

# Boletim



SOCIEDADE PORTUGUESA  
DE ESTATÍSTICA

Publicação semestral

outono de 2018



## Equações diferenciais estocásticas e algumas aplicações

<b>Modelos de crescimento populacional usando equações diferenciais estocásticas</b>	
<b>Probabilidades e Hidrodinâmica</b>	Clara Carlos ..... 19
<b>Equações Diferenciais Estocásticas: alguns exemplos e aplicações em Finanças</b>	Ana Bela Cruzeiro ..... 25
<b>Políticas ótimas de pescas usando equações diferenciais estocásticas</b>	João Guerra e João Nicolau ..... 31
<b>Avaliação de opções standard e barreira com o modelo CEV</b>	Nuno M. Brites e Carlos A. Braumann ..... 40
<b>Aplicações das equações diferenciais estocásticas em Engenharia</b>	José Carlos Dias ..... 49
<b>Problemas de tempo ótimo de paragem com critério integral</b>	Paula Milheiro Oliveira ..... 57
<b>Um breve olhar sobre a Estatística das Equações Diferenciais Estocásticas em Portugal</b>	Cláudia Nunes e Carlos Oliveira ..... 65
<b>Modelos de equações diferenciais estocásticas e modelos mistos em crescimento individual</b>	Manuel L. Esquível ..... 71
<b>Breve introdução às equações diferenciais estocásticas</b>	Patrícia A. Filipe ..... 76
	Carlos A. Braumann ..... 81

Editorial .....	1
Mensagem da Presidente .....	2
Notícias .....	3
Enigmística .....	18
Ciência Estatística .....	89
Prémios “Estatístico Júnior 2018” .....	91
Edições SPE - Minicursos .....	95
Retrospetiva .....	96

### Informação Editorial

**Endereço:** Sociedade Portuguesa de Estatística,  
Campo Grande. Bloco C6. Piso 4.  
1749-016 Lisboa, Portugal.

**Telefone:** +351.217500120

**e-mail:** [spe@spestatistica.pt](mailto:spe@spestatistica.pt)

**URL:** <http://www.spestatistica.pt>

**ISSN:** 1646-5903

**Depósito Legal:** 249102/06

**Tiragem:** 400 exemplares

**Execução Gráfica e Impressão:** Gráfica Sobreireense

**Editor:** Fernando Rosado, [fernando.rosado@fc.ul.pt](mailto:fernando.rosado@fc.ul.pt)

Sociedade Portuguesa de Estatística desde 1980



**SOCIEDADE PORTUGUESA  
DE ESTATÍSTICA**

[www.spestatistica.pt](http://www.spestatistica.pt)

# Editorial

... também com a importância do *Boletim SPE*...

1. Os Editoriais mais recentes, envolveram algumas reflexões sobre a temática da política de edições SPE, em particular o seu *Boletim semestral*. É fundamental uma síntese e um ponto da situação que reforcem e façam consolidar a sua relação com os sócios e com a comunidade; daí resultando um maior dinamismo da nossa associação científica e, por conseguinte, da Ciência Estatística portuguesa. O *Boletim SPE* é uma parte da SPE e que “nasceu antes dela” (Editorial de *Boletim outono de 2016* e, em especial, *Boletim primavera de 2009*).

É (também) através do Boletim que os sócios devem partilhar ideias e todo o seu saber. É (acima de tudo) seu múnus, para melhor “afirmar a Estatística” – o grande e primeiro objetivo estatutário da SPE. Durante um Congresso, a reunião magna, é (talvez) uma excelente oportunidade para (até mesmo nos corredores) se “conversar sobre” ... Agendemos, para o próximo congresso, esse propósito.

O *Boletim primavera de 2018* em termos de acabamento final, foi “agrafado” – uma opção ligeiramente diferente da tradicional “colagem” mas que faz reduzir os custos da edição. No entanto, aquela opção é condicionada pelo número de páginas. Este, por sua vez, é o resultado de diversas variáveis – desde a diversidade de Notícias que devem ser divulgadas até à quantidade de autores que cada Tema Central “aconselha” que sejam convidados e (também) da maior ou menor síntese que os vários assuntos permitam... Assim aconteceu nesta edição onde, de novo, recorreremos à “colagem”, diga-se, um aspeto final de melhor qualidade. O custo subiu outra vez, mas... Em relação aos objetivos anteriormente anunciados, fica, no final, o consolo de “em média” os termos reduzido. Norteados pelo esforço para reduzir preços, o fundamental é o *Boletim SPE* cumprir a sua missão com o maior equilíbrio entre custos e benefícios. Daí advém e (também) se afirma a sua importância.

2. No passado mês de Julho faleceu o Prof. Bento Murteira. Nesta edição, a partir da página 3, damos notícia e incluímos alguns testemunhos. Com o falecimento do Prof. Bento Murteira, o “Mundo Estatístico” perdeu um pioneiro em muitas áreas científicas e pedagógicas.

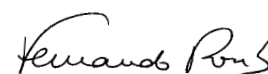
Já Jubilado há mais de dez anos e revelando um vigor extraordinário de atividade científica, no *Memorial da Sociedade Portuguesa de Estatística*, em 2005, tivemos o prazer de ter (mais) uma contribuição sua, excelente em todos os domínios. Na introdução desse texto e a jeito de “ponto da situação” escreveu o Prof. Murteira: “Numa ótica pessoal, portanto em termos subjetivos, versando naturalmente os temas preferidos do Autor, há muitos anos jubilado, a presente nota pretende esboçar alguns dos aspetos que caracterizam a evolução da estatística em Portugal nos últimos 25 anos, isto é, desde os fins da década de 70 até hoje (2005)”. Em pouco mais de dez páginas com rigor e excelência – apanágio de todo o seu trabalho – o Prof. Bento Murteira deixou-nos um documento precioso para a História da Estatística em Portugal. Uma singela homenagem é reler esse texto “*A Estatística em Portugal nos últimos 25 anos*”; um capítulo de *Memorial SPE* (Edições SPE, 2005, p. 11-21) também disponível em muitas bibliotecas de todo o país.

Mais recentemente, no *Boletim outono de 2013* publicámos “*Fundamentos da Inferência Bayesiana*”. Nesse texto, Bento Murteira parte do Problema Fundamental da Estatística para uma viagem sobre um dos grandes temas da Estatística e da sua paixão.

Nas provas públicas para obtenção do meu Título de Agregado, em 1991, o Prof. Murteira foi arguente principal. No final da “conversa científica” teve a oportunidade de me agradecer por lhe ter apresentado “Os *Outliers*”. Foi um prazer que o mais íntimo do meu curriculum científico agora exige que recorde! Obrigado Prof. Murteira pela Estatística que nos ensinou a descobrir e, como Mestre, nos estimula a aprofundar.

3. Aos autores dos textos “testemunhos de homenagem ao Prof. Bento Murteira”, reconhecidamente, agradeço a sua disponibilidade e, em especial, também o desejo manifestar, a oportunidade que nos dão de “fazer reviver” um pouco da história de todos nós.

O *Boletim SPE outono de 2018* teve a colaboração especial do Prof. Carlos Braumann, na eleição do Tema Central, bem como dos autores convidados. Agradecimentos são devidos a todos pela disponibilidade na partilha do seu saber com toda a comunidade científica.



O Tema Central do próximo Boletim SPE será *Séries Temporais de Valor Inteiro*.

# Mensagem da Presidente

Caros Sócios da SPE,

Aproveito este espaço para fazer um resumo dos acontecimentos de maior relevo nos últimos 6 meses.

Começo por dar destaque à realização do III Encontro Luso-Galaico de Biometria, nos dias 28 a 30 de junho 2018, na Universidade de Aveiro. O Encontro teve uma organização excelente assim como um elevado nível científico pelo que são devidos agradecimentos às Comissões Organizadoras e Comissões Científicas.

O Prémio Iniciação à Investigação 2018 foi atribuído à Tese de Mestrado em Bioestatística da autoria de Pedro Nicolau, intitulada Estimating the spatio-temporal variation of bird phenology using citizen science data.

As candidaturas aos Prémio SPE 2018 estão a ser analisadas pelo Júri. Estes prémios serão entregues numa sessão comemorativa, cujo programa será divulgado oportunamente.

Decorreu mais um concurso Prémios Estatístico Júnior 2018, com o patrocínio habitual da Porto Editora. Detalhes sobre os premiados e a Sessão de Atribuição dos Prémios podem ser consultados neste Boletim.

