5	0.7	1.0	1.2	1.4	1.7	2.0	2.3	2.4
2.5	2.6	2.7	2.7	2.8	2.8	2.9	2.9	3.0	3.0
3.1	3.1	3.1	3.2	3.2	3.3	3.4	3.4	3.5	3.6
3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.2	4.3	4.6	5.1	6.5

Marque-os versus $-\ln(-\ln(i/(n+1)))$, $1 \leq i \leq n$, e comente o resultado obtido. Proceda ainda à identificação da população subjacente a estes dados.

2. Considere o seguinte conjunto de dados x_i , $1 \leq i \leq n$, com $n = 50$:

17.86	13.97	13.26	10.81	16.48
13.47	11.27	12.73	11.77	10.49
14.28	10.04	13.07	11.43	11.97
14.70	16.20	10.16	11.45	11.13
10.10	10.12	12.89	13.70	10.21
14.64	12.00	12.20	11.87	10.75
12.32	12.59	11.68	10.87	10.64
10.25	12.45	10.30	11.59	10.40
10.34	10.39	10.93	11.06	11.00
11.35	10.70	10.54	11.20	10.59

Utilizando uma folha de cálculo e/ou um *package* estatístico, responda às questões que se seguem:

- Obtenha a amostra ordenada $x_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, e, através de uma análise preliminar de dados, postule um modelo para a população subjacente.
- Para $F(x) = 1 - \exp(-x)$, $x > 0$, trace $x_{i:n}$ versus $F^{-1}(\frac{i}{n+1})$, para $1 \leq i \leq n$. Procure ajustar uma recta à nuvem de pontos obtida. Quais as conclusões que tira?

- c) Obtenha estimativas λ^* e δ^* dos parâmetros de localização λ e dispersão δ associados ao referido modelo exponencial, por exemplo através do método dos momentos.
- d) Considere as novas amostras, $u_i = 2\left(1/\sqrt{\frac{x_i - \lambda^*}{\delta^*}} - 1\right)$, $v_i = -\ln\left(\frac{x_i - \lambda^*}{\delta^*}\right)$ e $w_i = 2\left(1 - \sqrt{\frac{x_i - \lambda^*}{\delta^*}}\right)$, $1 \leq i \leq n$.
- d1) Represente graficamente em papel de probabilidade Gumbel estas amostras, e comente os resultados obtidos.
- d2) Admitindo a validade do modelo Exponencial com parâmetros λ^* e δ^* (estimativas obtidas anteriormente), identifique as populações subjacentes às amostras u_i , v_i e w_i , $1 \leq i \leq n$. Identifique em seguida esses modelos como casos particulares de um modelo genérico, com f.d. de valores extremos,

$$G(x; \alpha, \beta, \theta) = e^{-\left(1 - \theta\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)\right)^{1/\theta}}, \quad 1 - \frac{\theta(x - \alpha)}{\beta} > 0,$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

- d3) Faça a representação gráfica dos dados u_i , v_i e w_i , $1 \leq i \leq n$, em papel de probabilidade adequado, e comente os resultados obtidos.

10.3 Estatísticas Ordinais

1. Seja $X_{i:n}$ a i -ésima estatística ordinal crescente associada a uma amostra de dimensão n proveniente de um modelo exponencial com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- a) Mostre que $X_{i:n}$ e $X_{j:n} - X_{i:n}$ ($i < j$) são independentes.
- b) Qual é a distribuição de $X_{i+1:n} - X_{i:n}$?

- c) Utilize o resultado anterior para derivar o valor médio e a variância de $X_{i:n}$:

$$\mu_{i:n} = \mathbb{E}(X_{i:n}) = \psi(n+1) - \psi(n-i+1), \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\text{Var}(X_{i:n}) = \psi'(n-i+1) - \psi'(n+1), \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde $\psi(\cdot)$ denota a função digama, em (3.18), sendo $\psi'(\cdot)$ a sua derivada.

2. Para uma amostra de dimensão n de um modelo Pareto, com f.d.

$$F(x; \alpha) = 1 - x^{-\alpha}, \quad x \geq 1 \quad (\alpha > 0),$$

mostre que $X_{i:n} \stackrel{d}{=} \prod_{j=1}^i V_j$, onde as variáveis aleatórias V_j são independentes, com f.d. Pareto $F(x; (n-j+1)\alpha)$. Mostre em seguida que, para $\alpha > 1/(n-i+1)$,

$$\mathbb{E}(X_{i:n}) = \frac{n!}{(n-i)!} \frac{\Gamma(n-i+1-1/\alpha)}{\Gamma(n+1-1/\alpha)}.$$

3. Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra de dimensão n de uma distribuição arbitrária $F(\cdot)$, $\mu_{i:n} = \mathbb{E}(X_{i:n})$ e $X_{i:n}$ a i -ésima estatística ordinal crescente, $1 \leq i \leq n$.

a) Exprima $\mu_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, em termos de $\mu_{1:j}$, para $n-i+1 \leq j \leq n$.

b) Mostre que $\sum_{i=1}^n \mu_{i:n}/i = \sum_{i=1}^n \mu_{1:i}/i$.

4. Com a notação usual, $\mu_{r:n}^{(k)} = \mathbb{E}(X_{r:n}^k)$, $X_{r:n}$ a r -ésima estatística ordinal crescente associada a uma amostra aleatória de dimensão n , proveniente de uma população com f.d. $F(\cdot)$, mostre que:

a) Para n par, $\left\{ \mu_{n/2+1:n}^{(k)} + \mu_{n/2:n}^{(k)} \right\} / 2 = \mu_{n/2:n-1}^{(k)}$.

b) Se $F(\cdot)$ for uma f.d. simétrica em torno de 0, e se n for par,

$$\mu_{n/2:n-1}^{(k)} = \begin{cases} \mu_{n/2:n}^{(k)} & \text{se } k \text{ par} \\ 0 & \text{se } k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

5. Uma característica de qualidade X é bem modelada por um modelo com f.d.p.

$$f_{\beta}(x) = \begin{cases} \frac{3}{\beta} x^{3/\beta-1} & \text{se } 0 < x < 1 \quad (\beta > 0) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja (X_1, \dots, X_n) um subgrupo racional de réplicas i.i.d. dessa característica de qualidade, e seja $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$ a amostra de estatísticas ordinais ascendentes associada.

- a) Obtenha uma representação em distribuição para $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, em termos de variáveis aleatórias Pareto *standard* e i.i.d.
 - b) Diga como pode estimar o parâmetro desconhecido θ , caso tenha acesso exclusivo a mínimos e máximos de k subgrupos racionais, i.e., a $(X_{1:n}^{(j)}, X_{n:n}^{(j)}, 1 \leq j \leq k)$.
 - c) Designando por $\chi_{1/2}$ a mediana de uma característica de qualidade X , quais os valores de n que permitem ser superior a 0.95 a probabilidade do intervalo $(X_{1:n}, X_{n:n})$ conter $\chi_{1/2}$?
6. Considere uma amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) proveniente de um modelo Uniforme(0,1).
- a) Obtenha a distribuição do mínimo $X_{1:n}$, do máximo $X_{n:n}$ e da amplitude $W_n = X_{n:n} - X_{1:n}$.
 - b) Mostre que as variáveis $U = X_{1:n}/X_{n:n}$ e $V = X_{n:n}$ são independentes, e identifique a distribuição de U .
 - c) Exprima $W_n = X_{n:n} - X_{1:n}$ em termos de U e V , e calcule em seguida o valor médio e a variância de W_n .

7. Considere uma amostra de dimensão n , (X_1, \dots, X_n) , de observações i.i.d. provenientes de uma população com f.d. contínua $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$. Sejam $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$, as estatísticas ordinais crescentes associadas a essa amostra e seja $\mu_{i:n} = \mathbb{E}(X_{i:n})$, $1 \leq i \leq n$.

- a) Exprima, para um $F(x)$ genérico, $\mu_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, em termos de $\mu_{j:j}$, $i \leq j \leq n$. Comprove a validade do resultado obtido para o modelo exponencial.
- b) Mostre que a distribuição de amostragem da variável aleatória $Y = 1 - e^{-X_{i:n}}$ é uma $\text{Beta}(i, n - i + 1)$, para $1 \leq i \leq n$.
8. Considere a variável aleatória X , com f.d. $F(\cdot)$, simétrica em torno de $\chi_{1/2}$. Seja $V = \max(X_{n:n}, 2\chi_{1/2} - X_{1:n})$. Mostre que para $x \geq 1/2$,

$$\mathbb{P}(F(V) > x) = 1 - (2x - 1)^n.$$

10.4 SPC e Planos de Aceitação

1. Com o objectivo de monitorizar o comprimento médio, em mm, dos parafusos produzidos em série numa determinada fábrica, implementou-se uma carta de médias VSI, para amostras de dimensão $n = 4$, com os seguintes limites de controlo e de vigilância: $\begin{cases} \text{LCI} = 18.5 \\ \text{LCS} = 21.5 \end{cases}$ e $\begin{cases} \text{LVI} = 19.5 \\ \text{LVS} = 20.5 \end{cases}$.

Sob controlo, as normas para o valor médio e para o desvio padrão do processo impostas pela gerência são as seguintes: $\mu_0 = 20$ mm e $\sigma_0 = 1$ mm. Os intervalos amostrais a utilizar na implementação desta carta são $d_1 = 0.1$ u.t. e $d_2 = 1.9$ u.t., onde u.t. representa a unidade de tempo escolhida. O comprimento dos parafusos está associado a uma variável com distribuição Normal.

- a) Admita que o processo está sob controlo.
- a1) Qual a taxa de falsos alarmes associada a esta carta.
- a2) Determine o tempo esperado até à emissão de um falso alarme.

- b) Se o valor médio do processo se alterar para 22 mm e o desvio padrão se mantiver igual a 1 mm, qual a probabilidade de esta alteração no valor médio do processo ser detectada,
- b1) na 1ª amostra recolhida imediatamente a seguir à alteração ter ocorrido?
 - b2) apenas na 5ª amostra recolhida imediatamente a seguir à alteração ter ocorrido?
- c) Admita que o comprimento dos parafusos produzidos deve satisfazer as seguintes especificações: 20 ± 3 mm. Estando o processo sob controlo, determine:
- c1) A percentagem de parafusos não conformes produzidos por este processo.
 - c2) Os principais índices de capacidade do processo.
2. A direcção de uma determinada empresa têxtil pretende salvaguardar uma protecção de qualidade para a sua produção. Os artigos são enviados em lotes de 1000 unidades e pretende-se que lotes com 2.2% de defeituosos tenham uma probabilidade de serem aceites entre 7% e 11%. O técnico responsável pelo departamento de controlo da qualidade da Empresa afirma que um plano de amostragem simples definido pelos parâmetros $n = 100$ e $c = 0$ satisfaz os requisitos da direcção. Concorde com a afirmação do técnico?
3. Considere o seguinte plano de amostragem duplo:
- Inspeccionar uma 1ª amostra de 36 artigos de um lote de dimensão 1000; aceitar o lote se não houver artigos defeituosos e rejeitar o lote se o número de defeituosos exceder 3;
 - Inspeccionar uma 2ª amostra de 59 artigos no caso de terem sido detectados 1, 2 ou 3 artigos defeituosos na 1ª amostra; aceitar o lote se, na amostra conjunta (95 artigos), forem detectados no máximo 3 artigos defeituosos; rejeitar o lote no caso contrário.

Admitindo que a fracção de defeituosos no lote é de 1%, calcule a probabilidade de aceitação de um lote sujeito a este plano de amostragem.

4. Pretende-se implementar um sistema de controlo estatístico da qualidade de componentes electrónicas fabricadas em série numa empresa industrial. A característica sob controlo é a resistência das componentes produzidas, v.a. com distribuição Normal.

a) Para utilização durante o controlo *on-line*, deduza cartas bilaterais equilibradas, \bar{X} e R , para controlar o valor médio e a variabilidade do processo, tendo em atenção as seguintes condições:

- As cartas são implementadas com a política amostral VSI;
- A resistência de uma componente deve estar associada a uma distribuição Normal de valor médio 140Ω e variância $12 \Omega^2$ quando o processo está sob controlo;
- Dimensão das amostras a recolher: $n = 4$;
- Taxa de falsos alarmes de cada uma das cartas: 5%;
- $\mathbb{P}(\bar{X} \in [LVI, LVS] | IN) = 90\%$.

b) Para a fase de controlo *off-line* foi sugerido o seguinte plano de amostragem simples para controlo de aceitação de lotes de 1000 componentes, onde se estima ser de 5% a fracção de componentes defeituosas existente em cada lote.

- Dimensão da amostra a retirar de cada lote: 20 componentes;
- A probabilidade de aceitação de um lote não deve ser inferior a 50%;
- Rectificação a 100% dos lotes rejeitados;
- Risco do comprador: 39.18%;

- Nível de Qualidade Aceitável: $AQL=0.5\%$.
 - b1) Determine o valor mínimo para o número de aceitação que permite cumprir os requisitos deste plano de amostragem.
 - b2) Determine o valor fixado para LTPD (fracção tolerável de defeituosos, também designada nível de qualidade rejeitável).
 - b3) Determine a fracção de defeituosos mais desfavorável para o comprador de um lote sujeito ao plano de amostragem anterior, admitindo $c = 1$.
 - b4) A Empresa estará interessada em diminuir o número de aceitação? Justifique a sua resposta calculando o valor dos indicadores que achar adequados para responder à questão.
5. O Conselho de Administração de uma Empresa produtora de peças para automóvel pretende implementar um sistema interno de controlo da qualidade dos rolamentos produzidos em série. Este controlo engloba duas vertentes: o controlo do processo de produção, o qual incide sobre o diâmetro dos rolamentos produzidos, v.a. com distribuição Normal, e o controlo de aceitação dos lotes para venda.

O Director de Produção estabelece as seguintes regras:

- Norma de produção para o valor médio: 10 mm;
 - Norma de produção para a variância: 16 mm^2 ;
 - O intervalo de controlo para a média deve ter uma amplitude que não exceda 1.96 mm;
 - A probabilidade de emissão de um falso alarme não deve ser superior a 5%.
- a) Numa fase inicial da laboração, não se colocaram problemas relativamente à variância do processo, incidindo

o controlo apenas sobre o valor médio da produção. Nestas condições determine a dimensão mínima da amostra a utilizar para o controlo do processo de produção.

- b) No que respeita ao controlo sobre a variância, pretende-se que a probabilidade de emissão de um falso alarme seja de 1%, sendo as amostras retiradas para inspeção de dimensão 20.
- b1) Represente a carta de controlo para a variância.
- b2) Recolheram-se 6 amostras que forneceram os seguintes resultados: $s_1'^2=16.8$, $s_2'^2=17.0$, $s_3'^2=16.5$, $s_4'^2=18.0$, $s_5'^2=17.0$ e $s_6'^2=16.0$. Perante estes resultados que medidas deverão ser tomadas?
- b3) Alternativamente poderia monitorizar a variabilidade do processo recorrendo a uma carta de desvios padrão. Neste caso, quais seriam os limites de controlo da carta?

Por seu lado, o Director Comercial estabelece as seguintes regras:

- O risco da Empresa deve ser de 1%;
- A dimensão da amostra para o controlo de aceitação deve ser de 15 unidades;
- O número de aceitação é igual a 0.

Nestas condições:

- c) Determine o nível de qualidade aceitável, AQL.
- d) Determine o limite da qualidade média à saída, AOQL.
- e) Se a dimensão da amostra passar a ser de 10, qual o efeito sobre o limite da qualidade média à saída? O comprador tem interesse nesta alteração? Justifique.

6. Numa empresa industrial, pretende-se implementar um sistema de controlo estatístico da qualidade das peças fabricadas. Inicialmente, as preocupações centram-se ao nível da produção, pretendendo-se monitorizar o comprimento das peças, o qual se admite associado a uma distribuição Normal. Para uso na fase de controlo *on-line* pretende-se estabelecer cartas de controlo VSI para amostras de dimensão $n = 4$, para monitorizar o valor médio e a variabilidade do processo. Em seguida, pretende-se controlar a qualidade dos lotes para venda.

- a) Como as normas μ_0 e σ_0 para o comprimento de uma peça não foram fornecidas pela gerência, numa fase inicial da produção, com o processo estável e sob controlo, recolheram-se 4 amostras de 4 peças cada, as quais forneceram os seguintes valores relativos ao comprimento de cada peça (em mm):

N ^o da amostra	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}
1	143	137	145	137
2	141	142	147	140
3	140	145	143	146
4	145	145	137	139

Com base nesta informação estime as normas, μ_0 e σ_0 , para o comprimento de uma peça.

- b) Deduza cartas de controlo \bar{X} -VSI e R -VSI para monitorizar o valor médio e o desvio padrão do processo, respectivamente. Considere que a probabilidade de emissão de um falso alarme é de 0.2% em cada uma das cartas.
- c) Já durante a fase de controlo *on-line*, as 6 primeiras amostras recolhidas forneceram os seguintes valores para a média e amplitude amostrais:

Amostra	1	2	3	4	5	6
Média	139	143	147	146	147	148
Amplitude	2.12	3.10	3.60	3.15	8.15	8.15

Qual a decisão tomada com base em cada uma das cartas?

- d) Apresente algumas vantagens e desvantagens relativas à utilização das políticas amostrais FSI e VSI na implementação de uma carta de controlo.
- e) Na fase de controlo *off-line*, foi sugerido o seguinte plano de amostragem duplo, para controlo de aceitação de lotes de 1000 peças, onde se estima em 5% a fracção de peças defeituosas em cada lote.

Nº da amostra	Dimensão da amostra	Nº de aceitação
1	20	0
2	20	1

Admitindo rectificação dos lotes rejeitados a 100%, calcule:

- e1) A probabilidade de rejeição de um lote sujeito a este plano de amostragem.
- e2) O número médio de peças inspeccionadas num lote sujeito a este plano de amostragem, i.e., o valor do ATI. Comente o valor encontrado.
- e3) A dimensão média da amostra, i.e., o valor do ASN.
- e4) A qualidade média à saída, admitindo uma fracção de defeituosos de 5% em cada lote. Comente o valor encontrado.
7. Considere uma carta de médias VSI para monitorização de um processo Normal, com limites de controlo 3-sigma e limites de vigilância colocados em $\mu_0 \pm 1.5\sigma_0/\sqrt{n}$, sendo μ_0 e σ_0 o valor médio e o desvio padrão do processo sob controlo, respectivamente. Os intervalos amostrais utilizados na

implementação desta carta VSI são os seguintes: $d_1 = 0.1$ u.t. e $d_2 = 1.9$ u.t., onde u.t. representa a unidade de tempo escolhida. Admita que fora de controlo o valor médio do processo sofre uma alteração de μ_0 para $\mu_0 + \sigma_0/\sqrt{n}$, e que o desvio padrão do processo sofre uma alteração de σ_0 para $2\sigma_0$. Nestas condições determine o tempo esperado até à carta emitir sinal

- a) quando o processo se encontra sob controlo.
 - b) quando o processo se encontra fora de controlo.
8. Numa Empresa de semi-condutores pretende-se controlar a qualidade das componentes para circuitos eléctricos que aí são fabricadas. Ao nível da produção pretende-se monitorizar a resistência dessas componentes, a qual se admite associada a uma distribuição Normal. Estando o processo sob controlo, tem-se $\mu_0 = 50 \Omega$ e $\sigma_0 = 5 \Omega$. Para o efeito admita que se recorre a uma carta de controlo \bar{X} -VSI, bilateral equilibrada, implementada com limites 3-sigma e para subgrupos racionais de dimensão $n = 10$. Os limites de vigilância desta carta foram determinados de modo a que durante a monitorização do processo, seja de 98% a probabilidade de se usar o maior intervalo amostral antes da recolha de uma amostra.
- a) Qual a probabilidade de emissão de um falso alarme quando se recorre a esta carta \bar{X} ?
 - b) Determine os limites de vigilância da carta \bar{X} considerada.
 - c) Quando as normas estão a ser cumpridas, qual a probabilidade de ser necessário vigiar de forma mais apertada a produção, i.e., ser necessário considerar o intervalo de amostragem mais pequeno?
 - d) Se o valor médio do processo se alterar para 55Ω e o desvio padrão se alterar para 3Ω , qual o número médio de amostras recolhidas até à carta emitir sinal?

Após o excelente trabalho a nível da produção, procedeu-se ao estabelecimento de um sistema de controlo a nível das vendas. Para o efeito foram estabelecidas as seguintes condições:

- O controlo de aceitação é baseado no plano de amostragem simples, $n = 8$, $c = 1$, específico para clientes normais, e no plano de amostragem duplo, $n_1 = n_2 = 5$, $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, para clientes especiais;
 - Níveis de protecção de qualidade: AQL=2% e LTPD=15%;
 - Os componentes são vendidos em lotes de 2500 unidades;
 - Todos os lotes rejeitados por este plano de aceitação serão rectificadas a 100%.
- e) Determine o risco do produtor e o risco do comprador decorrente do plano de amostragem simples.
- f) Qual o limite da qualidade média à saída quando a inspecção é feita recorrendo ao plano de amostragem simples. Interprete o valor obtido.
- g) Admitindo que a fracção de defeituosos nos lotes é igual a 2%, compare os dois planos de amostragem no que respeita à
- g1) quantidade média de inspecção total do plano (número médio de artigos inspeccionados por lote), ATI.
 - g2) dimensão média de amostra, ASN.
9. Pretende-se avaliar as condições de produção das lâmpadas fabricadas em série numa determinada Empresa, relativamente à sua duração, em horas. Admita que a duração de uma lâmpada segue distribuição Normal, e que uma lâmpada é considerada defeituosa se a sua duração, em horas, se situar fora do intervalo [8298, 8714].

Para monitorizar o processo, o Departamento de Produção sugere a implementação de cartas bilaterais, de médias e de amplitudes, com as seguintes características:

- Cartas implementadas com a política VSI, para subgrupos racionais de dimensão $n = 10$;
- Taxa de falsos alarmes de cada uma das cartas: 1%;
- Carta de Médias: LVI= 8447.3 e LVS= 8564.7;
- Intervalos amostrais: $d_1=1$ h e $d_2=2$ h.

Por sua vez, o Departamento Comercial propõe que se estabeleça o seguinte plano de amostragem duplo para o controlo da qualidade de lotes de 1000 lâmpadas: $n_1 = 10$, $n_2 = 2$, $c_1 = 0$ e $c_2 = 2$.

- a) Com o objectivo de estimar a norma para o valor médio e a norma para o desvio padrão do processo, recolheram-se 2 amostras de 10 lâmpadas cada, retiradas numa fase em que o processo se encontrava estável e sob controlo, as quais forneceram as seguintes durações (em horas), depois de ordenadas:

Amostra 1:	8357	8393	8427	8429	8484
	8506	8539	8605	8610	8640
Amostra 2:	8373	8383	8399	8468	8485
	8575	8576	8594	8604	8673

Determine, com base nesta informação, estimativas para o valor médio e para o desvio padrão da duração de uma lâmpada (estando o processo sob controlo).

- b) Determine os limites de controlo das cartas de médias e de amplitudes, sugeridas para utilização na fase de controlo *on-line*.
- c) Estando o processo sob controlo, qual o número médio de dias úteis até à emissão de um falso alarme emitido pela carta de médias? Admita que o processo de produção funciona 8 h por dia.

- d) Estando as normas a ser cumpridas, qual a proporção de lâmpadas defeituosas produzidas?
- e) Determine o número médio de artigos inspeccionados por lote sujeito ao plano de amostragem proposto pelo Departamento Comercial, e o número médio de artigos da amostra efectivamente inspeccionados, admitindo rectificação a 100% dos lotes rejeitados e que o processo está a operar sob controlo.
10. Um fabricante de margarinas deseja estudar a capacidade da operação de empacotamento automático de embalagens de 250 gramas, mais precisamente, controlar o peso de cada embalagem. Para o efeito, durante um período de 2 horas seleccionaram-se 4 amostras de 4 embalagens cada. Os dados obtidos relativos ao peso dessas embalagens, em gramas, foram os seguintes:

Amostra 1:	249.8	250.0	249.9	250.3
Amostra 2:	249.9	249.9	249.8	249.8
Amostra 3:	250.2	249.8	249.9	250.0
Amostra 4:	249.9	249.9	249.8	250.2

Admitindo a normalidade da população subjacente aos dados, pretende-se implementar uma carta \bar{X} -VSI e uma carta R -VSI, para monitorizar o valor médio e o desvio padrão do processo, respectivamente. As amostras retiradas para o controlo do processo são de dimensão $n = 4$, e as cartas a implementar deverão satisfazer as seguintes condições:

- Probabilidade de emissão de um falso alarme (para cada carta): 1%;
- Limites de vigilância da carta de médias: $\mu_0 \pm 2\sigma_0/\sqrt{n}$;
- Limites de vigilância da carta de amplitudes: tais que $\mathbb{P}(R > LVS | \sigma = \sigma_0) = \mathbb{P}(R < LVI | \sigma = \sigma_0) = 2.5\%$;
- Intervalos amostrais: $d_1=0.5$ h e $d_2=2.5$ h.

- a) Determine os limites de controlo e os limites de vigilância das cartas \bar{X} e R pretendidas.
- b) Numa fase posterior do processo de empacotamento, e usando o mesmo esquema de amostragem, obtiveram-se os seguintes resultados relativos ao peso das embalagens de 3 amostras de dimensão 4:

Amostra 1:	249.9	250.2	250.1	249.9
Amostra 2:	250.1	250.0	249.9	250.1
Amostra 3:	250.5	249.9	250.1	250.1

Descreva como foi efectuado o controlo do processo, indicando os intervalos amostrais utilizados em cada instante de amostragem, e se foi detectada ou não alguma alteração no processo.

- c) Estando o processo sob controlo, qual o número médio de dias até à emissão de um falso alarme emitido pela carta de médias? Admita que o processo de empacotamento se realiza durante 8 horas consecutivas por dia.
- d) O controlo a nível das vendas de embalagens de margarina será efectuado com base no seguinte plano de amostragem duplo, para lotes de 1000 embalagens:

Nº da amostra	Dimensão da amostra	Nº de aceitação
1	5	0
2	5	2

Admitindo rectificação a 100% dos lotes rejeitados, determine a fracção de defeituosos que fixa em 21.8% a probabilidade de todos os lotes, numa encomenda de 10, passarem o controlo com base na inspecção da 1ª amostra retirada desses lotes.

11. Foi implementado um sistema de controlo estatístico da qualidade dos parafusos fabricados em série numa determi-

nada Empresa. Inicialmente, as preocupações centraram-se ao nível da produção. Para o controlo do diâmetro X de um parafuso, em mm, v.a. com distribuição Normal, consideraram-se cartas de controlo VSI para amostras de dimensão $n = 5$, para monitorizar o valor médio e a variabilidade do processo. Como as normas μ_0 e σ_0 não foram fornecidas pela gerência, recolheram-se duas amostras da produção, estando o processo sob controlo, relativas ao diâmetro de 5 parafusos, as quais forneceram os seguintes valores:

Amostra 1:	15.00	13.50	14.10	15.50	16.30
Amostra 2:	15.10	14.25	14.65	15.55	16.05

Para a implementação destas cartas foram ainda estabelecidas as seguintes regras:

- $\mathbb{P}(\bar{X} \in [\text{LCI}, \text{LCS}] | IN) = 99\%$;
 - $\mathbb{P}(\bar{X} \in [\text{LVI}, \text{LVS}] | IN) = 95\%$;
 - Intervalos amostrais: $d_1=0.1$ e $d_2=1.9$.
- a) Determine as cartas de controlo \bar{X} e R que foram consideradas para a monitorização do diâmetro dos parafusos produzidos.
- b) Durante a fase de controlo *on-line*, admita que as 6 primeiras amostras recolhidas forneceram os seguintes valores, para a média e amplitude amostrais:

Amostra	1	2	3	4	5	6
Média	15.00	15.43	14.50	15.92	15.89	13.98
Amplitude	4.10	1.00	1.50	3.15	3.40	4.15

Qual a decisão a tomar com base em cada uma das cartas propostas?

- c) Na fase de controlo *off-line*, considerou-se um plano de amostragem simples para controlo de aceitação dos parafusos produzidos, com as seguintes especificações técnicas:

Dimensão dos lotes: 5000 parafusos;

Dimensão da amostra: 20 parafusos;

Número de aceitação: $c = 1$;

Rectificação a 100% dos lotes rejeitados;

Nível de Qualidade Aceitável: $AQL=0.5\%$;

Risco do comprador: $\beta=39.18\%$.

- c1) Determine o risco do produtor e o nível de qualidade tolerável. Marque os valores AQL , $LTPD$, α e β no esboço do gráfico da curva característica operacional.
- c2) Qual o limite da qualidade média à saída, $AOQL$? O comprador estará interessado em diminuir o número de aceitação? Sem efectuar cálculos, justifique a sua resposta comentando o que acontece ao $AOQL$.
- c3) E a Empresa estará interessada em diminuir o número de aceitação? Justifique convenientemente a sua resposta, calculando para o efeito os valores que lhe parecem mais adequados.
- c4) Calcule os valores de ATI e de ASN decorrentes deste plano, para uma fracção de defeituosos no lote igual a AQL e a RQL .

12. Para monitorizar *on-line* a resistência dos componentes electrónicos fabricados em série numa determinada Empresa, pretende-se implementar uma carta de médias bilateral para detectar aumentos e/ou diminuições no valor médio da resistência de um componente, e uma carta de amplitudes unilateral para detectar aumentos na variabilidade do processo, tendo em atenção as seguintes condições:

- A resistência X de um componente, em Ω , está associada a uma distribuição Normal;
- As cartas serão implementadas com a política amostral VSI, para subgrupos racionais de dimensão $n = 5$;
- A taxa de falsos alarmes de cada uma das cartas é de 1%;
- $\mathbb{P}(\bar{X} \in [\text{LVI}, \text{LVS}] | IN) = 95\%$;
- $\mathbb{P}(R > \text{LVS} | IN) = 5\%$;
- Intervalos amostrais: $d_1=10$ min e $d_2=60$ min.

a) Estime as normas do processo sob controlo, μ_0 e σ_0 , a partir dos valores da resistência dos componentes das seguintes 4 amostras retiradas do processo:

Amostra 1:	249.6	250.1	250.5	249.9	250.3
Amostra 2:	250.2	250.0	249.1	250.1	249.9
Amostra 3:	250.1	251.0	250.1	250.5	250.1
Amostra 4:	251.3	249.8	249.9	250.2	250.5

- b) Determine os limites de controlo e de vigilância das cartas pretendidas.
- c) Estando o processo sob controlo, qual o tempo esperado até à carta \bar{X} emitir um falso alarme? E qual o tempo médio até à carta R emitir um falso alarme?

13. O Conselho de Administração de uma grande empresa de componentes electrónicas, pretende implementar um sistema de controlo da qualidade das componentes por ela produzidos.

Numa primeira fase, encarregou o Director da Produção de fazer cumprir as seguintes normas de produção, $\mu_0=40$ mm e $\sigma_0=2$ mm, para o comprimento das componentes, variável associada a uma distribuição Normal. Para o efeito, o director de Produção deve implementar uma carta \bar{X} -VSI satisfazendo as seguintes condições:

- Os limites de controlo e de vigilância da carta são simétricos em relação a μ_0 ;
 - A amplitude do intervalo de controlo é de 2.0608;
 - A taxa de falsos alarmes da carta é de 1%;
 - Intervalos amostrais a considerar: $d_1=0.5$ h e $d_2=1$ h.
- a) Determine a dimensão mínima da amostra que permite ver cumpridas as condições acima referidas.
- b) Represente a carta de controlo para a média e diga qual a decisão tomada em cada instante de inspecção pelo Director de Produção, em face dos resultados das seguintes médias amostrais: $\bar{x}_1=39.5$, $\bar{x}_2=40.0$, $\bar{x}_3=39.8$, $\bar{x}_4=40.8$ e $\bar{x}_5=41$.
- c) Determine o tempo esperado até à carta emitir sinal, caso o processo de produção esteja a operar com um valor médio de 41 mm e um desvio padrão de 1 mm.