Realizou-se, pela segunda vez, uma sessão conjunta DStatG (Deutsche Statistische Gesellschaft) - SPE, durante a “Statistische Woche”.

A iniciativa visa estreitar e fomentar a cooperação entre estas duas sociedades e os respectivos membros. A “Statistische Woche 2018” teve lugar em Linz, a terceira maior cidade austríaca, mais concretamente na “Johannes Kepler Universität” de 12 a 14 de Setembro.

Realizaram-se as Jornadas sobre Matemática no Acesso ao Ensino Superior – MAES 2018, organizadas pela SPM e CIM e nas quais a SPE esteve representada.

Está em marcha a organização do XXIV Congresso da SPE que terá lugar em Novembro de 2019. Detalhes serão divulgados brevemente.

A compilação das Actas do XXIII Congresso da SPE está em andamento.

A Sociedade é dos sócios e para os sócios e é, essencialmente, o que os sócios fizerem dela. Assim, a Direcção está aberta a apoiar todas as iniciativas em prol da Estatística em Portugal.

Porto, 28 de Setembro de 2018

Cordiais saudações

Maria Eduarda Silva

# Notícias

## • Faleceu o Professor Doutor Bento Murteira

O Professor Doutor Bento José Ferreira Murteira, faleceu no dia 18 de Julho de 2018.



Licenciado em Finanças pelo Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras e Doutor em Finanças pela Universidade Técnica de Lisboa (1953), o Professor Bento Murteira foi aluno de Bento de Jesus Caraça e discípulo e assistente do Professor Leite Pinto.

Fez Doutoramento sob a orientação de Maurice Kendall, uma referência do século XX.

Docente no Instituto Superior de Economia e Gestão desde 1947; em 1954 passou de Assistente a 1.º Assistente; em 1961 a Professor

Extraordinário e em 1963 a Professor Catedrático categoria em que se Jubilou em Agosto de 1994.

No âmbito da Fundação das Universidades Portuguesas, fez parte em 1997 e 1998 das Comissões de Avaliação Externa das Licenciaturas em Economia e das Licenciaturas em Matemática; em 2001 fez parte da Subcomissão de Avaliação Externa das Licenciaturas em Estatística.

O Prof. Bento Murteira deixou-nos um legado científico onde se destaca uma extensa lista de livros e publicações nas áreas de Estatística, Econometria e Investigação Operacional embora recentemente se dedicasse apenas à Estatística.

O volume editado pelo ISEG, por ocasião da Jubilação do Prof. Bento Murteira (Junho de 1994), contém uma boa parte dos artigos publicados.

O Prof. Bento Murteira, em 1980, foi um dos sócios fundadores da Sociedade Portuguesa de Estatística e o primeiro Sócio Honorário da SPE, eleito em 1993.

FR

## Recordações do meu amigo Bento Murteira

Quando cheguei a Portugal, no início dos anos 80, travei conhecimento com o Bento Murteira, passando a partir daí a ter com ele uma longa relação pessoal e profissional, durante a qual tive a oportunidade de reconhecer e admirar muitas das suas qualidades. Talvez que, para mim, a qualidade mais marcante do Bento, tenha sido a sua atitude sempre gentil e encorajadora para com as pessoas (excepto à mesa do bridge...). Embora, por instinto, apresentasse uma atitude despretensiosa, foi sempre muito competitivo e sempre se esforçou para ser um dos melhores, se não o melhor, em tudo pelo qual mostrava ter interesse. E trabalhava para isso! Durante o período em que, juntamente com o Daniel Müller trabalhamos no livro de *Análise de Sucessões Cronológicas*, o Bento foi, logo desde o início, a grande força motora. Foi ele que estabeleceu o prazo para terminar o trabalho e foi a garantia para que o livro fosse produzido dentro desse prazo. O Bento tinha um espírito muito aberto, estava sempre pronto para aprender coisas novas, mesmo até nos últimos períodos da vida. Por exemplo, e apenas para mencionar algumas das muitas coisas pelas quais se interessou e procurou estudar nos últimos anos, para reescrever as últimas edições dos livros de *Probabilidades e de Estatística* que saíram em 2012, aprendeu latex e programação em R. Tornámo-nos grandes amigos já que partilhávamos muitos interesses: tiro aos pratos, caça, ténis, bridge, boa comida e bebida...

O Bento era um excelente e muito perspicaz caçador e foi com muito prazer que o acompanhei em diversas ocasiões em caçadas em Portugal e Espanha. Costumávamos também ir ao Clube de Tiro em Monsanto praticar tiro aos pratos, desporto no qual ele era extremamente competitivo. Tinha uma óptima pontaria e só deixou de praticar quando verificou que a visão não lhe permitia dar o seu melhor. Ele era um gourmet absoluto e os olhos brilhavam-lhe sempre que saímos para jantar e encontrávamos boa comida e bom vinho. Foi sempre para mim um prazer partilhar esses grandes

momentos com ele. Durante um curto período também jogámos ténis. Inicialmente jogávamos aos pares, sendo também o João Branco um dos nossos companheiros, mas houve uma ocasião em que o desafiei a jogar a solo comigo. Apesar de o Bento ter mais trinta anos que eu e naquela época eu estar na minha melhor forma, foi um jogo extremamente puxado em que o Bento deu tudo para ganhar o jogo. Depois soube que ficou em casa atrapalhado das costas! Vim a saber que ele já só jogava aos pares para não ter de se esforçar tanto. Eu não sabia disso e o Bento não era pessoa para recusar um desafio!

O bridge foi, contudo, aquilo que mais nos ligou. Jogávamos, Bento, João Faria, Luís Loura e eu, com muita frequência, quer na casa dele, quer em minha casa ou na casa do Luís. Tardes bem passadas a que depois se seguia um bom jantar. O Bento levava o jogo do bridge muito a sério e não tinha paciência para parceiros que não davam o seu melhor e cometiam erros! Eu, não sendo exímio no bridge como os meus companheiros, cometia erros e não estava à altura desejada pelo Bento. Como consequência sofria muitos “abusos verbais” por parte do Bento, os quais eram logo esquecidos quando nos sentávamos à mesa para saborear um bom jantar.



Talvez que o momento mais alto da nossa amizade e que a veio cimentar, foi quando no Verão de 1998 fizemos, em Família, um grande passeio de carro pela Califórnia. Foram cerca de quinze dias maravilhosos em que pudemos apreciar, em companhia, muitas belezas naturais e muitos gloriosos momentos. Diz-se que estas viagens intensas costumam trazer o melhor e o pior que há nas pessoas. Só vi o melhor que havia no Bento e na Manuela, sua mulher. Foi um passeio inesquecível e tenho a certeza de que a Manuela concorda comigo.

Vou sentir a falta do Bento. Mas recordá-lo-ei sempre como um modelo de vida, um bom colega e, mais do que tudo, um Grande Amigo.

Feridun Turkman

## **Do meu Amigo Bento**

### **O Coração**

Não tive oportunidade de o pesar, mas era enorme.

Tendo em minha posse um cartão da Makro, e falando nisso ao Bento decidimos marcar uma visita em busca de vinho bom e possivelmente mais barato que noutras proveniências.

Pois bem, mais de metade da nossa visita enóloga foi consumida na busca de um “tijolo” (um misto de toca cassetes com rádio e se calhar cds) destinado a reparar o furto que um velhote, segurança do ISEGI, tinha sido vítima no exercício da sua vigilância. Só depois do tijolo comprado e embrulhado o Bento se lembrou que íamos ao vinho.

### **A Velocidade**

É conhecida a sua paixão pelas belas mecânicas.

Quando era novo a sua escolha eram os Porsche.

Estreámos um Honda Type R numa deslocação à herdade do Esporão para um inevitável torneio de Bridge organizado pelo Ro.

O Bento guiava lindamente, pelo caminho ia-me dizendo acerca da máquina:

- Ouve como este motor canta. O ponteiro saltitava alegremente bem acima dos 200...

Para me testar, quando a A12 bifurcou entre Évora e o Algarve, saiu-se com esta:

- É Pá diz-me se é para a esquerda ou para a direita, que eu não vejo!

Na altura comecei a estimar a probabilidade de não chegar a Évora...

Mas percebi que o Bento estava a gozar comigo e sosseguei.

Mais tarde o Bento foi perdendo o gosto pela condução, nos inúmeros torneios que jogámos no Paris Bridge, com um inevitável jantar prévio na Isaura (garrafeira ao nível) era eu o condutor da Avenida da República à Avenida Paris.