Numa segunda fase encarregou o Director Comercial do controlo das componentes produzidas. Uma componente é considerada defeituosa se o seu comprimento difere da norma mais do que 3.92 mm. As componentes são vendidas em lotes de 1000 unidades, sendo o controlo dos lotes efectuado com recurso ao plano de amostragem simples, $n = 10$ e $c = 0$. Todos os lotes rejeitados são rectificadas a 100%.

- d) Sabendo que o risco do produtor decorrente deste plano de amostragem é de 5%, determine o valor fixado para o AQL.
- e) Sabendo que o risco do comprador decorrente deste plano de amostragem é de 15%, determine o valor fixado para o RQL (LTPD).
14. Num processo de branqueamento de papel, a cloração numa determinada torre de branqueamento é bem modelada pela

seguinte distribuição exponencial:

$$F(x; \lambda, \delta) = 1 - \exp(-(x - \lambda)/\delta), \quad x \geq \lambda.$$

Admita que pretendia unicamente controlar o parâmetro δ , de escala, recorrendo a uma carta de controlo FSI, baseada na estatística $W_n = \bar{X}_n$.

- a) Qual a distribuição de W_n , sob $H_0 : \delta = \delta_0$?
 - b) Como obter os limites de controlo, *LCI* e *LCS*, de uma carta- W_n , para testar $H_0 : \delta = \delta_0$ versus $H_1 : \delta = \theta\delta_0$, $\theta \neq 1$, com *ATS*(θ) máximo em $\theta = 1$?
15. Considere as seguintes médias e amplitudes amostrais, fornecidas pelos dados de 10 subgrupos racionais de dimensão 5, relativos ao comprimento de peças fabricadas em série:

Nº da amostra	\bar{X}	R	Nº da amostra	\bar{X}	R
1	0.837	0.010	6	0.833	0.011
2	0.832	0.009	7	0.834	0.009
3	0.832	0.008	8	0.834	0.003
4	0.834	0.004	9	0.831	0.002
5	0.835	0.005	10	0.835	0.006

- a) Admitindo a normalidade dos dados, construa uma carta \bar{X} e uma carta R para controlar os comprimentos das peças produzidas futuramente. Considere um risco- $\alpha=0.002$ associado a cada uma das cartas.
- b) Se o valor médio da característica da qualidade sofrer uma alteração de $\hat{\mu}_0$ para $\hat{\mu}_0 + \hat{\sigma}_0$, qual o risco- β associado à carta \bar{X} ?
- c) As médias de 15 amostras obtidas posteriormente foram as seguintes: 0.830, 0.831, 0.834, 0.835, 0.836, 0.830, 0.835, 0.836, 0.837, 0.836, 0.831, 0.830, 0.837, 0.836, 0.830.

Aceita a aleatoriedade destes valores com base num teste de *runs*? E com base no teste dos quadrados das diferenças consecutivas? (Em ambos os casos, considere a aproximação da distribuição da estatística de teste à distribuição Normal)

- d) Se representar estes dados na carta de controlo determinada em a), que conclui?

16. Considere as médias e amplitudes de 20 amostras de dimensão 5 de comprimentos de suportes:

Grupo	\bar{X}	R	Grupo	\bar{X}	R
1	.8372	.010	11	.8380	.006
2	.8324	.009	12	.8322	.002
3	.8318	.008	13	.8356	.013
4	.8344	.004	14	.8322	.005
5	.8346	.005	15	.8304	.008
6	.8332	.011	16	.8372	.011
7	.8340	.009	17	.8282	.006
8	.8344	.003	18	.8346	.005
9	.8308	.002	19	.8360	.004
10	.8350	.006	20	.8374	.006

A partir dos dados, construa uma carta- \bar{X} e uma carta- R para controlar os comprimentos das peças produzidas futuramente. Admita uma distribuição Normal para caracterizar o comprimento dos suportes.

17. Considere um plano de amostragem simples caracterizado pelos parâmetros $n = 50$ e $c = 1$, para lotes de dimensão 5000.

- a) Compare as curvas características operacionais, tipo-A e tipo-B, associadas a este plano, indicando a que lhe parece mais adequada.

- b) Calcule a curva AOQ, e determine o limite da qualidade média à saída, AOQL.
- c) Determine a função ATI.
18. Uma característica de qualidade X deve ser controlada de acordo com um modelo Gumbel,

$$\Lambda(x; \lambda, \delta) = \exp(-\exp(-(x - \lambda)/\delta)),$$

com normas de localização e dispersão fixas em λ_0 e δ_0 , respectivamente. Diga como deverão ser escolhidos os limites de controlo numa carta de máximos/mínimos, de modo a ser máximo o $ATS(\theta)$ em $\theta = 0$, ao testar $H_0 : \lambda = \lambda_0, \delta = \delta_0$ versus $H_1 : \lambda = \lambda_0 + \theta, \delta = \delta_0$.

19. Usando os dados a seguir apresentados, do número de não conformes em 200 componentes recolhidas diariamente ao longo de 28 dias, construa uma carta- p para controlar a produção do mês seguinte. Admita que foram encontradas as causas que provocaram as marcações que caíram fora dos limites de controlo.

Dia	1	2	3	4	5	6	7
Nº não conf.	6	6	5	6	5	0	0
Dia	8	9	10	11	12	13	14
Nº não conf.	6	6	14	4	0	1	8
Dia	15	16	17	18	19	20	21
Nº não conf.	2	0	4	7	1	3	1
Dia	22	23	24	25	26	27	28
Nº não conf.	4	1	0	4	15	4	1

Trace a curva característica para esta carta de controlo.

20. Considere os dados seguintes, do número de não conformidades encontradas numa inspeção de rádios, durante um certo período de operação (6 rádios = 1 unidade de inspeção):

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº não conf.	70	64	81	105	40	62	53	48	82
Período	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nº não conf.	90	110	54	88	40	21	56	91	70
Período	19	20	21	22	23	24	25		
Nº não conf.	65	50	28	24	60	75	25		

- a) A partir destes dados construa uma carta- c para ser usada no período seguinte. Admita que foram encontradas as causas que provocaram as marcações que caíram fora dos limites de controlo.
- b) O número de não conformes por unidade de inspecção durante o período seguinte foi:

Período	26	27	28	29	30	31	32
Nº não conf.	35	14	21	33	40	63	62
Período	33	34	35	36	37	38	39
Nº não conf.	55	65	70	45	38	38	49
Período	40	41	42	43	44	45	46
Nº não conf.	37	51	54	45	33	41	57
Período	47	48	49	50			
Nº não conf.	50	63	48	49			

Trace estes dados na carta de controlo obtida em a). Indique quais os pontos que caíram fora dos limites de controlo. Recomendaria revisão da carta de controlo?

21. No controlo de determinada característica de qualidade estável é necessário conhecer as probabilidades de que pelo menos uma fração p da população seja coberta pelos intervalos seguintes: $(X_{1:n}, +\infty)$, $(-\infty, X_{n:n})$ e $(X_{1:n}, X_{n:n})$.
- a) Obtenha as probabilidades referidas anteriormente.
- b) Indique qual o valor de p a que está associada uma probabilidade máxima de cobertura pelo intervalo $(X_{1:n}, X_{n:n})$.

22. Será que uma mudança na dispersão de uma característica de qualidade, sem alteração na média, vai fazer com que não só a carta- R , mas também a carta \bar{X} saiam fora de controlo? Justifique convenientemente a sua resposta.
23. Para controlar a proporção p de não conformes num processo de produção decidimos usar uma carta 3-sigma com uma norma p_0 fixada em 0.2, sendo n a dimensão das amostras a recolher em instantes fixos de tempo.
- Quais os valores de n que permitem obter um limite de controlo inferior positivo?
 - Quais os valores de n que permitem que seja superior a 0.6 a probabilidade de detecção imediata de um deslocamento de p para 0.26?
24. Uma característica de qualidade contínua X é bem modelada por um modelo Pareto, com função de distribuição

$$P_\theta(x) = 1 - x^{-\theta}, \quad x \geq 1, \quad \theta > 0.$$

- Sugira dois estimadores para θ , baseados numa amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) .
 - Como estabeleceria uma carta de controlo de máximos e mínimos para controlar o processo de produção associado?
 - Se estivesse a trabalhar com a característica $Y = \ln X$, como estabeleceria uma carta de amplitudes para Y ?
25. Uma característica de qualidade X é bem modelada por um modelo com f.d.p.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} x^{2/\theta-1} & \text{se } 0 < x < 1 \quad (\theta > 0) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja (X_1, \dots, X_n) um subgrupo racional de réplicas i.i.d. dessa característica de qualidade, e seja $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$ a amostra de estatísticas ordinais ascendentes associada.

- a) Obtenha uma representação em distribuição para $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, em termos de variáveis aleatórias exponenciais unitárias i.i.d..
- b) Diga como pode estimar o parâmetro desconhecido θ , caso tenha acesso exclusivo a médias de k subgrupos racionais, i.e., a $(\bar{X}_n^j, 1 \leq j \leq k)$.
- c) Mostre que a v.a. $Y = -2 \ln X$ tem distribuição exponencial. Se estivesse a trabalhar com a característica transformada $Y = -2 \ln X$, como estabeleceria uma carta de amplitudes para Y ?
26. Uma característica de qualidade X é bem modelada por um modelo com f.d.p.

$$f_{\beta}(x) = \begin{cases} \beta x^{\beta-1} e^{-x^{\beta}} & \text{se } x \geq 0 \quad (\beta > 0) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja (X_1, \dots, X_n) um subgrupo racional de réplicas i.i.d. dessa característica de qualidade, e seja $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$ a amostra de estatísticas ordinais ascendentes associada.

- a) Obtenha uma representação em distribuição para $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, em termos de variáveis aleatórias Pareto unitárias i.i.d., com f.d. $F(y) = 1 - 1/y$, $y \geq 1$.
- b) Diga como pode estimar o parâmetro desconhecido β , caso tenha acesso exclusivo às médias de k subgrupos racionais.
- c) Diga como construiria uma carta de amplitudes para o controlo desta característica de qualidade.
- d) Que dimensão n dos subgrupos racionais lhe permite fazer a seguinte afirmação: a probabilidade de o intervalo $(-\infty, X_{2:n})$ cobrir o quantil de probabilidade 1/4 é superior a 70%.

27. Considere uma característica de qualidade bem modelada por uma distribuição com f.d.p.

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi} (1 + (x - \theta)^2)^{-1}, \quad x, \theta \in \mathbb{R},$$

com θ parâmetro desconhecido. Admita que se recolheram observações (X_1, \dots, X_n) dessa característica de qualidade. Designe por $X_{i:n}$, a i -ésima estatística ordinal ascendente associada a essa amostra, $1 \leq i \leq n$.

- Mostre que $\mathbb{E}(\text{atan}(X_{n:n} - \theta)) = \frac{\pi(n-1)}{2(n+1)}$.
 - Exprima $X_{i:n}$ à custa de variáveis aleatórias exponenciais independentes e unitárias.
 - Como estabeleceria uma carta de controlo de mínimos/máximos para controlar o processo de produção associado.
28. Uma característica de qualidade X é bem modelada por um modelo

$$F(x; \sigma) = 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right), \quad x \geq \mu, \quad \sigma > 0, \quad \mu \geq 0.$$

A política de inspeção é *FSI* e os subgrupos racionais têm dimensão n , recolhendo-se em cada instante de inspeção uma amostra i.i.d., (X_1, \dots, X_n) , da referida característica de qualidade. Designe-se por $X_{i:n}$ a i -ésima estatística ordinal ascendente associada à referida amostra.

- Exprima $X_{i:n}$ à custa de Uniformes independentes.
- Diga como estabeleceria uma carta M/m para controlar o referido processo, recorrendo à distribuição conjunta do Mínimo/Máximo.
- Qual o valor de n que lhe permite garantir que $\mathbb{P}(X_{1:n} < \chi_{1/4} < X_{n:n}) \geq 0.9$?
- Admita $n = 2$ e $\mu = 0$.

- d1) Mostre que a distribuição da amplitude em modelo reduzido coincide com a distribuição do módulo de uma variável aleatória Logística *standardizada*.
- d2) Admitindo σ desconhecido, diga como estimaria este parâmetro.
- d3) Diga qual a forma correcta de estabelecer uma carta de amplitudes para controlar a variabilidade do processo de produção.
- e) Considere n genérico e $\sigma = 1$, e admita que pretendia unicamente controlar o parâmetro μ , recorrendo a uma carta de controlo *FSI*, baseada na estatística

$$W_n = \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{X_i} \right).$$

- e1) Mostre que W_n é estimador de máxima verosimilhança de μ .
- e2) Escreva o sistema de duas equações a duas incógnitas que lhe permite obter os limites de controlo, *LCI* e *LCS*, de uma carta- W_n , para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu = \mu_0 + \theta$, $\theta \neq 0$, com *ATS*(θ) máximo em $\theta = 0$.
29. Uma característica de qualidade contínua é bem modelada por um modelo Beta(2, 1), com f.d.p

$$f(x; \theta) = 2x/\theta^2, \quad 0 \leq x \leq \theta,$$

com θ parâmetro desconhecido. Admita que se recolheram observações (X_1, \dots, X_n) dessa característica de qualidade. Designe por $X_{i:n}$, a i -ésima estatística ordinal ascendente associada a essa amostra, $1 \leq i \leq n$.

- a) Diga como procederia para a estimação do parâmetro desconhecido θ .
- b) Recorrendo à transformação uniformizante, obtenha $\mathbb{E}(X_{n:n})$ e $\mathbb{V}ar(X_{n:n})$.

- c) Exprima $X_{i:n}$ à custa de variáveis aleatórias exponenciais independentes e unitárias.
- d) Como estabeleceria uma carta de controlo de mínimos/máximos para controlar o processo de produção associado.
- e) Como estabeleceria uma carta de amplitudes para controlar a variabilidade do processo de produção.
30. Para controlar a variabilidade de uma certa característica de qualidade, X , com distribuição Gumbel,

$$F(x; \lambda, \delta) = \exp(-\exp(-(x - \lambda)/\delta)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad \delta > 0,$$

pretendemos usar cartas de controlo de máximos/mínimos. Recolheram-se, para 10 amostras de dimensão $n = 5$, as médias, os mínimos e os máximos, $(\bar{x}_n^{(j)}, x_{1:n}^{(j)}, x_{n:n}^{(j)})$, $1 \leq j \leq 10$, obtendo-se os seguintes resultados:

Nº da amostra	\bar{X}	$X_{1:n}$	$X_{n:n}$
1	10.08	9.8	10.4
2	10.42	9.9	11.0
3	10.14	9.6	10.7
4	10.14	9.9	10.5
5	9.98	9.7	10.2
6	10.04	9.7	10.4
7	10.56	10.5	10.7
8	9.86	9.6	10.1
9	10.06	9.7	10.3
10	10.30	10.0	10.9

- a) Com base nos dados observados proceda à estimação dos parâmetros desconhecidos, λ e δ .

Nota: Recorde que a constante de Euler é $\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^{+\infty} \ln te^{-t} dt = 0.5772$.

Caso necessário, e só se não conseguir efectuar todos

os cálculos, recorra ao facto de se ter, com a notação usual, $\mathbb{E}(Y_{1:5}) = -0.6991$ e $\mathbb{E}(Y_{5:5}) = 2.1867$, para Y v.a. Gumbel *standardizada*.

- b) Quais são os limites de controlo que sugere para a carta de máximos/mínimos?
 - c) Designando por $\xi_{1/2}$ a mediana de X , qual o menor valor de n tal que $(X_{1:n}, X_{n:n})$ contém $\xi_{1/2}$ com probabilidade superior a 0.95?
 - d) Refaça a alínea anterior para o intervalo $(X_{2:n}, X_{n-1:n})$.
31. Quais as possíveis dimensões n , da amostra a recolher, que lhe permitem que $(x_{1:n}, +\infty)$ seja um intervalo de tolerância a 95% para uma percentagem 99% da população?
 32. Calcule o nível de confiança de um intervalo de tolerância para uma percentagem $100 \times p\%$ da população, do tipo $(-\infty, x_{n-1:n})$.
 33. Ao testar a aleatoriedade de 50 pontos marcados numa carta de controlo *versus* uma tendência crescente desses pontos, utilizou-se a estatística de *runs* acima da mediana empírica, tendo-se obtido 3 *runs* positivos. Para que níveis de significância seríamos levados à rejeição da hipótese de aleatoriedade?
 34. Derive os limites de controlo a usar em cartas de mínimo/máximo e de amplitudes associadas a uma característica de qualidade Exponencial(λ, δ), com f.d.p. $f(x) = \frac{1}{\delta} \exp(-\frac{x-\lambda}{\delta})$, $x \geq \lambda$, $\delta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e parâmetros desconhecidos, sabendo que tem acesso a informação condensada, constituída por k mínimos e k máximos de amostras de dimensão n , em situação de controlo estatístico.
 35. Ao testar a aleatoriedade de 20 pontos marcados numa carta de controlo *versus* uma tendência crescente (ou decrescente) desses pontos, utilizou-se a estatística de teste W associada

ao teste da média dos quadrados das diferenças sucessivas, tendo sido 0.7 o valor observado de W . Para que níveis de significância seríamos levados à rejeição da hipótese de aleatoriedade?

36. Para controlar uma certa característica de qualidade pretendemos usar cartas de controlo de somas e de amplitudes. Recolheram-se para amostras de dimensão 7, os seguintes resultados:

Amostra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\bar{x}	103	101	104	103	104	106	102	107	106	104
R	4	5	2	11	4	3	7	2	4	3

- a) Admitindo a normalidade da característica de qualidade, estime o desvio padrão do processo de produção.
- b) Quais são os limites de tolerância 3-sigma do processo?
- c) Quais as linhas centrais e limites de controlo que aconselharia para controlar a produção futura?
- d) Se a característica de qualidade fosse exponencial, como resolveria a alínea c)?
37. Considere k amostras de dimensão n , $(X_1^j, X_2^j, \dots, X_n^j)$, $1 \leq j \leq k$, de observações i.i.d. de uma característica de qualidade com f.d. contínua $F(x) = 1 - e^{-(x-\lambda)/\delta}$, $x \geq \lambda$, $\delta > 0$. Sejam $X_{1:n}^j \leq X_{2:n}^j \leq \dots \leq X_{n:n}^j$, $1 \leq j \leq k$, as estatísticas ordinais crescentes associadas a essa amostra e designemos genericamente por $\mu_{i:n} = \mathbb{E}(X_{i:n})$, $1 \leq i \leq n$, para qualquer j , $1 \leq j \leq k$.

- a) Como estimaria os parâmetros λ e δ ?
- b) Como estabeleceria uma carta de controlo de máximos/mínimos para controlo da produção?

- c) Exprima, para um $F(x)$ genérico, $\mu_{i:n}, 1 \leq i \leq n$, em termos de $\mu_{j:j}, i \leq j \leq n$. Comprove a validade do resultado obtido para o modelo exponencial.
- d) Mostre que $Y_n = F(X_{n:n}) - F(X_{1:n})$ é, em distribuição, equivalente à amplitude $W_n = U_{n:n} - U_{1:n}$ em modelo Uniforme(0, 1). Obtenha a função de distribuição de Y_n .
38. Qual o p -value associado a um valor observado $R = 20$ da estatística de *runs* acima e abaixo da mediana amostral, correspondente a uma amostra de dimensão $n = 67$?
39. Na monitorização de determinado processo de branqueamento de papel decidiu-se recolher ao longo do tempo, valores observados da estatística de controlo $W_n = \bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$, onde $X_i, 1 \leq i \leq n$ são observações independentes e identicamente distribuídas da característica de qualidade X , com distribuição $F(x; \lambda, \delta) = 1 - \exp(-(x - \lambda)/\delta), x \geq \lambda$.
- a) Qual a distribuição de W_n , sob a validade de $H_0 : \delta = \delta_0$?
- b) Como estabeleceria limites de controlo-3 sigma para esta estatística de controlo?
- c) Como estabeleceria limites de controlo para a estatística W_n , mas com base na distribuição de amostragem?
- d) Como estabeleceria uma carta de controlo M/m para controlar o processo de branqueamento?
40. Seja R_n o número total de *runs* acima e abaixo da mediana, em amostras de dimensão n .
- a) Calcule $\mathbb{P}(R_6 = z), z = 2, \dots, 6$, e comprove a tabela

z	2	3	4	5	6
$F_R(z)$	0.1	0.3	0.7	0.9	1.0

- b) Qual o nível de significância de um teste que rejeita a aleatoriedade quando ocorrerem menos de 3 *runs*?
41. As 30 observações seguintes foram recolhidas de uma tabela de números aleatórios:

15	77	01	64	69	69	58	40	81	16
60	20	00	84	22	28	26	46	66	36
86	66	17	34	49	85	40	51	40	10

- a) Aceita a aleatoriedade destes números com base no teste dos *runs* acima e abaixo da mediana?
- b) E com base no teste de *runs* dos sinais das diferenças entre observações consecutivas?
- c) E com base no teste da média dos quadrados de diferenças consecutivas?
42. De um processo de enchimento de latas de uma bebida não alcoólica, em cl, obtiveram-se os dados que se seguem, relativos à média e amplitude de 20 subgrupos racionais de dimensão 5 associados ao conteúdo, \bar{X} , de 100 latas dessa bebida.

Subgrupo	\bar{X}	R	Subgrupo	\bar{X}	R
1	34.296	2.762	11	32.651	1.347
2	33.010	4.399	12	31.942	2.290
3	33.647	3.014	13	32.433	6.946
4	32.423	2.035	14	34.648	3.112
5	33.198	4.265	15	32.889	7.913
6	32.280	2.140	16	32.971	4.255
7	33.474	5.405	17	33.651	6.314
8	32.643	3.723	18	33.519	6.429
9	33.406	3.266	19	33.265	4.624
10	32.224	4.613	20	32.728	5.401

Admita que X é uma variável com distribuição Normal.

- a) Se os limites de especificação são fixados em 32 ± 7 , qual a percentagem esperada de latas não conformes.
- b) Calcule os índices de capacidade C_p e C_{pm} , e interprete os valores obtidos.
- c) Para que valor se deve ajustar a média do processo, para que a fracção de latas não conformes seja mínima. E qual seria esse valor mínimo?
43. Os dados que se seguem dizem respeito à tensão de ruptura, em kg, de 30 cabos eléctricos retirados ao longo do dia da produção de uma Empresa, para monitorização. Considere que a tensão de ruptura X dos cabos eléctricos do tipo dos que estão a ser monitorizados, é bem modelada por uma distribuição Normal, de valor médio 2400kg e desvio padrão 150Kg.

Cabo	X	Cabo	X	Cabo	X
1	2428.9	11	2186.5	21	2650.0
2	2519.0	12	2318.9	22	2447.6
3	2284.3	13	2634.2	23	2358.4
4	2466.4	14	2533.3	24	2187.0
5	2283.6	15	2438.0	25	2416.0
6	2450.8	16	2364.9	26	2532.6
7	2183.0	17	2489.7	27	2523.5
8	2446.9	18	2499.1	28	2490.5
9	2422.1	19	2357.8	29	2712.4
10	2478.1	20	2552.3	30	2528.8

Represente estes dados nas seguintes cartas de controlo FSI, implementadas para valores individuais, com limites de controlo 3-sigma: carta de shewhart, carta CUSUM e carta EWMA com parâmetro $\lambda = 0.2$. Comente os resultados obtidos.

44. Numa grande Empresa industrial, o recém-contratado director fabril resolveu, logo após a sua chegada, instalar um

sistema de Controlo Estatístico da Qualidade. A Empresa fabrica em série cabos metálicos, sendo relevante a respectiva tensão de ruptura, em Kg, a qual se admite ter distribuição Normal. Sob controlo, as normas para o valor médio e para o desvio padrão da tensão de ruptura de um cabo, são $\mu_0 = 70$ kg e $\sigma_0 = \sqrt{5}$ kg, respectivamente. Para o controlo da produção o director decidiu recolher amostras de 5 cabos cada ao longo do dia, retiradas desde o início da produção, de 15 em 15 minutos.

Num determinado dia, em que se efectuou uma alteração no sistema de medida, já programada há muito tempo, registaram-se os valores das médias amostrais correspondentes às 20 primeiras amostras retiradas da produção antes da alteração, assim como os valores das médias amostrais das últimas 10 amostras retiradas nesse dia após a alteração, os quais apresentamos na tabela que se segue:

Nº da amostra	Média amostral	Nº da amostra	Média amostral
1	68.86	16	67.93
2	71.49	17	69.05
3	68.59	18	71.88
4	68.69	19	68.91
5	71.76	20	69.02
6	70.69	21	72.73
7	69.14	22	72.42
8	71.91	23	71.33
9	68.50	24	70.43
10	69.24	25	71.97
11	69.36	26	69.59
12	69.84	27	70.79
13	71.17	28	69.58
14	69.94	29	71.60
15	70.99	30	72.83

No dia seguinte, ao olhar para estes dados, o director sus-

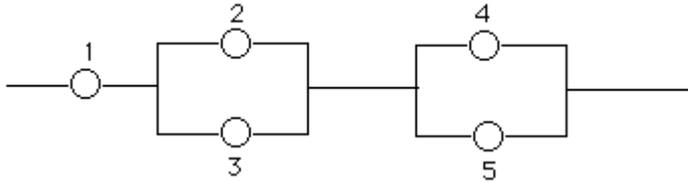
peita que após a alteração no sistema de medida o valor médio do processo aumentou, apesar de nada indicar ter havido alteração na variabilidade do processo. Para esclarecer a sua suspeita, resolveu então construir algumas cartas de controlo que tinha estudado na licenciatura, na disciplina de Controlo Estatístico da Qualidade. Por uma questão de simplificação, resolveu *standardizar* os dados de que dispunha, i.e., em vez de considerar os valores \bar{X}_i , considerou para a sua análise, os valores *standardizados*, $\bar{Y}_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$.

- a) Em primeiro lugar, começou por representar os dados na carta mais simples que tinha estudado: carta de médias FSI, com limites de controlo 3-sigma, calculados à custa das normas do processo sob controlo. Que conclusões pode retirar?
 - b) Em seguida, lembrou-se que as cartas CUSUM são mais eficientes do que as cartas de Shewhart na detecção de pequenas alterações no valor médio do processo. Então decidiu representar graficamente os valores das somas cumulativas $S_t = \sum_{i=1}^t \bar{Y}_i$. Que conclusões pode retirar?
 - c) Considerou ainda dois planos de decisão intervalar simétricos, de parâmetros $h = 3.8$ e $k = 0.75$, um deles implementado com o procedimento FIR e *head-starts* usuais, e outro sem FIR. Terá chegado exactamente às mesmas conclusões? Comente os resultados obtidos.
 - d) Finalmente lembrou-se de representar os seus dados \bar{Y}_i numa carta EWMA, com $\lambda = 0.2$. A que conclusões chegou? Compare estes resultados com os anteriormente obtidos.
45. O peso (em kg) de um artigo fabricado em série está associado a uma variável com distribuição Normal. O intervalo de tolerância usual para o peso deste tipo de artigo é o seguinte: [4.82,5.18].

- a) Se os limites de especificação são 5.05 ± 0.2 , que conclusões pode retirar acerca da capacidade do processo?
- b) Numa embalagem de 50 artigos, qual o número esperado de itens que caem fora do intervalo de especificação?

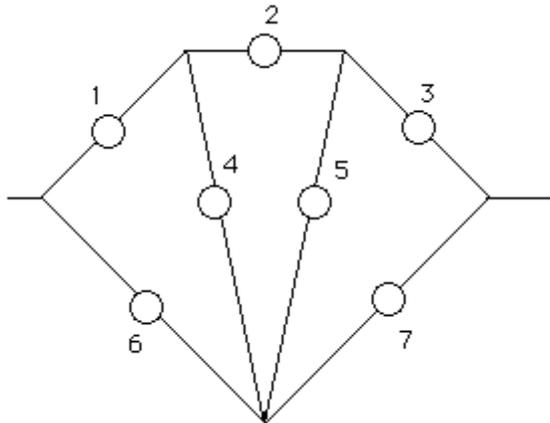
10.5 Estruturas e Fiabilidade

1. Considere a estrutura:



Seja p_i a probabilidade de funcionamento da i -ésima componente, $1 \leq i \leq 5$, e admitindo a independência das componentes, obtenha a fiabilidade da estrutura.

2. Represente a estrutura seguinte como uma estrutura em paralelo de componentes em série e uma estrutura em série de componentes em paralelo.



Qual a fiabilidade desta estrutura se for p a fiabilidade de cada uma das componentes independentes.

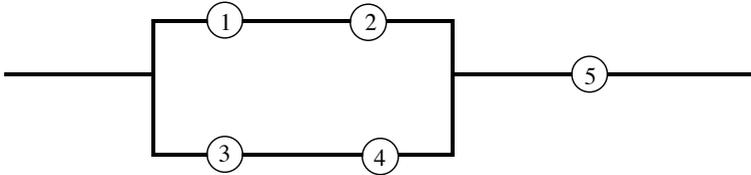
3. Admita que n componentes de um sistema têm tempos de vida exponenciais com taxas de avaria instantâneas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Calcule a fiabilidade e o tempo médio de vida do sistema, quando essas componentes são colocadas
 - a) em série.
 - b) em paralelo.
4. Considere uma estrutura em paralelo constituída por m circuitos em série, independentes, cada um com 3 componentes. Seja p a probabilidade de funcionamento de qualquer das componentes do circuito.
 - a) Quais os valores de m que permitem obter uma fiabilidade estática para a estrutura superior a 0.9?
 - b) Quais os valores de p que permitem que seja $m = 3$ o valor mínimo que permite garantir uma fiabilidade estática para a estrutura superior a 0.75?
 - c) Admita que o tempo de vida de cada uma das $n = 3m$ componentes é bem modelado por uma distribuição $F(t; \theta) = 1 - (t + 1)^{-\theta}$, $t \geq 0$, $\theta > 0$, tendo-se recolhido a amostra (T_1, T_2, \dots, T_n) a que está associada a amostra de estatísticas ordinais $(T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{n:n})$.
 - c1) Como estimaria θ ? Justifique convenientemente a sua resposta.
 - c2) Quando $m = 2$, qual a função de fiabilidade e o tempo médio de vida da estrutura?
5. Uma amostra com n unidades, com tempo de vida Exponencial de valor médio σ , é seleccionada aleatoriamente e testada até avaria total, tendo-se obtido os tempos de vida $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Designando por τ_r o tempo total de

duração do teste até à r -ésima avaria, e com $\lambda = 1/\sigma$, mostre que $2\lambda\tau_r$ tem a distribuição de um qui-quadrado com $2r$ graus de liberdade.

6. Admita que se colocam em teste n unidades independentes, com tempo de vida Exponencial de valor médio σ , e que se termina o teste (sem reposição) assim que se registam r avarias. Obtenha o estimador de máxima verosimilhança de $\lambda = 1/\sigma$, e mostre que não se trata de um estimador centrado de λ .
7. Considere uma estrutura em série de m circuitos em paralelo, cada um com 3 componentes. Seja p a probabilidade de funcionamento de cada uma das componentes.
 - a) Quais os valores de m que permitem uma fiabilidade estática para a estrutura superior a 0.90?
 - b) Quais são os valores de p que permitem que $m = 2$ seja o valor máximo de m que fornece uma fiabilidade estática para a estrutura superior a 0.8?
8. Considere n unidades electrónicas independentes com tempo de vida exponencial, com f.d.p. $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp(-x/\theta)$, $x > 0$, $\theta > 0$. Sejam (T_1, T_2, \dots, T_n) os tempos de vida dessas unidades.
 - a) Seja $Z = 1 - \exp(-T_{1:n}/\theta)$. Mostre que $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{n+1}$.
 - b) Admita que as n unidades foram colocadas em paralelo. Qual o tempo médio de vida desta estrutura em paralelo?
 - c) Mostre que a distribuição de amostragem da v.a. $Y_i = 1 - \exp(-X_{i:n}/\theta)$ é uma Beta($i, n - i + 1$), $1 \leq i \leq n$.
 - d) Mostre que $p_i = \mathbb{E}(Y_i) = \frac{i}{n+1}$ e $p_i^* = \text{Moda}(Y_i) = \frac{i-1}{n-1}$, $1 \leq i \leq n$.