## A Paixão pela Vida

Do que fui contando percebe-se que o Bento amava a vida.

Amava a vida de uma forma solidária, nunca vou esquecer as peripécias duma ida a Valência a um Bayesian Statistics com um itinerário cuidadosamente preparado por mim, desde o carro alugado, um Opel Vectra diesel que acomodava os quatro cientistas com razoável conforto, à escala em Toledo, num hotelzinho de charme, outrora a residência do Bispo da Cidade.

Sáímos de manhã, pela fresquinha, como o Bento costumava dizer, e planeávamos comer qualquer coisa pelo caminho.

Quado ouvi o Bento a antecipar uma almoçarada na pousada de Elvas ou equivalente, pensei nos 600km do percurso, mas também na bolsa e decidi ir andando com uma esperança de comer qualquer coisa frugal, num posto da Galp a meio caminho de Madrid.

Quando o Bento descobriu que já estávamos em Espanha, a coisa ficou preta.

Obrigou-me a sair na primeira vilória fez-me parar numa praça de táxis para perguntar num portunhol escoreito, onde era o melhor restaurante da localidade.

Colhida a informação, lá fomos, eu um pouco envergonhado da minha fuga para Espanha.

Comemos divinamente e para minha vergonha, o Bento fez questão de pagar a conta.

Eu e as minhas colegas fizemos questão de retribuir, mas obviamente ficámos muito aquém.

Nessa deslocação cada refeição era uma festa.

Num horário não muito interessante do congresso, escolhido pelo Bento, só nós os dois, fizemos 200 Kms para ir saborear uma paelha a Valência.

Depois de eu o proibir de pagar a conta, ele exigiu, como contrapartida cada um pagar a sua.

Mais uma vez a mesma generosidade.

O Bento comeu o dobro do que eu comi.

Desde a garrafinha Monopole inteirinha para o Bento e reduzida a meia para mim, tudo o resto na mesma proporção.

As peripécias da viagem alongariam este escrito em demasia.

## O Bridge

O Bento era um excelente jogador.

Tinha essa qualidade muito frequente nos bons jogadores de ser muito intransigente com os erros do parceiro.

Comigo sempre conseguimos ultrapassar quaisquer desentendimentos momentâneos.

Jogámos no Paris e no Palácio da Fronteira inúmeras vezes, na embaixada da Turquia pela mão do Feridun e o charme do embaixador Jan.

Numa reta final dos torneios semanais do Paris, com o Bento bem colocado para ganhar a competição anual de melhor jogador do clube, convidou-me para jogar comigo os últimos 3 ou 4 torneios semanais.

Com o cerimonial acima descrito, boleia, os inevitáveis jantarinhos na Isaura, ganhámos os torneios todos e o Bento levou para casa o almejado trofeu de melhor jogador do clube nesse ano.

O sorriso, de que falo mais abaixo, iluminou-o.

Acredito que o trofeu o fez, no momento, imensamente feliz

Jogámos também em sua casa, com bar aberto, e um fantástico jantar de caril de gambas, confecionado pelo Passu, acompanhado por um Alvarinho Quinta da Pedra difícil de esquecer. Como se não bastasse o Bento pediu desculpa por termos de jantar no restaurante pois a casa do Estoril, em férias, não podia oferecer o mesmo banquete com que nos brindou.

## O Sorriso

O sorriso de satisfação do Bento é uma das minhas melhores recordações. Exibia-o sempre que, num momento de humor ou satisfação todo o semblante parecia iluminar-se.

Quando penso nele, vejo sempre esse sorriso, misto de miúdo travesso e sábio, dono deste mundo.

Do que foi o seu contributo para a minha formação científica. Poderei falar noutra altura.

Hoje falei apenas do meu Amigo Bento.

João Faria

## “Sabe aquele livro que encomendei?”

Do Professor Bento Murteira guardo gratas recordações. Primeiro, como autor dos meus primeiros livros de Probabilidade e Estatística, que comprei quando entrei para a faculdade, e me acompanharam por vários anos. Depois, como membro do júri das minhas provas de doutoramento, um “gigante” à minha frente, e, finalmente, quando tive a felicidade e o privilégio em colaborar na nova edição daqueles que tinham sido os meus primeiros livros de Estatística. “Não quero mais do mesmo”, foi a primeira coisa que me disse. “Para isso, não estava aqui a Marília. Quero coisas novas, quero um livro mais moderno, é nisso que quero que me ajude. Aceita?”. Foram muitos meses de trabalho, com reuniões quinzenais, às quais cheguei sempre pontualmente mas nunca me livrando do “Já estava à sua espera” entusiasmado com que sempre me recebia. Nessas reuniões, o tempo voava. Entre as sugestões, as instruções e os pedidos de opinião para a nova edição, houve tempo para ouvir algumas histórias antigas mas sobretudo relatos e reflexões sobre o que mais lhe interessava na altura, sobre os vários livros de cabeceira, sobre o que estudaria a seguir - R, LaTeX, Física Quântica, Lógica e a vida e obra de Alan Turing foram alguns dos assuntos do momento. Agradeço-lhe o muito que aprendi e o quanto me elevou pelo respeito e consideração que sempre demonstrou pelo meu trabalho e as minhas opiniões.

Recordo-o como a pessoa mais curiosa que conheci, como recordo a encantadora impaciência com que frequentemente protestava “Sabe aquele livro que encomendei? Pois ainda não chegou!”

Marília Antunes

## O Professor Bento Murteira, Pai da Estatística Bayesiana em Portugal

Sempre tive uma grande admiração e imenso carinho pelo Professor Bento Murteira. Quando comecei a escrever estas notas fui levada a recordar-me do início, de quando soube pela primeira vez da sua existência, de quando o Professor entrou pela primeira vez na minha vida e como é que essa admiração e carinho foram sendo nutridos. A primeira vez que ouvi falar do Professor Bento Murteira foi em 1972, tinha eu acabado de entrar na FCUL como assistente estagiária, quando ele deu aulas de Programação Matemática na Faculdade de Ciências, em substituição do Professor Tiago de Oliveira que se encontrava em licença sabática. Não cheguei a assistir a nenhuma das suas aulas, mas os alunos comentavam que ele era um excelente Professor e que as suas aulas eram muito interessantes. Apesar de ele fazer parte, desde o início da sua criação em 1975, do Centro de Estatística e Aplicações, ao qual eu também pertencia, na realidade o meu contacto mais directo com o Professor Bento Murteira começou após o meu regresso de Sheffield em 1980. Fiz a minha tese de doutoramento na área da Estatística Bayesiana. Nessa altura o Professor Bento Murteira era o único doutorado em Portugal com conhecimento na matéria e, naturalmente, foi ele o escolhido para avaliar a minha tese com vista à obtenção da equivalência ao grau de doutor. Penso que este foi o nosso primeiro elo de ligação. Bento Murteira era, entre inúmeros outros assuntos, um apaixonado pelos Fundamentos da Estatística, pela Teoria da Decisão e pela Metodologia Bayesiana. Partilhávamos esses interesses e conseqüentemente trocámos muitas ideias sobre fundamentos da estatística em geral e inferência bayesiana em particular. Aprendi muito com ele durante o período em que ele esteve integrado no CEAUL na linha de investigação “Decisão Estatística: Fundamentos e Aplicações”. Havia uma humildade nata na sua maneira de ser, começando pelo facto de não querer ser ele, como seria natural, a liderar esta linha de investigação, deixando essa tarefa para uma principiante como eu. Nas nossas conversas ia ensinando, sem mostrar que o estava a fazer, como se os nossos conhecimentos estivessem ao mesmo nível. Quando escreveu o livro “*Estatística: Inferência e Decisão*” publicado em 1988 pela Imprensa Nacional, pediu-me para o ler e comentar antes de o submeter. É um livro notável, tendo levado muitos anos a ser concluído e, tal como ele refere no prefácio, “... resultou de muitos aperfeiçoamentos e extensões – efectuados em grande parte quando o Autor estava integrado no Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa”. Mais adiante acrescenta “A ênfase dada à Inferência Bayesiana e à Decisão Estatística, sobretudo a esta, visa, assim, contrabalançar o peso talvez excessivo que a Estatística Clássica tem no ensino”. Para frisar a minha afirmação na humildade nata do Bento, aqui vai a última frase do prefácio desse livro “Finalmente, como prova de grande reconhecimento, dedica-se o presente trabalho a todos aqueles que pacientemente escutaram o



*Autor, estimulando-o com o seu interesse*". A esta nossa ligação e ao interesse na divulgação da Estatística Bayesiana juntou-se o Carlos Daniel Paulino, meu primeiro aluno de Mestrado com uma dissertação sobre "Regressão, uma óptica bayesiana", e João Pedro Faria, meu primeiro aluno de doutoramento com uma tese intitulada "Compatibilidade Crisscross em Estruturas de Probabilidade Comparativa", ambas brilhantemente discutidas por Bento Murteira. Chegou uma altura em que os quatro achámos que era propício oferecermos um curso intensivo em Estatística Bayesiana. Isso acabou por acontecer em Fevereiro de 1999 e em 2003 o livro, "Estatística Bayesiana", baseado nas notas que então distribuámos aos alunos do curso, foi publicado pela Fundação Calouste Gulbenkian. O 1º capítulo dedicado aos Fundamentos da Inferência Bayesiana, praticamente todo da autoria do Bento Murteira, continua hoje tão actual como o era naquela altura. A segunda edição deste livro levou década e meia a ver a luz do dia e lamentavelmente saiu precisamente no dia em que o Professor Murteira faleceu, não tendo tido ele oportunidade de ver esta nova edição.