- e) Com $\theta = 100$, horas admita que faz um teste de vida sem reposição e sujeito a censura no instante $T_0 = 120$ horas. Qual o número esperado de avarias?

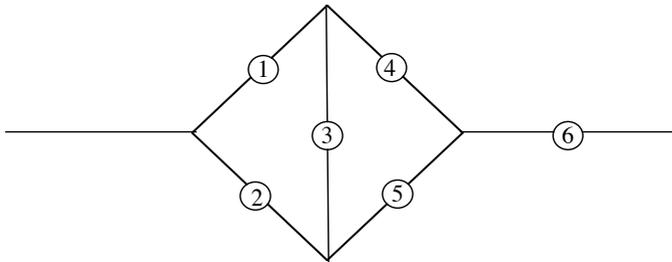
9. Considere a estrutura:



Admita que todas as componentes actuam independentemente umas das outras e têm tempos de vida com f.d.p

$$f(t) = \frac{1}{2\theta} \exp(-|t|/\theta), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta > 0.$$

- a) Calcule a fiabilidade da estrutura.
 b) Calcule o tempo médio de vida da estrutura.
10. Considere a estrutura:



Admita que todas as componentes actuam independentemente umas das outras e têm probabilidade p , conhecida, de funcionamento. Qual a fiabilidade da estrutura?

11. Considere n unidades electrónicas independentes, com tempo médio de vida 100 horas e f.d.p. $f(x) = \alpha x^{-\alpha-1}$, $x \geq 1$. Sejam (T_1, \dots, T_n) os tempos de vida dessas unidades.

- a) Como estimaria α com base nos n tempos de vida recolhidos?
- b) Trata-se de um modelo IFR ou DFR?
- c) Considere $Z = 1 - (T_{1:n})^{-\alpha}$ e mostre que $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{n+1}$.
- d) Admita que as n unidades foram colocadas em série. Qual o tempo médio de vida da estrutura em série?
- e) Admita que as n unidades foram colocadas em paralelo. Qual o tempo médio de vida e a fiabilidade da estrutura em paralelo?
12. Considere um sistema em série com s componentes i.i.d.. O tempo de vida de cada uma das componentes é bem modelado por uma distribuição Weibull(α, σ), com f.d. $W_{\alpha, \sigma}(t)$ definida em (8.16).
- a) Mostre que o tempo de vida do sistema é ainda Weibull, e identifique os parâmetros.
- b) Qual a taxa de mortalidade instantânea do sistema?
- c) Calcule a função de fiabilidade e a função de mortalidade cumulativa do sistema ao fim de 1 hora de funcionamento, quando $\sigma = 0.5$ e $\mu = 2.3$.
- d) Nas condições da alínea anterior, qual o valor de σ que permite que seja superior a 0.5 a fiabilidade do sistema ao fim de 1 hora?
13. Considere um sistema em paralelo com s componentes independentes. Mostre que:
- a) A função densidade de probabilidade desse sistema é

$$f_T(t) = F_T(t) \sum_{j=1}^s \frac{f_j(t)}{F_j(t)}.$$

b) A função de mortalidade instantânea do sistema é

$$h_T(t) = \frac{F_T(t)}{1 - F_T(t)} \sum_{j=1}^s \left(\frac{1 - F_j(t)}{F_j(t)} \right) h_j(t).$$

14. Admita que $n = 20$ componentes, com modelo de vida $G(t) = 1 - e^{-t^\beta}$, $t \geq 0$, $\beta > 0$ parâmetro desconhecido, são colocadas em experiência, tendo-se terminado o teste de vida ao fim de 2 semanas, com início às 8 horas de 2^a feira. As inspeções foram efectuadas às 18 horas de cada dia útil (de segunda a sexta). Na 5^a feira da 1^a semana detectou-se a 1^a avaria, na 6^a feira da 1^a semana detectaram-se 2 avarias, outras 2 avarias foram detectadas na 4^a feira da 2^a semana e 3 componentes foram retiradas da experiências na 5^a feira da 2^a semana; as restantes componentes estavam em funcionamento no instante de paragem da experiência (às 18 horas de 6^a feira).

- a) Escreva formalmente a função de verosimilhança.
- b) Indique como procederia à estimação do tempo médio de vida de qualquer uma dessas componentes.
- c) Caso tivesse recolhido a amostra completa, como estimaria β ?

15. Considere uma estrutura em paralelo com m circuitos em série, cada um com 3 componentes. Os tempos de vida das $3m$ componentes, T_1, T_2, \dots, T_{3m} , são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com modelo de vida $G(t)$, a que corresponde uma f.d.p. $g(t)$. Seja T o tempo de vida do circuito.

- a) Exprima o tempo de vida do circuito em termos de um máximo de variáveis aleatórias.
- b) Qual o número de cortes mínimos do circuito, e qual o modelo de vida desses cortes mínimos?

- c) Qual o modelo de vida $F(t)$ e a função de fiabilidade $R(t)$ do circuito?
 - d) Em situação estática, seja p a probabilidade de funcionamento de cada uma das componentes do circuito. Quais os valores de m que permitem uma fiabilidade estática da estrutura superior a 0.8?
 - e) Quais são os valores de p que permitem ser 3 o valor mínimo de m a fornecer uma estrutura com fiabilidade estática superior a 0.75?
16. Considere uma estrutura em série com k circuitos em paralelo, cada um com 2 componentes. Os tempos de vida das $2k$ componentes, T_1, T_2, \dots, T_{2k} , são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com modelo de vida $G(t)$, a que corresponde uma f.d.p. $g(t)$. Seja T o tempo de vida do circuito.
- a) Exprima o tempo de vida do circuito em termos de um mínimo de variáveis aleatórias.
 - b) Qual o número de caminhos mínimos do circuito, e qual o modelo de vida desses caminhos mínimos?
 - c) Qual o modelo de vida $F(t)$ e a função de fiabilidade $R(t)$ do circuito?
 - d) Em situação estática admita ser p a probabilidade de funcionamento de cada uma das componentes do circuito. Quais os valores de k que permitem uma fiabilidade estática para a estrutura superior a 0.8?
 - e) Quais são os valores de p que permitem ser 2 o valor máximo de k a fornecer uma fiabilidade estática para a estrutura superior a 0.75?
 - f) Admita em seguida que $n = 20$ componentes, com modelo de vida $G(t) = e^{-\sigma/t}$, $t \geq 0$, $\sigma > 0$ parâmetro desconhecido, são postas em experiência em $t = 0$, tendo-se terminado o teste de vida ao fim de três dias.

Dessas componentes, cinco avariaram-se ao fim de 5, 20, 30, 35 e 40 horas, respectivamente; três delas sabe-se terem tido um tempo de vida superior a 48 horas mas inferior a 60 horas; as restantes componentes estavam em funcionamento no instante de paragem da experiência.

- f1) Escreva formalmente a função de verosimilhança associada à experiência.
- f2) Indique como procederia à estimação do tempo médio de vida e da função de fiabilidade ao fim de 100 horas de qualquer uma dessas componentes.

17. Mostre que a taxa de mortalidade instantânea, $\mu(t)$, de um sistema em paralelo com duas componentes independentes com distribuições de vida,

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}, t \geq 0 \quad \text{e} \quad F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}, t \geq 0,$$

respectivamente, é crescente em $(0, t_0)$ e decrescente em $(0, +\infty)$, onde t_0 é função de λ_1 e de λ_2 . Mostre ainda que $\mu(t)$ é crescente em $(t_0, +\infty)$ sse $\lambda_1 = \lambda_2$.

18. O tempo de vida T , de determinado tipo de válvulas electrónicas, tem distribuição F , IFR.

- a) Considere a seguinte definição: Um modelo $F(\cdot)$ diz-se NBU, *new better than used*, se a sua função de fiabilidade, $R(t) = 1 - F(t)$, é tal que $R(t_1 + t_2) \leq R(t_1)R(t_2)$. Mostre que se um modelo é IFR então é NBU.
- b) Seja (T_1, T_2, \dots, T_n) uma amostra de tempos de vida de n válvulas independentes, e designemos por $T_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, a i -ésima estatística ordinal ascendente associada a essa amostra. Seja $h_{i:n}(t)$ a taxa de mortalidade instantânea associada a $T_{i:n}$ e $h(t)$ a taxa de mortalidade instantânea associada a T .

- b1) Mostre que $h_{i:n}(t) = \frac{\alpha h(t)}{\sum_{k=1}^{i-1} \beta_k \left(\frac{1}{F(t)} - 1 \right)^{i-1-k}}$, onde α e β_k são constantes. Identifique essas constantes.
- b2) Mostre que a ordenação preserva a propriedade IFR.

19. Foram testados 100 tubos electrónicos de um certo tipo, com tempo de vida Exponencial com valor médio σ , tendo-se registado os tempos de vida dos primeiros 15 tubos: 40, 60, 90, 120, 195, 260, 350, 420, 501, 620, 650, 730, 815, 910 e 980.

Estime σ e $R(t|\sigma)$ em $t=500$, admitindo que:

- a) a amostragem foi feita sem reposição;
 b) a amostragem foi feita com reposição;

Comente os resultados obtidos.

20. Foram colocadas em teste $n=40$ unidades exponenciais com distribuição de vida $F(t) = 1 - \exp(-t/\sigma)$, $t \geq 0$, tendo-se decidido efectuar uma amostragem sem reposição. O teste terminará quando o tempo acumulado de teste atingir as 5000 horas ou quando se avariarem 6 unidades num tempo total de teste inferior a 5000 horas. Seja K o número de instantes de avaria recolhidos.

- a) Mostre que W_i , o tempo total de teste até à i -ésima avaria, é igual em distribuição a $\sigma \text{Gama}(i)$, $1 \leq i \leq n$.
- b) Mostre que, para qualquer $t > 0$,

$$P[W_i < t, W_{i+1} > t] = e^{-t/\sigma} (t/\sigma)^i / i!, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

- c) Identifique a função de probabilidade da v.a. K .

- d) Admita que as primeiras 4 avarias ocorreram ao fim de 50, 65, 85 e 100 horas. Qual a verosimilhança da amostra recolhida, $L(\sigma; k, t_1, t_2, \dots, t_k)$? Como estimaria σ ?
21. Num teste de vida associado ao lançamento de uma nova componente de material isolador, usaram-se 11 componentes testadas a 30kV, tendo-se parado a experiência ao fim de 100 minutos, e registado os instantes de avaria: 7.74, 17.05, 20.46, 21.02, 22.66, 43.40, 47.30. As restantes 4 componentes não se avariaram.
- a) Trace os dados em papel exponencial, justificando o ajustamento através de um modelo Exponencial(θ).
- b) Admitindo o modelo de vida exponencial, obtenha $\hat{\theta}$ e o erro associado.
- c) Calcule um intervalo de confiança aproximado, a 95%, para o parâmetro θ .
- d) Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança para a função de fiabilidade ao fim de 30 minutos, fornecendo um intervalo de confiança adequado.
22. Num teste de vida, colocaram-se em experiência num instante inicial 10 ventoínhas com tempo de vida exponencial, de valor médio θ , desconhecido, tendo-se decidido parar a experiência ao fim de 100 dias. A informação recolhida foi a seguinte: uma das ventoínhas avariou-se no 12^o dia, uma outra avariou-se no 20^o dia, quatro das ventoínhas foram retiradas para venda no 80^o dia, e as restantes não se avariaram no decurso da experiência.
- a) Escreva a verosimilhança da amostra recolhida.
- b) Obtenha formalmente o estimador de máxima verosimilhança do tempo médio de vida e da função de fiabilidade das ventoínhas.

- c) Face à amostra efectivamente recolhida, obtenha a estimativa do tempo médio de vida dessas ventoinhas e da fiabilidade das ventoinhas ao fim de 200 dias.

10.6 Metodologia de Taguchi

1. Considere a função prejuízo $L(x) = (x - \mu_0)^2$. Qual o prejuízo esperado para um processo que está a operar no seu valor nominal μ_0 , com um desvio padrão de 2.5?
2. Numa Empresa existem dois processos alternativos de produção de um determinado produto. O processo A opera de acordo com a norma para o valor médio, $\mathbb{E}(X) = \mu_0 = 5$, e variância igual a 6; o processo B opera com uma variância igual a 4 e $\mathbb{E}(X) = 6$. Considerando a função prejuízo $L(x) = 2(x - \mu_0)^2$, qual o processo que acarreta maior prejuízo à empresa?

Bibliografia

- [1] Abramowitz, A. & I.A. Stegun (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover.
- [2] Adams, B.M. & W.H. Woodall (1989). An analysis of Taguchi's on-line process-control procedure under a random-walk model. *Technometrics* **31**, 401-413.
- [3] Ahmed, S.E. (2005). Assessing the process capability index for non-normal processes. *J. Statist. Planning and Inference* **129**, 1195-206.
- [4] Albers, W., W.C. Kallenberg & S. Nurdiati (2005). Exceedance probabilities for parametric control charts. *Statistics* **39**, 429-443.
- [5] Alloway, J.Jr. & M. Raghavachari (1991). Control charts based on the Hodges-Lehmann estimator. *J. Quality Technology* **23**, 336-347.
- [6] Amin, R.W. & S.J. Lee (1999). The effects of autocorrelation and outliers on two-sided tolerance limits. *J. Quality Technology* **31**, 286-300.
- [7] Amin, R.W., W. Schmid, & O. Frank (1997). The effects of autocorrelation on the R -chart and the S^2 -chart. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics* **59 B**, 229-255.
- [8] Amin, R.W., H. Wolff, W. Besenfelder & R.Jr. Baxley (1999). EWMA control charts for the smallest and largest observations. *J. Quality Technology* **31**, 189-206.
- [9] Antony, J., F. Jiju, M. Kumar & B.R. Cho (2007). Six sigma in service Organizations. Benefits, challenges and difficulties, common myths, empirical observations and success factors. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **24**, 294-311.

- [10] Antunes, C.P. (2009). *Avaliação do Impacto da Correlação em Sinais Erróneos de Esquemas Conjuntos para o Valor Esperado e a Variância*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- [11] Aparisi, F. & J.C. Garcia-Díaz (2004). Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted moving-average control charts using genetic algorithms. *Computers and Operations Research* **31**, 1437-1454.
- [12] Arnold, B., N. Balakrishna & H.N. Nagaraja (1992). *A First Course in Order Statistics*. John Wiley and Sons.
- [13] Austin, J. A., Jr. (1973). Control chart constants for largest and smallest in sampling from a normal distribution using the generalized Burr distribution. *Technometrics* **15**, 931-933.
- [14] Bai, D.S. & I.S. Choi (1995). EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. *J. Quality Technology* **27**, 120-131.
- [15] Balakrishnan, N. & S. Kocherlakota (1986). Effects of nonnormality on \bar{X} charts: single assignable cause model. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics* **48**, 439-444.
- [16] Bandulasiri, A. & S.M. Scariano (2009). The robustness of the three-way chart to non-normality. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* **38**, 441-453.
- [17] Barlow, R.E. & F. Proschan (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing — Probability Models*. John Wiley and Sons.
- [18] Barnard, G.A. (1959). Control charts and stochastic processes. *J. Royal Statist. Soc.* **B 21**, 239-257.
- [19] Barnett, V. (1975). Probability plotting methods and order statistics. *Applied Statistics* **24**, 95-108.
- [20] Bartholomew, D.J. (1957). A problem in life testing. *J. Amer. Statist. Assoc.* **52**, 350-355.
- [21] Bartholomew, D.J. (1963). The sampling distribution of an estimate arising in life testing. *Technometrics* **5**, 361-374.
- [22] Bauer, P. & P. Hackl (1980). An extension of the MOSUM technique for quality control. *Technometrics* **22**, 1-7.
- [23] Belavendram, N. (1995). *Quality by Design*. Prentice-Hall.