Estes dois livros que aqui refiro fazem parte de uma vasta coleção de livros da sua autoria. São bem conhecidos os seus livros de Probabilidades e Estatística em dois volumes, Introdução à Estatística, Análise Exploratória de Dados, Estatística Descritiva, Análise de Sucessões Cronológicas entre outros. O livro "*Jubileu Bento Murteira*" publicado pelo ISEG, por ocasião da homenagem que lhe foi prestada em Junho de 1994, ano em que se jubilou, contém o texto de alguns dos trabalhos mais representativos da sua actividade de investigação, assim como depoimentos de colegas e alunos que mais directamente privaram com ele. Esses textos constituem uma óptima leitura para se perceber a importância do percurso académico e científico de Bento Murteira, muito particularmente, para perceber a importância do Professor Bento Murteira na divulgação e desenvolvimento da Estatística em Portugal. Como docente no ISCEF (actual ISEG), onde iniciou a sua carreira académica em 1947, introduziu logo no início dos anos 50 uma disciplina de Estatística Matemática com um desenvolvimento metodológico actualizado à época, elevando o nível do ensino da Estatística (que à data no ISCEF se limitava ao ensino da Estatística Descritiva) ao que de melhor se fazia na época na Europa. O seu espírito inovador não se limitou à Estatística Matemática. Iniciou também nessa década, pela primeira vez em Portugal, o ensino da Econometria, tendo introduzido ainda nessa disciplina conceitos de Programação Linear, Teoria dos Jogos e Teoria da Decisão.

Felizmente o mérito do Professor Bento Murteira foi bem reconhecido por todos os seus pares. Foi sempre extremamente respeitado pela comunidade científica e muito particular pela comunidade estatística. Em Maio de 2003 foi-lhe atribuído o título de Doutor Honoris Causa pela Universidade de Lisboa, título atribuído "*a personalidades eminentes, nacionais ou estrangeiras, que se tenham distinguido na atividade académica, científica, profissional, cultural, artística, cívica ou política, ou que hajam prestado altos serviços à Universidade, ao País ou à Humanidade*"<sup>1</sup>, e em Dezembro de 2013, durante o XXI Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística, foi-lhe justamente atribuído o "Prémio Carreira - SPE", prémio especificamente destinado a "*reconhecer a atividade de estatísticos portugueses com papel de relevância no desenvolvimento científico, pedagógico e de divulgação da Estatística em Portugal*"<sup>2</sup>. Ao nível Nacional foi agraciado como Grande Oficial da Ordem de Santiago de Espada, tendo sido condecorado pelo Presidente da República durante as cerimónias do dia 10 de Junho.

Para terminar tenho de referir que os interesses do Professor Murteira não se limitavam de modo algum à Estatística ou à Economia e Finanças. Bento Murteira era na realidade uma figura ímpar. Extremamente culto, falava com todo o à vontade em questões de Filosofia, Física, Teoria Quântica, Religião, Música! Falava apaixonadamente nos assuntos que dominavam o seu interesse do momento e era um verdadeiro prazer ouvi-lo falar.

O Professor Bento Murteira deixa-me muitas saudades. E deixa com certeza muitas saudades a todos aqueles que, como eu, tiveram o grande privilégio de com ele privar.

Maria Antónia Amaral Turkman

---

<sup>1</sup> <https://www.ulisboa.pt/info/honoris-causa>

<sup>2</sup> <http://www.spestatistica.pt/index.php/176-premio-carreira-spe>

## Bento Murteira, mestre de gerações<sup>1</sup>

Bento Murteira foi um professor marcante para o desenvolvimento e modernização da sua escola, o atual ISEG, e para o progresso da econometria, da estatística e da matemática aplicada em Portugal. Era um homem da sua escola, que se preocupava com os seus alunos, com as suas cadeiras, com o progresso do seu departamento e com o centro de investigação que criámos, o Cemapre. Mas era um homem do mundo, da ciência e da vida. Abstinha-se de intervir em polémicas individuais, de influenciar as escolhas particulares das pessoas e dos departamentos. Ficava feliz quando os seus discípulos progrediam, quando a sua escola progredia, quando a estatística se desenvolvia.

Aluno de Bento de Jesus Caraça, discípulo e assistente do professor Leite Pinto desde 1947, Bento Murteira dirigiu o ensino da Estatística a partir de 1951, regeu a nova cadeira de econometria a partir de 1953 e deixou marcas, durante décadas, na modernização do ensino da matemática aplicada à economia em Portugal.

Nos anos anteriores, essas matérias eram tratadas de forma muito rudimentar. Quase que se limitavam à construção de gráficos e ao cálculo de médias e de outras estatísticas descritivas – não se desenvolviam métodos de estimação e inferência próprios da Estatística Matemática. Tomando partido da melhor preparação matemática dos alunos do então ISCEF, devida à reforma de 1949, Bento Murteira transformou radicalmente o estudo da Estatística, modernizou o ensino da econometria e elevou o nível e o rigor dos estudos quantitativos de economia no ISEG. Essa modernização veio a contagiar todas as escolas de Economia e Gestão do nosso país.

As suas Probabilidades e Estatística, de folhas de acompanhamento das suas cadeiras transformaram-se em manual de referência da estatística em Portugal. Ainda hoje, atualizadas e ampliadas por três dos seus discípulos e colaboradores, rebatizadas de *Introdução à Estatística*, são o manual de referência utilizado na nossa escola e noutras do nosso país. Bento Murteira foi um professor marcante para o desenvolvimento e modernização do ISEG e para o progresso da economia, econometria, estatística e matemática aplicada em Portugal. A Investigação Operacional foi outra das áreas que Bento Murteira introduziu no nosso país. A ele se devem as primeiras lições de Programação Linear, Teoria dos Jogos e Teoria da Decisão.

Em 1953, realizou o seu doutoramento no estudo dos processos autorregressivos com orientação de Maurice Kendall, um dos grandes estatísticos do século XX. Desenvolveu um interesse precoce pelo estudo de séries temporais e previsão, matérias que impulsionou no início da década de 1980, quando tais temas eram ainda pouco conhecidos no nosso país.

Pela mesma altura introduziu a perspetiva bayesiana no estudo da estatística e produziu, como era sua regra em todos os temas que estudava e introduzia, um excelente e pormenorizado texto de introdução a essa matéria. Regressando à Estatística Descritiva na década de 1990, voltou a inovar o ensino dessa matéria colocando a ênfase na Análise Exploratória de Dados, precursora do interesse contemporâneo pelo estudo de "Big Data".

Bento Murteira é um dos raros mestres que durante décadas e décadas conseguiu inovar-se cientificamente, e inovar cientificamente o ensino; um dos raros mestres cuja influência se propagou e se propaga ainda hoje no ensino e na investigação. Um otimista que não gostava de criticar e muito menos de maldizer, antes contribuía com o seu exemplo. Um grande exemplo, professor Murteira!

Nuno Crato

---

<sup>1</sup> Este texto baseia-se numa nota pública que escrevi para tomada de posição oficial do ISEG. Divulgo-a e assino-a aqui, ligeiramente adaptada, com autorização da presidência do Instituto.

## **Homenagem ao Professor Bento Murteira**

Não quero perder a oportunidade que o Professor Fernando Rosado me dá para escrever algumas palavras sobre o Professor Bento Murteira que nos deixou recentemente em 18 de Julho de 2018. Não é que eu tenha tido profunda convivência com o Professor Bento Murteira mas quero aproveitar para pensar nele, para recordar momentos especiais de convívio, para lhe agradecer esses momentos e para lhe prestar a minha homenagem pelo imenso legado que nos deixou em resultado da sua brilhante actividade académica.

### **Eu gosto de trocar as coisas por miúdos**

Conheci pessoalmente o Professor Bento Murteira em 1981 no II Colóquio de Estatística e Investigação Operacional que se realizou no Fundão. Desconhecendo o ambiente nacional, timidamente apresentei uma comunicação que na altura me pareceu fora da moda. Mas fiquei contente quando o Professor Bento Murteira que presidia à respectiva Sessão me disse que tinha gostado do tema e da abordagem. Mais tarde, recordando esse Colóquio, uma colega dir-me-ia que eu tinha sido mal tratado naquele Colóquio. Eu não senti nada disso e nem quis saber o como, quando, quem e porquê pois só me lembrava de duas coisas: cabrito assado e o bem-estar que o Professor Bento Murteira me tinha proporcionado ao abordar-me para me cumprimentar daquela maneira simpática.

Antes disto, deste colóquio, embora não conhecendo o homem, eu já conhecia a obra, e nessa altura a obra para mim era o seu livro de Probabilidades e Estatística que eu comecei a folhear mesmo antes de se tornar livro, isto é, quando era ainda o conjunto de notas que serviram de base, durante anos, ao curso de Estatística leccionado no antigo ISCEF, agora o actual ISEG. Afinal eu era seu aluno, um seu aluno virtual. O que sempre me cativou no livro não era o conjunto de tópicos tratados, esses encontram-se em muitos outros livros, não era sequer o rigor, há muitos livros que são igualmente rigorosos, era mais o estilo do autor, a sua atitude, a sua ambição, o seu desejo de ser claro e de ser completo, e sem dúvida a coragem de se ter aventurado a escrever o seu livro num tempo em que nada de relevante havia sido publicado com estes objectivos lectivos. Muitos que vieram depois, laborando em condições muito mais vantajosas, não tiveram o mesmo arrojo e o velho livro, com as actualizações de vária ordem que o tempo foi requerendo, continua a ser ainda hoje a grande referência para o ensino e aprendizagem da Estatística em Portugal. Um dia, depois de uma partida de ténis (eu tinha a mania que jogava ténis) com o Professor Feridun ( o responsável pela minha aproximação a Bento Murteira) e o próprio Professor Bento Murteira, a propósito de uma conversa breve que se levantou sobre Estatística ele virou-se para mim e disse: sabe, eu gosto de trocar as coisas por miúdos. Era essa a frase que eu há muito estava à espera de ouvir e que acabaria por ser Bento Murteira a dizê-la, aliás em consonância com a ideia que de facto o seu livro sempre me transmitiu.

Ao longo do tempo fui-me apercebendo da real dimensão da contribuição de Bento Murteira:

- i) na matematização da Economia que empreendeu no ISCEF e que se propagou a outras escolas do país,
- ii) no ensino e divulgação da Estatística em Portugal,
- iii) no ensino de outras disciplinas como a Investigação Operacional,
- iv) na investigação científica em vários domínios revelando a sua capacidade de diversificar e de inovar.

Bento Murteira foi um homem de ideias e um incansável obreiro na sua área de actividade. Sobre estes aspectos muito haveria para dizer mas por agora quero terminar com um breve relato da conversa que tive com o Professor Bento Murteira durante o nosso antepenúltimo encontro.

## Despacha-te que já tenho 90 anos

Na sequência da aposentação da Professora Antónia Turkman foi organizada, em 3 de Outubro de 2014, uma festa em sua homenagem que incluía um workshop. Dias antes a homenageada pediu-me para passar por S. João do Estoril e dar boleia ao Professor Bento Murteira que também ia participar no evento. A viagem até à Faculdade de Ciências é um instante mas deu para uma conversa “multivariada” e extremamente interessante. O Professor reflectindo sobre a grave situação económica e financeira do país lembrou alguns dos seus alunos com ligações e grandes responsabilidades nestas áreas (aquele Salgado era tão bom rapazinho...). Mas olhe, dizia-me ele, tanta conversa, tanta agitação e esquecem-se que só 5% do universo é matéria visível, o resto é tudo negro, onde não se enxerga nada. É que, por esta altura, Bento Murteira não estava mais interessado em Estatística mas sim em problemas relacionados com a complexidade do universo que nos envolve, buracos negros e outros fenómenos misteriosos. Aliás, acabaria por se referir brevemente ao assunto, com uma curta intervenção a seguir à minha apresentação no workshop quando falei dum conjunto de dados sobre galáxias “Galaxy Zoo” em que andava a trabalhar.

Muitos outros temas vieram a lume na nossa breve e ecléctica conversa, e um deles foi a culinária, a comida, os petiscos. E quando o Professor disse que adorava mexilhões eu avancei revelando, com modéstia, que cozinhava uns bons mexilhões e que o melhor seria ir a minha casa provar o petisco. Foi aí que ele disse imediatamente: “então despacha-te que eu já tenho 90 anos”. Adorei a rapidez, a naturalidade e a sua franqueza. Mas “o despachar” para um alentejano não é um empreendimento fácil. Lá adubei e reguei as minhas raízes alentejanas e ao fim de alguns meses surgiu (devagarinho) a necessária árvore da pressa. Finalmente o almoço consumou-se, algures no princípio de 2015. Ainda estou a ver o Professor Bento Murteira a entrar em nossa casa muito feliz munido do vinho preferido, aconchegadamente frio. Que ricos momentos de alegria e satisfação na companhia dos restantes amigos. E os mexilhões até estavam no ponto!

O milagre de nascer e viver é uma dádiva. E quando conseguimos cultivar ao longo da vida momentos de convívio e de alegria, produzir obra e fazer escola, como aconteceu com o Professor Bento Murteira, então a dádiva é absolutamente enorme.

João A. Branco



## • Sobre a sessão de entrega dos Prémios “Estatístico Júnior 2018”

A Sociedade Portuguesa de Estatística promove anualmente o Prémio Estatístico Júnior, com o patrocínio da Porto Editora.

Com esta iniciativa pretende-se incentivar o interesse pelas áreas de Probabilidades e Estatística dos estudantes dos Ensinos Básico e Secundário, e dos Cursos de Educação e Formação (CEF) e de Educação e Formação de Adultos (CEFA).

O Prémio Estatístico Júnior (PEJ) distingue anualmente sete trabalhos e é atribuído aos estudantes que os realizaram e a alguns dos professores orientadores, sendo a sua entrega formal realizada numa sessão que lhe é expressamente consagrada.

A entrega dos PEJ 2018 decorreu numa sessão especial, realizada em Coimbra no passado dia 29 de setembro e da qual, mais adiante neste Boletim, damos o devido destaque.

O Júri dos Prémios Estatístico Júnior 2018 integrou a Doutora Maria Eugénia Graça Martins e a Doutora Manuela Neves.

FR

## • Sessão de entrega do Prémio “Iniciação à Investigação 2018”

Pedro Nicolau, com o trabalho “Estimating the spatio-temporal variation of bird phenology using citizen science data” foi o vencedor do **Prémio Iniciação à Investigação (2018)**.

A cerimónia de entrega do referido prémio decorrerá, na sede da SPE, no próximo dia 28 de novembro, dia de aniversário da Sociedade Portuguesa de Estatística.

Pedro Nicolau obteve o grau de Mestre em Bioestatística na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa sob a orientação dos Profs. Tiago Marques e Alison Johnston. É estudante de doutoramento em Tromsø, na Noruega.

FR

## • ECAS 2019 on Statistical Analysis for Space-Time Data

Os Cursos Europeus de Estatística Avançada (ECAS) destinam-se a providenciar formação pós-graduada em áreas especiais de Estatística a investigadores, professores universitários e profissionais em geral interessados na aplicação de novos métodos estatísticos.

O ECAS2019 terá lugar na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa de 15 a 17 de Julho de 2019, sendo organizado pela Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE) e pela Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO), com apoio do Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa (CEAUL). Há um número limitado de participantes e a língua oficial do ECAS2019 é o inglês. O programa engloba quatro cursos que serão ministrados por especialistas de renome em Estatística espaço-temporal: Adrian Baddeley (Curtin University, Austrália), Patrick Brown (University of Toronto, Canadá), Liliane Bel (AgroParisTech, França) e Haavard Rue (King Abdullah University of Science and Technology, Arábia Saudita). Os participantes são também convidados a apresentar seu próprio trabalho em formato de póster.