- [24] Benneyan, J.C., R.C. Lloyd, & P.E. Plsek (2003). Statistical process control as a tool for research and healthcare improvement. *Quality and Safety in Health Care* **12**, 458-464.
- [25] Bergman, B., J. Mare, T. Svensson & S. Loren (2009). *Robust Design Methodology for Reliability: Exploring the Effects of Variation and Uncertainty*. John Wiley and Sons.
- [26] Bischak, D.P. & D. Trietsch (2007). The rate of false signals in \bar{X} control charts with estimated limits. *J. Quality Technology* **39**, 54-65.
- [27] Blischke, W.R. & D.P. Murthy (2003). *Case Studies in Reliability and Maintenance*. John Wiley and Sons.
- [28] Borrór, C.M., Champ, C.W. & S.E. Rigdon (1998). Poisson EWMA control charts. *J. Quality Technology* **30**, 352-361.
- [29] Box, G.E.P. (1986). Signal-to-noise ratios, performance criteria, and transformations, *Technometrics* **30**, 1-40.
- [30] Braun, W.J. & D. Park (2008). Estimation of σ for individuals charts. *J. Quality Technology* **40**, 332-344.
- [31] Burdick, R.K., C.M. Borrór, & D.C. Montgomery (2003). A review of methods for measurement systems capability analysis. *J. Quality Technology* **35**, 342-354.
- [32] Burril, C.W. & J. Ledolter (1999). *Achieving Quality through Continual Improvement*. John Wiley and Sons.
- [33] Bury, K.V. (1975). *Statistical Models in Applied Science*. John Wiley and Sons.
- [34] Carlyle, W.M., D.C. Montgomery, & G.C. Runger (2000). Optimization problems and methods in quality control and improvement. *J. Quality Technology* **32**, 1-31.
- [35] Castagliola, P. (2001). An \bar{X}/R -EWMA control chart for monitoring the process sample median. *Int. J. of Reliability, Quality and Safety Engineering* **8**, 123-135.
- [36] Castagliola, P. & F. Tsung (2005). Autocorrelated SPC for non-normal situations. *Quality and Reliability Engineering Int.* **21**, 131-161.
- [37] Chakraborti, S. (2007). Run length distribution and percentiles. The Shewhart chart with unknown parameters. *J. Quality Engineering* **19**, 119-127.

- [38] Chakraborti, S., S. Eryilmaz & S.W. Human (2009). A phase II nonparametric control charts based on precedence statistics with runs-type signaling rules. *Computational Statistics and Data Analysis* **53**, 1054-1065.
- [39] Chambers, J.M., W.S. Cleveland, B. Kleiner & P.A. Tukey (1983). *Graphical Methods for Data Analysis*. Wadsworth.
- [40] Champ, C.W. & S.E. Rigdon (1997). An analysis of the run sum control chart. *J. Quality Technology* **29**, 407-417.
- [41] Chan, L.K., K.P. Hapuarachchi & B.D. Macpherson (1988). Robustness of \bar{X} and R charts. *IEEE Transactions on Reliability* **37**, 117-123.
- [42] Chan, L.K., D.B. Macpherson & P.H. Xiao (1996). Standardized p control charts for short runs. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **13**, 88-95.
- [43] Chan, L.-Y., J. Ouyang & H.Y.-K. Lau (2007). A two-stage cumulative quantity control chart for monitoring Poisson processes. *J. Quality Technology* **39**, 203-223.
- [44] Chang, T.C. & F.F. Gan (2007). Modified Shewhart charts for high yield processes. *J. Applied Statistics* **34**, 857-877.
- [45] Chang, Y.S. & D.S. Bai (2004). A multivariate T^2 control chart for skewed populations using weighted standard deviations. *Quality and Reliability Engineering Int.* **20**, 31-46.
- [46] Chen, G., S.W. Cheng & H. Xie (2001). Monitoring process mean and variability with one EWMA chart. *J. Quality Technology* **33**, 223-233.
- [47] Cleveland, W.S. (1993). *Visualizing Data*. Hobart Press.
- [48] Cleveland, W.S. (1994). *The Elements of Graphing Data*. Hobart Press.
- [49] Coory, M., S. Duckett & K. Sketcher-Baker (2007). Using control charts to monitor quality of hospital care with administrative data. *International Journal for Quality in Health Care* **20**, 31-39.
- [50] Costa, A.F. (1999). Joint \bar{X} and R charts with variable sample sizes and sampling intervals. *J. Quality Technology* **31**, 387-397.
- [51] Costa, A.F., E.K. Epprecht, & L.C. Carpinetti (2008). *Controle Estatístico de Qualidade*, 2ª edição. Editora Atlas.

- [52] Costa, A.F. & M.A. Rahim (2006). A synthetic control chart for monitoring the process mean and variance. *J. of Quality in Maintenance Engineering* **12**, 81-88.
- [53] Cox, M. & E.P. Iguzquiza (2001). The total median and its uncertainty. In Ciarlini *et al.* (eds.), *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology* **5**, 106-117.
- [54] Crosby, P.B. (1979). *Quality is Free*. MacGraw-Hill, New York.
- [55] Curkovic, S. & M. Pagell (1999). A critical examination of the ability of ISO 9000 certification to lead to a competitive advantage. *J. of Quality Management* **4**, 51-67.
- [56] David, H.A. (1981). *Order Statistics*. John Wiley and Sons.
- [57] David, H.A. & H.N. Nagaraja (2003). *Order Statistics*, 3rd edition, John Wiley and Sons.
- [58] Davis, C.M. & B.M. Adams (2005). Robust monitoring of contaminated data. *J. Quality Technology* **37**, 163-174.
- [59] Dean, A. and D. Voss (1999). *Design and Analysis of Experiments*. Springer-Verlag.
- [60] Deming, W.E. (1992). *Out of the Crisis*. MIT Center for Advanced Engineering Study.
- [61] Devroye, L. & L. Györfi (1985). *Nonparametric Density Estimation. The L_1 view*. John Wiley and Sons.
- [62] Dias, J.R. & P. Infante (2008). Control charts with predetermined sampling intervals. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **25**, 423-435.
- [63] Dodge, H.F. (1943). A sampling inspection plan for continuous production. *The Ann. Math. Statist.* **14**, 264-279.
- [64] Dodge, H.F. (1955a). Chain sampling inspection plan. *Industrial Quality Control* **11**, 10-13.
- [65] Dodge, H.F. (1955b). Skip-lot sampling plans. *Industrial Quality Control* **11**, 3-5.
- [66] Dodge, H.F. & H.G. Romig (1959). *Sampling Inspection Tables, Single and Double Sampling*, 2nd edition. John Wiley and Sons.
- [67] Dull, R.B. & D.P. Tegarden (2004). Using control charts to monitor financial reporting of public companies. *International Journal of Accounting Information Systems* **5**, 109-127.

- [68] Duncan A.J. (1986). *Quality Control and Industrial Statistics*, 5th edition. Irwin, Homewood, Illinois.
- [69] Dyer, J.N., B.M. Adams & M.D. Conerly (2003). The reverse moving average control chart for monitoring autocorrelated processes. *J. Quality Technology* **35**, 139-152.
- [70] Erto, P. & G. Pallotta (2007). A new control chart for Weibull technological processes. *Quality Technology and Quantitative Management* **34**, 553-567.
- [71] Ewan, W.D. & K.W. Kemp (1960). Sampling inspection of continuous processes with no autocorrelation between successive results. *Biometrika* **47**, 363-380.
- [72] Fang, Y. (2003). C -charts, X -charts, and the Katz family of distributions. *J. Quality Technology* **35**, 104-114.
- [73] Figueiredo, F. (1995). *Desenvolvimentos Recentes em Cartas de Controlo — Cartas CUSUM e Cartas EWMA*. Tese de Mestrado, DEIO, Faculdade de Ciências de Lisboa.
- [74] Figueiredo, F. (2003). *Controlo Estatístico da Qualidade e Cartas Robustas*. Tese de Doutoramento, DEIO, Faculdade de Ciências de Lisboa.
- [75] Figueiredo, F. & M.I. Gomes (2004). The total median in statistical quality control. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* **20**, 339-353.
- [76] Figueiredo, F. & M.I. Gomes (2006). Box-Cox transformations and robust control charts in SPC. In Pavese *et al.* (eds.), *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology* **7**, 35-46.
- [77] Figueiredo, F. & M.I. Gomes (2009). Monitoring industrial processes with robust control charts. *Revstat* **7**, 151-170.
- [78] Fuchs, C. & Y. Benjamini (1994). Multivariate profile charts for statistical process control. *Technometrics* **36**, 182-195.
- [79] Gan, F.F. (1995). Joint monitoring of process mean and variance using exponentially weighted moving average control charts. *Technometrics* **37**, 446-453.
- [80] Gao, Y. & L.-C. Tang (2005). The effect of correlation on chain sampling plans. *Quality and Reliability Engineering Int.* **21**, 51-61.
- [81] González, I. & I. Sánchez (2008). Principal alarms in multivariate statistical process control. *J. Quality Technology* **40**, 19-30.

- [82] Grant, E.L. & R.S. Leavenworth (1996). *Statistical Quality Control*, 7th edition. McGraw-Hill.
- [83] Grigg, N. & L. Walls (2006). The role of control charts in promoting organisational learning. New perspectives from a food industry study. *The TQM Magazine* **19**, 37-49.
- [84] Grimshaw, S.D., S.D. Shellman & A.M. Hurwitz (1998). Real-time process monitoring for changing inputs. *Technometrics* **40**, 283-296.
- [85] Hackl, P. & J. Ledolter (1991). A control chart based on ranks. *J. Quality Technology* **23**, 117-124.
- [86] Hahn, G.J. & N. Doganaksoy (2008). *The Role of Statistics in Business and Industry*. John Wiley and Sons.
- [87] Hahn, G.J. & R. Hoerl (1998). Key challenges for statisticians in business and industry. *Technometrics* **40**, 195-213.
- [88] Hart, B.I. (1942). Significance levels for the ratio of the mean square successive difference to the variance. *Ann. Math. Statist.* **13**, 445-447.
- [89] Hawkins, D.M., S. Choi & S. Lee (2007). A general multivariate exponentially weighted moving-average control chart. *J. Quality Technology* **39**, 118-125.
- [90] Hawkins, D.M. & D.H. Olwell (1998). *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. Springer-Verlag.
- [91] Hazen, A. (1914). Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal water supply. *Trans. Amer. Soc. Civil Engrs.* **77**, 1539-1659.
- [92] Hazen, A. (1930). *Flood Flows. A Study of Frequencies and Magnitudes*. John Wiley and Sons.
- [93] Hillier, F.S. (1964). \bar{X} chart control limits based on a small number of subgroups. *Industr. Qual. Contr.* **20**, 24-29.
- [94] Hillier, F.S. (1967). Small sample probability limits for the range chart. *J. Amer. Statist. Assoc.* **63**, 1488-93. Correction **63**, 1549-50.
- [95] Hoaglin, D.C., F. Mosteller & J.W. Tukey (1992). *Análise Exploratória de Dados. Técnicas Robustas — Um Guia* (Tradução de Dinis Pestana). Coleção Novas Tecnologias, Edições Salamandra.
- [96] Howell, J. M. (1949). Control chart for largest and smallest values. *Ann. Math. Statist.* **21**, 615-616.

- [97] Hunter, J.S. (1986). The exponentially weighted moving average. *J. Quality Technology* **8**, 1-12.
- [98] Huwang, L., A.B. Yeh & C.-H. Wu (2007). Monitoring multivariate process variability for individual observations. *J. Quality Technology* **39**, 258-278.
- [99] Infante, P. (2004). *Métodos de Amostragem em Controlo de Qualidade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Évora.
- [100] Ishikawa, K. (1982). *Guide to Quality Control*, 2nd edition. Asia Productivity Organization.
- [101] Ishikawa, S.B. & J.M. Jobe (1985). *What is Total Quality Control. The Japanese Way*. Prentice-Hall.
- [102] Jensen, W.A., L.A. Jones-Farmer, C.H. Champ & W.H. Woodall (2006). Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review. *J. Quality Technology* **38**, 349-364.
- [103] Jiang, W. (2004). Multivariate control charts for monitoring auto-correlated processes. *J. Quality Technology* **36**, 367-379.
- [104] Jiang, W., K.-L. Tsui & W.H. Woodall (2000). A new SPC monitoring method: the *ARMA* chart. *Technometrics* **42**, 399-410.
- [105] Johnson, D.G. (1984). Trial by computer – a case study of the use of simple statistical techniques in the detection of a fraud. *J. Operational Research Society* **35**, 811-820.
- [106] Johnson, N.L., W. Kemp & S. Kotz (2005). *Univariate Discrete Distributions*, 3rd edition. John Wiley and Sons.
- [107] Johnson, N.L., S. Kotz & N. Balakrishnan (1994). *Continuous Univariate Distributions*, Vol. 1, 2nd edition. John Wiley and Sons.
- [108] Johnson, N.L., S. Kotz & N. Balakrishnan (1995). *Continuous Univariate Distributions*, Vol. 2, 2nd edition. John Wiley and Sons.
- [109] Jones, L.A. (2002). The statistical design of EWMA control charts with estimated parameters. *J. Quality Technology* **34**, 277-288.
- [110] Jones, L.A., C.W. Champ & S.E. Rigdon (2004). The run length distribution of the CUSUM with estimated parameters. *J. Quality Technology* **36**, 95-108.
- [111] Jones, L.A. & W.H. Woodall (1998). The performance of bootstrap control charts. *J. Quality Technology* **30**, 362-375.
- [112] Juran, J.M. and F.M. Gryna (1993). *Quality Planning and Analysis*. MacGraw-Hill, New York.

- [113] Kackar, R.N. (1986). Taguchi's quality philosophy: analysis and commentary. *Quality Progress* **12**, 21-29.
- [114] Kang, C.W., M.S. Lee, Y.J. Seong & D.M. Hawkins (2007). A control chart for the coefficient of variation. *J. Quality Technology* **39**, 151-158.
- [115] Kemp, K.W. (1961). The average run-length of the cumulative sum chart when a *V-mask* is used. *J. Royal Statist. Soc.* **B 23**, 149-153.
- [116] Khadse, K.G. & R.L. Shinde (2009). Probability-based process capability indices. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* **38**, 884-904.
- [117] Khoo, M.B. (2004). A moving average control chart for monitoring the fraction non-conforming. *Quality and Reliability Engineering Int.* **20**, 617-635.
- [118] Khoo, M.B. & E.G. Lim (2005). An improved *R* (range) control chart for monitoring the process variance. *Quality and Reliability Engineering Int.* **21**, 43-50.
- [119] Kim, K., M.A. Mahmoud & W.H. Woodall (2003). On the monitoring of linear profiles. *J. Quality Technology* **35**, 317-328.
- [120] Klaassen, C.A. (2001). Credit in acceptance sampling on attributes. *Technometrics* **43**, 212-222.
- [121] Kolarik, W.J. (1995). *Creating Quality: Concepts, Systems, Strategies and Tools*. McGraw-Hill.
- [122] Lagrosen, S. & Y. Lagrosen (2006). A dive into the depths of quality management. *European Business Review* **18**, 84-96.
- [123] Langenberg, P. & B. Iglewicz (1986). Trimmed mean \bar{X} and *R* charts. *J. Quality Technology* **18**, 152-161.
- [124] Ledolter, J. & C.W. Burrill (1999). *Statistical Quality Control — Strategies and Tools for Continual Improvement*. John Wiley and Sons.
- [125] Lee, J.-M., C. Yoo & I.-B. Lee (2004). Statistical process monitoring with independent component analysis. *J. Process Control* **14**, 467-485.
- [126] Léon, R.V., A.C. Shoemaker & R.N. Kacker (1987). Performance measures independent of adjustment. An explanation and extension of Taguchi's signal-to-noise ratios (with discussion). *Technometrics* **29**, 253-285.