Para mais informações, incluindo datas importantes, consulte a página do ECAS2019 disponível em

<https://ecas2019.math.tecnico.ulisboa.pt/>

ou contacte a comissão organizadora no endereço de correio eletrónico [ecas2019pt@gmail.com](mailto:ecas2019pt@gmail.com).

Giovani Silva

## • III Encontro Luso-Galaico de Biometria

### *Biometria na cidade dos marnotos!*

Dando continuidade aos encontros científicos de Biometria, organizados conjuntamente pela SPE e pela SGAPEIO, com o primeiro encontro realizado em Braga (I Encontro Luso-Galaico de Estatística em Ambiente e Ecologia, 2013), ao qual se seguiu um encontro temático em Vila Real (I Encontro Luso-Galaico de Estatística em Ambiente e Ecologia, 2014) e o segundo em Santiago de Compostela (II Encontro Galaico-Português de Biometria, 2016), teve lugar no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (DMat-UA), entre 28 e 30 de junho deste ano, o III Encontro Luso-Galaico de Biometria (EBio2018).



O EBio2018 contou com um total de 107 participantes para um vasto programa científico composto por um minicurso, quatro sessões plenárias, oito sessões convidadas, uma mesa-redonda, onze sessões paralelas com 39 comunicações orais e 27 comunicações em pósteres divididas em duas sessões.



O primeiro dia do encontro iniciou-se no período da manhã com o minicurso intitulado “Biometry with compositional data” e ministrado pelo jovem especialista na área dos Dados Composicionais, Karel Hron da Universidade de Palacký (República Checa). No período da tarde, foi dado o início oficial às sessões de trabalho do encontro com a realização da sessão de abertura do EBio2018, que contou com a presença do Vice-Reitor Luís Castro, em representação da Reitoria da Universidade de Aveiro, do diretor do DMat-UA, João Santos, dos presidentes de ambas as sociedades científicas, Maria Eduarda Silva da SPE e César Sánchez-Sellero da SGAPEIO, e da Presidente da Comissão

Organizadora do EBio2018, Magda Monteiro.



Após a abertura oficial dos trabalhos, decorreu a primeira sessão plenária, proferida pelo colega Ricardo Cao da Universidade da Corunha, e o primeiro conjunto de comunicações orais e em pósteres, num total de 25 trabalhos apresentados.



Para finalizar o primeiro dia do encontro, o EBio2018 ofereceu aos seus participantes um agradável momento descontraído. Os congressistas desfrutaram de um passeio a pé até à Fábrica Centro de Ciência Viva de Aveiro onde assistiram e fizeram parte de um divertido espetáculo, o Show da Física.



No espetáculo foram desafiadas as próprias leis da gravidade! Por fim, todos degustaram uns bons petiscos onde não faltaram os famosos ovos moles de Aveiro, entre muitas outras iguarias!



A manhã do segundo dia do EBio2018 contou com três sessões em paralelo, num total de 12 comunicações orais, duas sessões convidadas, de Elizabeth Juarez-Colunga (Universidade de Colorado) e de María Xosé Rodríguez Álvarez (Centro Basco de Matemática Aplicada), a segunda e última sessão de pôsteres com 14 apresentações, terminando com a sessão plenária de Alessandro Fassò da Universidade de Bérghamo.



No período da tarde discutiu-se “O papel do Estatístico nas várias fases do ensaio clínico” com o contributo de Aurora Baluja (Universidade de Santiago de Compostela), Elsa Branco (Novartis-Portugal) e João Branco (IST- Universidade de Lisboa) numa mesa-redonda moderada por Júlio da Motta Singer (Universidade de São Paulo). Houve várias intervenções dos participantes do EBio2018 mostrando tratar-se de um tema bastante atual, com pano para muita manga!





Seguiram-se as sessões convidadas de Ruwanthi Kolamunnage-Dona (Universidade de Liverpool) e Daniel Farewell (Universidade de Cardiff), prosseguindo-se com a sessão plenária de Carlos Daniel Paulino (IST-Universidade de Lisboa). Após o final das sessões de trabalho os participantes tiveram mais um momento de exercício físico indo a pé até ao Rossio, local de embarque para um passeio de barco típico pelos canais da Ria de Aveiro.



O dia ficou concluído com o jantar do encontro onde, antes da refeição, os participantes foram agraciados com um momento musical apresentado pelo Coro de Câmara VOZNUA, muito apreciado por todos.



Durante o jantar decorreu a cerimónia de entrega dos prémios:

1º Prémio Melhor Comunicação Oral apresentada por um jovem investigador  
*Ana Tavares* - DETEÇÃO DE GRUPOS DE OBSERVAÇÕES ATÍPICAS: UMA APLICAÇÃO EM DADOS GENÓMICOS

2º Prémio Melhor Comunicação Oral apresentada por um jovem investigador  
*Andreia Monteiro* - NOVAS ABORDAGENS PARA MODELAÇÃO DE AMOSTRAGEM PREFERENCIAL NA DIMENSÃO TEMPORAL

Prémio Melhor Comunicação em formato de Póster

*Marta Alves* - INFEÇÕES POR PROTOZOÁRIOS INTESTINAIS E DÉFICE DE CRESCIMENTO EM LACTENTES DE SÃO TOMÉ: UM ESTUDO DE COORTE DE NASCIMENTO





Na manhã do último dia do EBio2018 decorreram 9 comunicações orais em três sessões paralelas, seguidas das sessões convidadas proferidas por Bruno Falissard (Universidade de Paris XI) e Luiz Alexandre Peternelli (Universidade Federal de Viçosa). A manhã foi concluída com a sessão plenária de Peter Müller (Universidade do Texas Austin).



No período da tarde tiveram lugar as duas últimas sessões convidadas, apresentadas por Lurdes Inoue (Universidade de Washington) e Raquel Meneses (Universidade do Minho). Antes da sessão de encerramento do encontro foram apresentadas 6 comunicações orais em duas sessões paralelas.



O EBio2018 terminou com uma sessão de encerramento presidida pela Presidente da Comissão Organizadora do encontro, pelos presidentes das sociedades científicas promotoras e pelo Presidente da Comissão Científica, Giovanni Silva. Nesta sessão foi unânime o reconhecimento do sucesso do encontro na sua componente científica, mas não só. Foi dado um agradecimento público a todos quantos contribuíram para a organização do evento, não descurando a fantástica equipa de alunos voluntários no apoio logístico e nem os parceiros do EBio2018. No final do encontro os elementos da Comissão Organizadora estavam bastante agradados pelo apreço recebido e felizes por terem cumprido a missão que lhes foi confiada.



Adelaide Freitas, Laetitia Teixeira, Magda Monteiro e Marco Costa

## • Conferência DYNSTOCH'2018

Realizou-se nos dias 6 a 8 de Junho de 2018, no Porto, a 26ª edição da conferência internacional denominada “DYNSTOCH'2018”. Esta conferência é organizada anualmente no âmbito da rede DynStoch (Métodos Estatísticos para Modelos Estocásticos Dinâmicos) e a edição deste ano decorreu na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. As próximas edições do evento decorrerão, em 2019, na TU Delft e, em 2020, na Universidade de Aarhus, que concorreram em simultâneo com a UPorto na candidatura para o evento de 2018. Este encontro nunca, nas suas 25 edições anteriores, tinha sido realizado em Portugal e as cidades de Copenhaga e Helsínquia são aquelas que mais vezes o receberam no passado. Outras prestigiadas instituições que o receberam foram as Universidades Pierre et Marie Curie (Paris), Lund, Warwick e Heidelberg.

Este prestigiado encontro científico, que pretende reunir a comunidade de investigadores e utilizadores da área de "estatística inferencial para processos estocásticos", conta habitualmente com a participação de investigadores reconhecidos da Europa e do Japão. Este encontro anual é visto como uma ocasião de intercâmbio de ideias e de conhecimentos, muitos deles extremamente recentes, uma oportunidade para estabelecimento de colaborações, e um evento profissionalmente bastante proveitoso. A conferência está e esteve, naturalmente, aberta à participação de todos aqueles que na comunidade científica manifestem interesse pela atividade nela discutida. Esta edição contou com 48 participantes, provenientes de 9 países. Pela primeira vez contou com a participação de um convidado vindo de Israel, Pavel Chigansky (The Hebrew University of Jerusalem).

A **Comissão Científica** foi constituída por: Michael Sørensen (U. Copenhagen), Peter Spreij (U. Amsterdam), Arnaud Gloter (U. Évry), Dasha Loukianova (Fondation Mathématique Jacques Hadamard) e Paula Milheiro-Oliveira (U. Porto).

O objetivo principal da conferência Dynstoch é de contribuir para o desenvolvimento da teoria e prática da inferência estatística para processos estocásticos, aproveitando as ferramentas da moderna Teoria da Probabilidade, incluindo o Cálculo Estocástico e usando métodos intensivos de computação. O foco situa-se em métodos de estimação, testes e predição para modelos dinâmicos complexos, como, por exemplo, difusões ou processos de ramificação. É bem conhecido o interesse destas técnicas, por exemplo, na modelação e análise de dados em finanças, turbulência, neurociências, epidemiologia, telecomunicações, sistemas de energia ou hidrologia. Contribuem também com metodologias para tratamento de “Big Data”.

O programa da conferência deste ano incluiu 35 comunicações orais distribuídas por 2 dias e meio. Destaque, este ano, para os oradores Masayuki Uchida, Nakahiro Yoshida, Mark Podolskij, Markus Bibinger, Jeannette H.C. Woerner, Dasha Loukianova e Frank van der Meulen, Yuri Kutoyants e Pavel Chigansky. O estudante Dmytro Marushkevych e a oradora Patrícia Filipe foram parcialmente financiados pelas verbas angariadas pela organização da conferência, assim como os convidados Yuri Kutoyants e Pavel Chigansky. A organização tem a agradecer à SPE o seu contributo financeiro que, com os restantes contributos, permitiu a realização do encontro com êxito.

A divulgação do evento foi feita usando os canais usuais, a nível nacional recorrendo à Sociedade Portuguesa de Estatística e, a nível internacional, recorrendo a organismos como por exemplo a U. Copenhaga.

Website da conferência: <http://dynstoch2018.fe.up.pt/>,  
<https://sites.google.com/gcloud.fe.up.pt/dynstoch2018/home>

Paula Milheiro Oliveira

## • Prof. Carlos Braumann - última lição em 23 de Maio de 2018

Realizou-se, no passado dia 23 de maio, no Colégio Espírito Santo da Universidade de Évora, a Última Lição do Professor Carlos Alberto dos Santos Braumann, que contou com a presença de muitos colegas, amigos, ilustres académicos e convidados. O sentimento de todos os presentes foi de emoção evidente na ovação ao Professor Carlos Braumann, quando este terminou a sua última lição intitulada “A Matemática, o Acaso e a Vida”.



Num momento de testemunhos de colegas e ex-alunos, as palavras de apreço e de reconhecimento foram inúmeras, recordando várias fases do seu percurso pessoal, como membro ativo da academia e como docente.

Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Évora, lecionou, com mais dois colegas, a primeira aula da Universidade de Évora restaurada, em 1975.

Para além de professor brilhante, teve ao longo do seu percurso um papel bastante importante na Universidade, tendo sido Reitor, Vice-Reitor, Presidente do Conselho Científico, Presidente do Conselho do Departamento de Matemática e da Área Departamental de Ciências Exatas e Diretor do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações.

A sua atividade científica centra-se sobretudo na área das equações diferenciais estocásticas e suas aplicações.

Reconhecido a nível nacional e internacional na divulgação desta área, e da área da Matemática/Probabilidades e Estatística no geral.

Foi Presidente da European Society for Mathematical and Theoretical Biology e da Sociedade Portuguesa de Estatística.

João Nicolau e Patrícia Filipe

## • Centenário do Nascimento do Prof. Pedro Braumann



Em memória do centenário do nascimento do Prof. Pedro Braumann, no passado dia 3 de outubro, o Centro de Matemática e Aplicações da Universidade Nova de Lisboa, em colaboração com a Faculdade de Ciências e Tecnologia da mesma universidade e com a NOVA.FCT Editorial, organizou uma sessão de homenagem.

Nessa ocasião, foi efetuado o lançamento do livro "*Obras de Pedro Bruno Teodoro Braumann - Participações em Diversos Ramos da Matemática*".

O Prof. Pedro Bruno Teodoro Braumann, em 1980, foi um dos sócios fundadores da Sociedade Portuguesa de Estatística e outorgante na Escritura de Formação.

FR

## Enigmística de mefqa

B e t

A Y S  
T /  
C T  
E S

No Boletim SPE primavera de 2018 (p. 9):

EM F O F D E E C L T S S

mixed effects models

27 / 03 / 1857  
S C I E N C E

data science

## Modelos de crescimento populacional usando equações diferenciais estocásticas – tempos de extinção e influência da incorreta especificação do modelo

Clara Carlos, *clara.carlos@estbarreiro.ips.pt*

*Escola Superior de Tecnologia do Barreiro, Instituto Politécnico de Setúbal  
Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Instituto de Investigação e Formação Avançada,  
Universidade de Évora*

### 1. Introdução

Foi com muito prazer que aceitei o convite do Professor Fernando Rosado para escrever um texto para o Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística, cujo tema central é "Equações diferenciais estocásticas e algumas aplicações" (ver Braumann C. A. (2005)).

Sendo uma das principais aplicações biológicas das equações diferenciais estocásticas a dinâmica de populações, apresentamos um modelo geral de crescimento populacional em ambiente aleatório modelado por uma equação diferencial estocástica com ruído aditivo, e particularizamos para dois modelos clássicos de crescimento populacional, o modelo logístico e o modelo de Gompertz, pela sua simplicidade e aparente boa especificação do seu crescimento.

Os tempos de primeira passagem que podem ser consultados em Gihman, I. I. e Skorohod, A. V. (1972) ou Karlin, S. e Taylor, H. (1981), por exemplo, podem ser utilizados para estudar a extinção de populações, em que se considera extinta qualquer população que atinja um limiar de extinção adequadamente escolhido. Neste caso, interessa determinar o tempo que demora para a população atingir um limiar inferior. Quando escolhido um limiar superior, os tempos de primeira passagem podem representar, por exemplo, o tempo que demora para a população atingir o limiar de perigo de uma peste.

A verdadeira taxa de crescimento *per capita* pode afastar-se dos modelos clássicos e nada nos garante que os modelos específicos utilizados retratem o comportamento da população. Contudo, a utilização de modelos específicos é útil para estimar parâmetros e fazer previsões para populações reais, podendo estas seguir um modelo que não coincide exatamente com o modelo específico utilizado.

### 2. Modelo

Seja  $X(t)$  o tamanho (número de indivíduos, biomassa ou densidade) de uma determinada população no instante  $t$ . No caso determinístico, a taxa de crescimento *per capita* representa-se por

$$\frac{1}{X(t)} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t)), \quad (1)$$

com  $X(0) = x > 0$  conhecido e  $f$  uma função de classe  $C^1$ , definida para  $X > 0$ . Um dos primeiros modelos aplicados ao crescimento populacional foi o modelo malthusiano ou modelo exponencial com

$f(X) = r$ , onde  $r$  é constante, ou seja, a taxa de crescimento *per capita* é independente do tamanho da população. Este modelo é bastante simples mas pouco realista, uma vez que pressupõe a inexistência de restrições ao crescimento. Dois modelos clássicos usados na literatura são o modelo logístico, corresponde a  $f(X) = r\left(1 - \frac{X}{K}\right)$ , e o modelo de Gompertz, corresponde a  $f(X) = r \ln\left(\frac{K}{X}\right)$ , com  $K$  a capacidade de sustento do meio, mais realistas que o anterior, uma vez que, a taxa de crescimento diminui à medida que a população aumenta, refletindo a diminuição de recursos para sobrevivência e reprodução de indivíduos à medida que a população vai aumentando. Estes modelos não incluem os conhecidos efeitos de Allee. Em Braumann C. A. e Carlos, C. (2013) apresentámos o estudo do modelo geral de crescimento populacional com efeitos de Allee forte e em Braumann C. A. e Carlos, C. (2015) estudámos o crescimento populacional para um modelo geral com efeitos de Allee fracos. Em Carlos, C. e Braumann, C. A. (2017) estudámos o modelo geral de crescimento populacional sem efeitos de Allee, com efeitos de Allee fraco e com efeitos de Allee fortes.