- [127] Liu, R.Y. (1995). Control charts for multivariate processes. *J. Amer. Statist. Assoc.* **90**, 1380-1387.
- [128] Liu, R.Y. & J. Tang (1996). Control charts for dependent and independent measurements based on bootstrap methods. *J. Amer. Statist. Assoc.* **91**, 1694-1700.
- [129] Lowry, C.A., W.H. Woodall, C.W. Champ & S.E. Rigdon (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics* **34**, 46-53.
- [130] Lu, C.-W. & M.Jr. Reynolds (1999). Control charts for monitoring the mean and the variance of autocorrelated processes. *J. Quality Technology* **31**, 259-274.
- [131] Lucas, J.M. & R.B. Croisier (1982). Fast initial response for CUSUM quality control schemes: properties and enhancements. *Technometrics* **32**, 1-29.
- [132] MacCarthy, B.L. & T. Wasusri (2002). A review of non-standard applications of statistical process control (SPC) charts. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **19**, 295-320.
- [133] MacGregor, J.F. & T. Kourti (1995). Statistical process control of multivariate processes. *Control Engineering Practice* **3**, 403-414.
- [134] McCool, J.I. & T. Joyner-Motley (1998). Control charts applicable when the fraction nonconforming is small. *J. Quality Technology* **30**, 240-247.
- [135] McFadden, K.L., G.N. Stock & C.R. Gowen III (2006). Implementation of patient safety initiatives in US Hospitals. *Int. J. of Operations and Production Management* **26**, 326-347.
- [136] Miles, M., L.S. Munilla & T. McClurg (1999). The impact of ISO 14000 environmental management standards on small and medium sized enterprises. *J. of Quality Management* **4**, 111-122.
- [137] Miranda, M.C. (1992). *Influência do Modelo em Cartas de Controle*. Tese de Mestrado, DEIO, Faculdade de Ciências de Lisboa.
- [138] Montgomery, D.C. (2004). *Introduction to Statistical Quality Control*, 5th edition. John Wiley and Sons.
- [139] Montgomery, D.C. (2008). *Statistical Quality Control: a Modern Introduction*, 6th edition. John Wiley and Sons.
- [140] Montgomery, D.C. (2009). *Design and Analysis of Experiments*, 7th edition. Arizona State University.

- [141] Mood, A.M. (1940). The distribution theory of runs. *Ann. Math. Statist.* **11**, 367-392.
- [142] Morais, M.C. (1995). *Cartas de Controlo FSI e VSI para o Parâmetro de Escala da População Weibull Tri-paramétrica*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- [143] Morais, M.C. (2002). *Stochastic Ordering in the Performance Analysis of Quality Control Schemes*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- [144] Morais, M.C. & I. Natário (1998). Improving an upper one-sided c -chart. *Communications in Statistics – Theory and Methods* **27**, 353-364.
- [145] Morais, M.C., Y. Okhrin, A. Pacheco & W. Schmid (2008). EWMA charts for multivariate output: some stochastic ordering results. *Communications in Statistics – Theory and Methods* **37**, 2653-2663.
- [146] Morais, M.C. & A. Pacheco (2004). A note on the ageing character of the run length of Markov-type quality control schemes. *J. of Applied Probability* **21**, 1243-1247.
- [147] Morais, M.C. & A. Pacheco (2006a). Combined CUSUM-Shewhart schemes for binomial data. *Economic Quality Control* **41**, 43-57.
- [148] Morais, M.C. & A. Pacheco (2006b). Assessing the impact of head starts in the performance of one-sided Markov-type control schemes. *Sequential Analysis* **25**, 405-420.
- [149] Morais, M.C. & A. Pacheco (2007). Shewhart schemes with variable sampling intervals revisited. *Sequential Analysis* **26**, 265-282.
- [150] Morton, A.P., M. Whitby, M. McLaws, A. Dobson, S. McElwain, D. Looke, J. Stackelroth & A. Sartor (2001). The application of statistical process control charts to the detection and monitoring of hospital-acquired infections. *J. Quality Clinical Practice* **21**, 112-117.
- [151] Nair, V. (2004). A report on the future of Statistics: comment. *Statistical Science* **19**, 412-413.
- [152] Nedumaran, G. & J. Pignatiello (2001). On estimating \bar{X} control limits. *J. Quality Technology* **33**, 206-212.

- [153] Noorossana, R., M. Farrokhi & A. Saghaei (2003). Using neural networks to detect and classify out-of-control signals in autocorrelated processes. *Quality and Reliability Engineering Int.* **19**, 493-504.
- [154] Ohta, H., E. Kusakawa & A. Rahim (2001). A $CCC - r$ chart for high-yield processes. *Quality and Reliability Engineering Int.* **17**, 439-446.
- [155] Ord, J.K. (1967). Graphical methods for a class of discrete distributions. *J. Royal Statistical Soc.* **A130**, 233-238.
- [156] Page, E.S. (1954). An improvement to Wald's approximation for some properties of sequential tests. *J. Royal Statist. Soc.* **B 16**, 136-139.
- [157] Pappanastos, E.A. & B.M. Adams (1996). Alternative designs of the Hodges-Lehmann control chart. *J. Quality Technology* **28**, 213-223.
- [158] Patnaik, P.B. (1950). The use of mean range as an estimator of variance in statistical tests. *Biometrika* **37**, 78-87.
- [159] Pearn, W.L., Y.C. Chang & C.-H. Wu (2006). Measuring process performance based on expected loss with asymmetric tolerances. *J. Applied Statistics* **33**, 1105-1120.
- [160] Pearson, E.S. & H.O. Hartley (1970). *Biometrika Tables for Statisticians*. Cambridge University Press.
- [161] Pestana, D.D. & S. Velosa (2008). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, 3ª edição. Fundação Calouste Gulbenkian.
- [162] Piplani, R. & N.F. Hubele (2001). Enhancement and evaluation of pattern recognition in control charts. *Int. J. of Quality and Reliability Management* **18**, 237-253.
- [163] Qiu, P. & D. Hawkins (2001). A rank-based multivariate CUSUM procedure. *Technometrics* **43**, 120-132.
- [164] Quesenberry, D.C. (1993). The effect of sample size on estimated limits for \bar{X} and X control charts. *J. Quality Technology* **25**, 237-247.
- [165] Ramalhoto, M.F. & M.C. Morais (1999). Shewhart control charts for the scale parameter of a Weibull control variable with fixed and variable sampling intervals. *J. of Applied Statistics* **26**, 129-160.

- [166] Rausand, M. & A. Hyland (2004). *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications*, 2nd edition. John Wiley and Sons.
- [167] Reese, C.S., P. Deininger, M.S. Hamada & R. Krabill (2008). Exploring the statistical advantages of nondestructive evaluation over destructive testing. *J. Quality Technology* **40**, 259-267.
- [168] Reiss, R.-D. (1989). *Approximate Distributions of Order Statistics*. Springer-Verlag.
- [169] Rényi, A. (1953). On the theory of order statistics. *Acta Math. Acad. Sc. Hung.* **4**, 191-231.
- [170] Reynolds, M.Jr. (1996). Shewhart and EWMA variable sampling interval control charts with sampling at fixed times. *J. Quality Technology* **28**, 199-212.
- [171] Reynolds, M.Jr., Amin, R.W., Arnold, J.C. & J.A. Nachlas (1988). \bar{X} charts with variable sampling intervals. *Technometrics* **30**, 181-192.
- [172] Reynolds, M.Jr. & Z.G. Stoumbos (1999). A CUSUM chart for monitoring a proportion when inspecting continuously. *J. Quality Technology* **31**, 87-108.
- [173] Reynolds, M.Jr. & Z.G. Stoumbos (2004). Should observations be grouped for effective process monitoring. *J. Quality Technology* **36**, 343-366.
- [174] Roberts, S.W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics* **1**, 239-250.
- [175] Rocke, D.M. (1992). \bar{X}_Q and R_Q charts: robust control charts. *The Statistician* **41**, 97-104.
- [176] Runger, G.C., R.R. Barton, E. Castillo & W.H. Woodall (2007). Optimal monitoring of multivariate data for fault patterns. *J. Quality Technology* **39**, 159-172.
- [177] Runger, G.C. & M.C. Testik (2004). Multivariate extensions to cumulative sum control charts. *Quality and Reliability Engineering Int.* **20**, 587-606.
- [178] Ryan, T.P. (2000). *Statistical Methods for Quality Improvement*. Wiley-Interscience.
- [179] Schilling, E.G. (1978). A lot sensitive sampling plan for compliance testing and acceptance inspection. *Journal of Quality Control* **10**:2, 47-51.

- [180] Schilling, E.G. & P.R. Nelson (1976). The effect of non-normality on the control limits of the \bar{X} charts. *J. Quality Technology* **8**, 183-188.
- [181] Schilling, E.G. & D.V. Neubauer (2009). *Acceptance Sampling in Quality Control*, 2nd edition, Chapman and Hall/CRC.
- [182] Seppala, T., H. Moskowitz, R. Plante & J. Tang (1995). Statistical process control via the subgroup bootstrap. *J. Quality Technology* **27**, 139-153.
- [183] Shore, H. (2004). Non-normal populations in quality applications: a revisited perspective. *Quality and Reliability Engineering Int.* **20**, 375-382.
- [184] Shu, L. & W. Jiang (2008). A new EWMA chart for monitoring process dispersion. *J. Quality Technology* **40**, 319-331.
- [185] Shu, L., W. Jiang & K.-L. Tsui (2008). A weighted CUSUM chart for detecting patterned mean shifts. *J. Quality Technology* **40**, 194-213.
- [186] Siddiqui, J. & Z. Rahman (2007). TQM principles' application on information systems for empirical goals. *The TQM Magazine* **19**, 76-87.
- [187] Sinha, S.K. (1986). *Reliability and Life Testing*. John Wiley and Sons.
- [188] Spiring, F., B. Leung, S. Cheng & A. Yeung (2003). A bibliography of process capability papers. *Quality and Reliability Engineering International* **19**, 445-460.
- [189] Steiner, S.H. (1999). EWMA control charts with time-varying control limits and fast initial response. *J. Quality Technology* **31**, 75-86.
- [190] Stoumbos, Z.G., M.Jr. Reynolds, T.P. Ryan & W.H. Woodall (2000). The state of statistical process control as we proceed into the 21st century. *J. Amer. Statist. Assoc.* **95**, 992-998.
- [191] Sullivan, J.H. & L.A. Jones (2002). A self-starting control chart for multivariate individual observations. *Technometrics* **44**, 24-33.
- [192] Swed, F.J. & C. Eisenhart (1943). Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives. *Ann. Math. Statist.* **14**, 66-87.
- [193] Swift, J.A. (1995). *Introduction to Modern Statistical Quality Control and Management*. St. Lucie Press.

- [194] Taguchi, G., E. Elsayed & T. Hsiang (1989). *Quality Engineering in Production Systems*. McGraw-Hill.
- [195] Tatum, L.G. (1997). Robust estimation of the process standard deviation for control charts. *Technometrics* **39**, 127-141.
- [196] Testik, M.C. & C.M. Borrór (2004). Design strategies for the multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Quality and Reliability Engineering Int.* **20**, 571-577.
- [197] Torng, C.-C. & P.-H. Lee (2009). The performance of double sampling \bar{X} control charts under non-normality. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* **38**, 541-557.
- [198] Torres, D.F. (1996). *Contribuição dos Métodos de Taguchi para o Controlo Estatístico de Qualidade*. Dissertação de Mestrado, ISEG, Universidade Técnica de Lisboa.
- [199] Tufte, E.R. (1983). *The Visual Display of Quantitative Information*. Graphics Press.
- [200] Tufte, E.R. (1990). *Envisioning Information*. Graphics Press.
- [201] Tukey, J. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Addison-Wesley.
- [202] Utley, J.S. & J.G. May (2009). Monitoring service quality with residuals control charts. *Managing Service Quality* **19**, 162-178.
- [203] Vardeman, S. & J.M. Jobe (1999). *Statistical Quality Assurance Methods for Engineers*. John Wiley and Sons.
- [204] Vargas, J.A. (2003). Robust estimation in multivariate control charts for individual observations. *J. Quality Technology* **35**, 367-376.
- [205] Vermaat, M.B., R.A. Ion, R.J. Does & C.A. Klaassen (2003). A comparison of Shewhart individuals control charts based on normal, non-parametric, and extreme-value theory. *Quality and Reliability Engineering Int.* **19**, 337-353.
- [206] Walley, P., K. Silvester & S. Mountford (2006). Health-care process improvement decisions: a systems perspective. *Int. J. of Health Care Quality Assurance* **19**, 93-104
- [207] Walpole, R.E. & R.H. Myers (1993). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 5th edition. Macmillan.
- [208] Wang, K. & F. Tsung (2008). An adaptive T^2 chart for monitoring dynamic systems. *J. Quality Technology* **40**, 109-123.

- [209] Weibull, W. (1939). The phenomenon of rupture in solids. *Ing. Vetenskaps. Aka. Handl.* (Stockholm) **153**, 17.
- [210] Wetherill, G.B. & D.W. Brown (1991). *Statistical Process Control — Theory and Practice*. Chapman and Hall.
- [211] Williams, R., B. Bertsch, B. Dale, T. Wiele, J. Iwaarden, M. Smith & R. Visser (2006). Quality and risk management: what are the key issues? *Quality and Risk Management* **18**, 67-86.
- [212] Winkel, P. & N.F. Zhang (2007). *Statistical Development of Quality in Medicine*. John Wiley and Sons.
- [213] Wolfowitz, J. & H. Levene (1944). The covariance matrix of runs up and down. *Ann. Math. Statist.* **15**, 58-69.
- [214] Woodall, W.H. (2000). Controversies and contradictions in statistical process control. *J. Quality Technology* **32**, 341-378.
- [215] Woodall, W.H. (2008). The use of control charts in health-care and public-health surveillance. *J. Quality Technology* **38**, 89-104.
- [216] Woodall, W.H. & D.C. Montgomery (1999). Research issues and ideas in statistical process control. *J. Quality Technology* **31**, 376-386.
- [217] Woodall, W.W., D.J. Spitzner, D.C. Montgomery & S. Gupta (2004). Using control charts to monitor process and product quality profiles. *J. Quality Technology* **36**, 309-320
- [218] Wu, Z. & J. Jiao (2007). Evaluating and improving the unit and group-runs chart. *J. Quality Technology* **39**, 355-363.
- [219] Wu, Z. & H. Luo (2004). Optimal design of the adaptive sample size and sampling interval np control chart. *Quality and Reliability Engineering Int.* **20**, 553-570.
- [220] Wu, Z. & Q. Wang (1996). Bootstrap control chart. *Quality Engineering* **9**, 143-150.
- [221] Wu, Z. & Q. Wang (2007). An np control chart using double inspections. *J. Applied Statistics* **34**, 843-855.
- [222] Xiang, L. & F. Tsung (2008). Statistical monitoring of multi-stage processes based on engineering models. *IIE Transactions* **40**, 957-970.
- [223] Yang, G. (2007). *Life Cycle Reliability Engineering*. John Wiley and Sons.

- [224] Yang, Z., M. Xie, V. Kuralmani & K.-L. Tsui (2002). On the performance of geometric charts with estimated control limits. *J. Quality Technology* **34**, 448-458.
- [225] Yoo, C.K., J.-M. Lee, P.A. Vanrolleghem & I.-B. Lee (2004). On-line monitoring of batch processes using multiway independent component analysis. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* **71**, 151-163.
- [226] Zhang, N.F. (1998). A statistical control chart for stationary process data. *Technometrics* **40**, 24-38.
- [227] Zou, C., C. Zhou, Z. Wang & F. Tsung (2007). A self-starting control chart for monitoring linear profiles. *J. Quality Technology* **39**, 364-375.

Índice

- AATS, tempo médio ajustado até sinal, 124
- acreditação ISO, 11, 12
- amostragem de aceitação , 141–168
- censurada, 156
 - contínua, CSP-1, 165, 166
 - de Dodge-Romig, 168
 - em cadeia, 164, 165
 - para alta qualidade, 167
 - para atributos, 146–158
 - para variáveis, 159–163
 - Skip-lot, 167
- amplitude , 29, 80–82
- definição, 29
 - densidade, 82
 - distribuição , 82, 97, 98, 134
 - em modelo exponencial, 97, 98
 - em modelo uniforme, 134
 - e estimação da escala, 80–82
 - valor médio, 81, 82
 - variância, 81
- análise de dados , 19–45, 71, 72
- confirmatória, 72
 - exploratória, 19, 32, 71
- análise de variância, 222
- ANSS *ou* ARL, número médio de amostras até sinal, 123, 124
- AOQ, qualidade média à saída, 151, 152, 157, 168
- AOQL, limite AOQ, 152, 153, 168
- AQL, nível aceitável de qualidade, 150, 156, 157, 159, 161, 162, 251
- arranjos ortogonais, 210, 219–224
- ASN, dimensão média de amostra, 155–158
- associação, 176, 177
- ATI, quantidade média de inspeção, 153, 157, 168
- ATS, tempo médio até sinal, 124
- binomial e estatísticas ordinais, 76, 77
- caixas-de-bigodes, 31, 32
- caminhos mínimos, 174, 175, 178
- capacidade do processo, 128, 214, 215
- características amostrais , 27–30
- de escala ou dispersão, 29
 - de forma, 30
 - de localização, 27, 28
 - de posição relativa, 30
- características de qualidade , 2–4, 8, 19, 21, 89, 92, 95, 118, 119, 127, 129
- definição, 2
- características populacionais , 19, 21, 48, 50, 51, 53, 55, 57,

- 59–64, 188, 192, 193
- modelo beta, 55
- modelo binomial, 62
- modelo binomial negativo, 64
- modelo exponencial, 188
- modelo Fréchet, 60
- modelo gama, 53, 193
- modelo gaussiano inverso, 57
- modelo geométrico, 64
- modelo Gumbel, 59
- modelo hipergeométrico, 63
- modelo logístico, 50
- modelo lognormal, 51
- modelo normal, 48
- modelo Poisson, 64
- modelo Weibull (de mínimos), 192
- modelo Weibull de máximos, 61
- cartas CUSUM , 107–114
 - ângulo da máscara, 110
 - braço da máscara, 110
 - construção da máscara, 110
 - FIR, 113, 114
 - máscara-V, 110
 - planos de decisão intervalar, 111–114
 - relações entre parâmetros, 110, 111
- cartas de controlo , 5, 8, 37, 38, 85–120
 - e testes de hipóteses, 89, 106
 - especiais , 91, 92, 103–120
 - batch, 117
 - bootstrap, 117, 118
 - CUSUM, 107–114
 - EWMA, 107, 114–116
 - M/m, max/min, 91, 104–106
 - MA, de médias móveis, 92, 106
 - MR, de amplitudes móveis, 92
 - multiple-stream, 117
 - multivariadas, 119, 120
 - não paramétricas, 117, 118
 - outras cartas, 118, 119
 - para perfis, 118
 - para processos autocorrelacionados, 106, 118, 120
 - short-runs, 117
 - para atributos , 91, 101–103
 - cartas-*c*, 91, 103
 - cartas-*np*, 91
 - cartas-*p*, 91, 102, 103
 - cartas-*u*, 91
 - para variáveis , 91, 92, 94–98, 106
 - cartas- \bar{X} , de médias, 91, 94, 95, 98
 - cartas-*R*, de amplitudes, 91, 94, 96–98
 - cartas-*S*, de desvio padrão, 91
 - Shewhart, 5, 8, 37, 38, 88–91, 94–96, 98–103
 - cartas EWMA (ou GMA) , 107, 114–116
 - FIR, 116
 - censura , 48, 171, 179–183, 200–208
 - de tipo I , 180, 204–208
 - com reposição, 207, 208
 - sem reposição, 205–207
 - de tipo II , 179–183, 200–204
 - com reposição, 202–204
 - sem reposição, 181–183, 200–204
 - censura (*curtailment*), 154, 156, 158
 - censura e estatísticas ordinais, 171,

- 180–183, 190, 200, 201
- ciclo de qualidade, 12, 13
- constantes em qualidade
- A_2 , 98, 100
 - A_3 , 105
 - D_1 , 98
 - D_2 , 98
 - D_3 , 96
 - D_4 , 96
 - $d_{2,n}$, 81, 82, 94–96
 - $d_{3,n}$, 96
 - $d_{4,n}$, 105
- cortes mínimos, 174, 175, 178
- curva característica operacional, CCO, 146–149, 157, 159, 161
- curva característica, CC ou $\beta(\cdot)$, 98, 99, 123
- curva-A, 147
- curva-B, 147
- dados censurados, 181–183, 200–208
- dados completos, 131, 198–200
- dados qualitativos, 21–25, 42, 43, 101–103
- dados quantitativos, 25–44, 94–98
- diagramas de caule-e-folhas, 34
- diagramas de causa-e-efeito ou de Ishikawa, 13, 16, 17
- diagramas de Pareto, 24, 25
- diagramas de pontos, 32
- efeitos principais, 222, 223
- envelhecimento estocástico, 185
- erros de inspeção, 168
- erros, análise de, 99–101
- estatística descritiva, 27, 30, 212
- estatísticas ordinais, 75–82, 170–183, 189–191, 200, 201, 203
- distribuição conjunta, 78
- distribuição individual, 76, 77
- e censura, 171, 180–183, 190, 200, 201
- e modelo binomial, 76, 77
- e tempo de vida de estruturas, 171–173, 175
- em fiabilidade, 170–183
- em modelo exponencial, 82, 200, 201
- em modelo uniforme, 82
- em populações normais, 80, 82
- em populações simétricas, 80
- momentos, 78–80
- relações de recorrência, 79, 80
- estatísticas sistemáticas, 82
- estimação de parâmetros em modelo
- beta, 69
 - binomial, 70
 - exponencial, 68, 198–200, 202
 - exponencial, censura de tipo I, com reposição, 207, 208
 - exponencial, censura de tipo I, sem reposição, 205–207
 - exponencial, censura de tipo II, com reposição, 202, 203
 - exponencial, censura de tipo II, sem reposição, 181–183, 200–202
 - extremal, 69
 - Fréchet, 70
 - gama, 67, 68
 - gaussiano inverso, 69
 - geométrico, 71
 - Gumbel, 69
 - logístico, 66
 - lognormal, 67
 - normal, 66

- Poisson, 71
- Weibull de máximos, 70
- estimadores de núcleo ou kernel, 72, 73
- estimadores UMVUE, 197–200, 202, 203, 206, 208
- estruturas ou sistemas , 171–178, 191, 192
- i*-de-*n*, 173
- caminhos mínimos em, 174, 175, 178
- coerentes, 174, 177, 178
- cortes mínimos em, 174, 175, 178
- decomposição de, 174–179
- em paralelo, 172–174, 176, 177, 277
- em série, 171, 173, 174, 176, 177, 191, 192
- gerais, 174–179
- factores de controlo, 211, 224
- factores de nivelamento, 211
- factores de ruído, 211, 212, 224
- factores de sinal, 211
- falta de memória, 97, 182, 187, 196
- fiabilidade , 169–190, 192–208
 - condicional, 184, 185
 - definição, 170
 - limites para a fiabilidade, 177, 179
 - mortalidade cumulativa e fiabilidade, 170, 184, 185
- FIR, procedimento de resposta rápida, 113, 114
- fluxogramas, 14, 16
- FSI, intervalos amostrais fixos, 120, 121, 123, 124
- FSS, dimensão de amostras fixa, 121
- função
 - beta completa, 55, 76
 - beta incompleta, 173
 - de distribuição empírica, 72
 - de estrutura, 170, 172, 174
 - de fiabilidade, 170, 171, 176, 177, 196, 202, 203, 208
 - de fiabilidade condicional, 184
 - de mortalidade cumulativa, 184
 - de mortalidade em banheira, 187
 - digama, 68, 69
 - gama completa, 52, 68, 76
 - inversa generalizada, 79, 105
 - prejuízo, 214–217, 219
- gestão e qualidade, 10, 84, 86, 225, 226
- gráfico de barras, 23, 24
- histograma, estimador do, 73
- histogramas, 35, 36, 88
- instantes de paragem, 204
- instrumentos de controlo , 13, 14, 16, 17, 24, 25, 32, 33, 37, 38, 85–118, 120
 - cartas de controlo, 37, 38, 85–120
 - diagramas de causa-e-efeito, 13, 16, 17
 - diagramas de Pareto, 24, 25
 - diagramas de pontos, 32, 33
 - fluxogramas, 14
 - organigramas, 14
- intervalos de previsão , 130–133
 - não-paramétricos, 132, 133
 - paramétricos, 131
- intervalos de tolerância , 43, 44, 130, 131, 133, 134

- não-paramétricos, 131, 133, 134
- paramétricos, 131
- ISO e Qualidade, 10–12, 144
- LC, linha central, 88, 89, 91
- LCI, limite de controlo inferior, 88, 90, 91, 95–98, 103–105, 115, 120, 121
- LCS, limite de controlo superior, 88, 90, 91, 95–98, 103–105, 115, 120, 121
- LEI, limite de especificação inferior, 128, 129, 160, 161
- LES, limite de especificação superior, 128, 129
- limites de , 30, 37, 88, 90, 92, 93, 98, 99, 103, 105, 115, 125, 128, 129
- confiança inferior para $C_{p,k}$, 129
- confiança para C_p , 128
- confiança para a capacidade do processo, 128
- controlo, 30, 37, 88, 90, 92, 93, 95, 96, 98, 99, 103, 105, 115, 125
- especificação, 128, 129, 160, 161
- tolerância, 43, 44, 130, 131, 133, 134
- vigilância, 30, 121
- lotes
- aceitação, 141–143
- rectificação, 141, 143, 150, 151, 157
- rejeição, 141–143
- LTPD ou RQL, nível rejeitável de qualidade, 150, 153, 161, 162, 167, 168
- LVI, limite de vigilância inferior, 121
- LVS, limite de vigilância superior, 121
- máxima verosimilhança, 66, 67, 69–71
- método de contagem das partes, 191
- medidas (ou índices) de capacidade , 127–130
- C_p , 128
- C_{pk} , 129
- C_{pm} , 129
- medidas de desempenho , 89, 90, 98, 123–127
- AATS, 124
- ANSS ou ARL, 123, 124
- ATS, 124
- NSS ou RL, 123
- risco- α , 89, 90, 98, 123, 129, 159, 161
- risco- β , 89
- risco- $\beta(\cdot)$ (ou CC), 123
- TS, 123
- modelos contínuos univariados
- beta, 54
- Erlang, 54
- exponencial, 54
- Fréchet, 59, 60
- gama, 52, 54
- gama generalizada, 54
- gaussiano inverso, 56
- Gumbel, 58, 59
- logístico, 50
- lognormal, 50
- normal, 48
- normal truncado, 49
- qui-quadrado, 54
- semi-normal, 49, 54

- valores extremos, 58
- Weibull (de mínimos), 52, 54, 57, 192, 193
- Weibull de máximos, 59, 61
- modelos de vida , 187–196
 - DFR, 193, 194
 - exponencial, 187–192
 - exponencial multivariada, 195, 196
 - Gama bi-paramétrico, 193
 - Gaussiano Inverso, 194
 - IFR, 193, 194
 - Lognormal, 194
 - Normal truncado em $[0, +\infty)$, 193, 194
 - Weibull (de mínimos), 192, 193
- modelos discretos univariados
 - Bernoulli, 62
 - binomial, 62
 - binomial negativo, 63
 - geométrico ou de Pascal, 64
 - hipergeométrico, 62
 - Poisson, 64
 - Poisson duplamente truncado, 66
 - Poisson positivo, 65
- momentos de estatísticas ordinais em modelo uniforme, 82
- núcleo de Epanechnikov, 73
- normas de qualidade, 2, 11, 12, 37, 94, 116, 124, 129, 143
- NSS ou RL, número de amostras até sinal, 123, 124
- organigramas *ou* fluxogramas, 14
- papel de probabilidade, 38–42, 88
- planeamentos de experiências , 4, 219–224
 - com alteração de um factor de cada vez, 220, 221
 - de Taguchi, 4, 219–224
 - factoriais altamente fraccionados, 223, 224
 - factoriais completos, 221, 222
 - factoriais fraccionados, 222, 223
 - robustos, 224
- planos de amostragem , 141–168
 - CSP-1, 165, 166
 - de Dodge-Romig, 168
 - duplos, 144, 145, 153–157
 - em cadeia, 164, 165
 - especiais, 164–168
 - múltiplos, 144, 145, 158, 168
 - para alta qualidade, 167
 - para atributos, 146–153, 155–158
 - para variáveis, 159–163
 - sequenciais , 145, 158, 168
 - elemento a elemento, 158
 - por grupos, 158
 - simples, 144–153, 168
 - Skip-lot, 167
- plotting positions *ou* posições de marcação, 39
- política amostral
 - FSI, 120, 121, 123, 124
 - FSS, 121
 - VSI, 120–124, 244, 245
 - VSIFT, 122
 - VSS, 121
 - VSSI, 122
- processos , 102, 104, 126, 130, 141, 151–153, 164, 166, 168, 191, 192, 207, 210, 211
 - de inspecção, 151, 152, 164, 166, 168
 - de Poisson, 102, 191, 192, 207

- de rectificação, 141, 151, 153
- parâmetros de, 104, 126, 130, 210, 211
- razão sinal-ruído, 209, 212–214
- rectificação da inspecção, 150–153, 157
- regras de descrição de dados , 43, 44
 - de Chebycheff, 43, 44
 - empíricas, 43, 44
- regras empíricas de aleatoriedade , 139, 140
 - terço médio, 140
- representação de Rényi, 183, 189, 190
- risco do consumidor, 149, 150, 167
- risco do produtor, 149, 150, 167
- risco- α , 89, 90, 98, 123, 129, 159, 161
- risco- β , 89
- risco- $\beta(\cdot)$, 159
- score- z , 31
- SPC, controlo estatístico de processos, 5, 14, 21, 30, 83–92, 94–129, 131–134
- SQC (*veja-se* SPC), 5, 14, 21, 30, 83–92, 94–129, 131–134
- SSATS, *steady state* ATS, 124, 125
- sub-processos , 9, 10
 - análise, 9
 - construção, 9
 - planeamento de, 9
 - teste, 9, 10
- tabelas de Dodge-Romig, 153
- tabelas de frequência, 22–24
- tabelas de Grubbs, 157
- taxa de mortalidade instantânea, 185–187, 191–195
- tempo de vida de estruturas, 169, 171–179
- tempo total de teste em , 190, 191, 203, 204
 - amostragem com reposição, 190, 191, 203, 204
 - amostragem sem reposição, 190, 191, 203, 204
- tempos de censura, 180
- testes de aleatoriedade , 135–140
 - quadrados de diferenças consecutivas, 135, 138, 139
 - runs de diferenças consecutivas, 135, 137, 138
 - runs relativamente à mediana, 135–137
- testes de vida em modelo exponencial , 181–183, 197–202, 204–208
 - censura de tipo I, 199, 204–208
 - censura de tipo II, 181–183, 199–202, 204
 - dados completos, 198–200
- tolerância do , 216, 217
 - consumidor, 216, 217
 - produtor, 216, 217
- TQM, Gestão da Qualidade Total, 83–85, 87, 209, 225–227
- TS, tempo até sinal, 123
- VSI, intervalos amostrais variáveis, 120–124
- VSIFT, intervalos amostrais variáveis em intervalos de tempo fixos, 122
- VSS, dimensão de amostras variável, 121
- VSSI, intervalos e dimensões amostrais variáveis, 122