É natural admitir que as flutuações aleatórias do ambiente afetam a taxa de crescimento populacional e o seu crescimento pode ser modelado por uma equação diferencial estocástica

$${}^{(S)}\frac{1}{X(t)}\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t)) + \sigma\varepsilon(t), \quad (2)$$

onde  $f$  passa a ser a taxa média (geométrica) de crescimento *per capita*, porque usamos o cálculo de Stratonovich ( $S$ ),  $\varepsilon(t)$  é o ruído branco padrão e  $\sigma > 0$  a intensidade do ruído. Se usarmos o cálculo de Itô,  $f$  representa a taxa média (aritmética) de crescimento *per capita*. Para mais detalhes sobre qual o cálculo que devemos utilizar consultar Braumann, C. A. (2007a), Braumann, C. A. (2007b) e Braumann, C. A. (2007c). Na literatura ver, por exemplo, Lange, R., Engen, S. e Saether, B.E (2013) ou Panik, M.J. (2017) sobre aplicações em dinâmica de populações.

Supondo que  $f$  é estritamente decrescente,  $f(0^+) > 0$  e  $f(+\infty) < 0$ , o que acontece para os modelos logístico e de Gompertz, a equação diferencial estocástica (2) tem solução única e é um processo de difusão homogêneo com coeficientes de tendência (média infinitesimal) e de difusão (variância infinitesimal)

$$a(X) = rXf(X) + \frac{\sigma^2}{2}X \quad (3)$$

e

$$b(X) = \sigma^2X^2, \quad (4)$$

respectivamente. O espaço de estados  $(0, +\infty)$  tem fronteiras  $X = 0$  e  $X = +\infty$ , ambas não atrativas e, portanto inatingíveis, ou seja, não há extinção matemática e não existem explosões. Estes resultados podem ser vistos em Braumann, C. A. (1999). Definimos, no interior do espaço de estados, as medidas de escala e de velocidade, cujas densidades são dadas por

$$s(y) := \exp\left(-\int_n^y \frac{2a(\theta)}{b(\theta)}d\theta\right) \quad (5)$$

e

$$m(y) := \frac{1}{b(y)s(y)}, \quad (6)$$

respectivamente.

Existe densidade estacionária, o que significa que há uma distribuição de equilíbrio com densidade para a qual converge a distribuição de probabilidade do tamanho da população quando  $t \rightarrow +\infty$ .

### 3. Tempos de extinção

Nestes últimos anos tenho-me dedicado a estudar os tempos de extinção das populações, tema particularmente interessante no contexto atual. O número de populações em risco de extinção cresce cada vez mais, decorrente dos mais diversos problemas ambientais e humanos. Podemos definir dois tipos de extinção, a extinção matemática e a extinção realista. Considera-se que há extinção matemática quando o tamanho da população  $\rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Como o tamanho da população varia continuamente,

$X(t)$  admite tamanhos da população muito pequenos (como, por exemplo, 0.1 indivíduos) impossíveis de ocorrer, e, embora não esteja extinta do ponto de vista matemático, a população deve considerar-se extinta. Também sabemos que muitas populações quando atingem um determinado número de indivíduos não têm qualquer hipótese de sobreviver e reproduzir-se, devendo nesse caso considerar-se extintas.

Assim iremos definir à partida um limiar realista de extinção, que designamos por  $q$ , com  $q < x$ , onde  $x$  é a população inicial. Como o processo é ergódico significa que passará quase certamente (mais cedo ou mais tarde) pelo limiar realista de extinção. Interessa por isso saber se leva muito ou pouco tempo a ocorrer. Definimos  $T_q$  como o tempo de primeira passagem por  $q$ ,

$$T_q = \inf\{t > 0 : X(t) = q\}, \quad (7)$$

que designamos por tempo de extinção da população.

Em Carlos, C., Braumann, C. A. e Filipe, P. A. (2013) apresentámos a expressão do momento de ordem  $n$  do tempo de primeira passagem de  $X(t)$  por  $q$ , supondo que  $X(0) = x > 0$ ,

$$M_q^{(n)}(x) = E[(T_q)^n | X(0) = x] = 2 \int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} n M_q^{(n-1)}(\theta) m(\theta) d\theta d\zeta, \quad (8)$$

com  $M_q^{(0)}(x) = 1$ . Fazendo  $n = 1$  obtemos o tempo médio de extinção

$$E[T_q | X(0) = x] = 2 \int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} m(\theta) d\theta d\zeta. \quad (9)$$

Com os momentos de primeira e segunda ordem e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos a expressão da variância do tempo de extinção

$$V[T_q | X(0) = x] = 8 \int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} s(\mu) \left( \int_\mu^{+\infty} m(\theta) d\theta \right)^2 d\mu d\zeta. \quad (10)$$

Em Carlos, C. e Braumann, C.A. (2005) e Carlos, C. e Braumann, C.A. (2006) fizemos o estudo detalhado dos tempos de extinção para os modelos logístico e de Gompertz, usando não só o cálculo de Stratonovich mas também o cálculo de Itô. Apresentámos as expressões do comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção e ilustrámos os resultados obtidos com alguns exemplos numéricos. Concluímos que o tempo de extinção é tanto maior quanto maior for a população no instante inicial e diminui quando o parâmetro de crescimento intrínseco diminui ou quando a capacidade de sustento do meio se aproxima do limiar de extinção. O desvio padrão tem a mesma ordem de grandeza do tempo médio.

Também se pode obter os momentos de ordem  $n$  do tempo de primeira passagem pelo limiar superior  $Q$ , com  $x < Q$ , em particular, a média e a variância do tempo de primeira passagem por  $Q$ , relevante, por exemplo, para a preservação de algumas espécies e previsão de surtos de pragas agrícolas. Estas expressões podem ser consultadas em Carlos, C., Braumann, C. A. e Filipe, P. A. (2013) ou Filipe, P. A., Braumann C. A. e Carlos C. (2015), embora aplicados noutra contexto, o de modelos de crescimento individual.

#### 4. Efeito de incorreta especificação do modelo

A verdadeira taxa de crescimento *per capita* pode afastar-se ligeiramente do modelo estocástico, em particular pode haver um pequeno desvio no termo determinístico, onde o modelo logístico e o modelo de Gompertz são apenas aproximações ao modelo real que se desconhece. Estamos perante uma incorreta especificação do coeficiente de tendência.

Suponhamos que a verdadeira taxa de crescimento per capita  $f$  é apenas aproximada pelo modelo logístico com parâmetros  $r$  e  $K$  e suponhamos que o desvio é  $\alpha(X) = f(X) - r \left(1 - \frac{X}{K}\right)$ , isto é, temos o modelo aproximadamente logístico, definido por

$$f(X) = r \left(1 - \frac{X}{K}\right) + \alpha(X). \quad (11)$$

Por outro lado, se a verdadeira taxa de crescimento per capita  $f$  é apenas aproximada pelo modelo de Gompertz com parâmetros  $r$  e  $K$  e supondo que o desvio é  $\alpha(X) = f(X) - r \ln\left(\frac{K}{X}\right)$ , temos o modelo aproximadamente de Gompertz, definido por

$$f(X) = r \ln\left(\frac{K}{X}\right) + \alpha(X). \quad (12)$$

Suponhamos que a função  $\alpha$  é uma função de classe  $C^1$ , com  $\frac{|\alpha(X)|}{r} \leq \delta$ , sendo  $0 \leq \delta < 1$  (espera-se que  $\delta$  esteja próximo de zero).

O comportamento qualitativo dos "verdadeiros modelos" coincide com o comportamento dos modelos clássicos aproximados, o modelo logístico e o modelo de Gompertz. As fronteiras do espaço de estados são  $0$  e  $+\infty$ , ambas não atrativas. A extinção matemática ocorre com probabilidade zero e não existem explosões, garantindo a existência e unicidade de solução da equação diferencial estocástica (2), bem como a existência de densidade estacionária. A extinção realista ocorre com probabilidade um. Para mais detalhes consultar Carlos, C. e Braumann, C.A. (2014).

Também pode suceder que seja o termo estocástico da taxa de crescimento *per capita*, isto é, a intensidade do efeito das flutuações aleatórias, a afastar-se ligeiramente da constante  $\sigma$ , sendo, em vez disso, aproximadamente constante. Estamos perante uma incorreta especificação do coeficiente de difusão.

Deste modo, a taxa de crescimento *per capita* é descrita pela equação diferencial estocástica

$$\frac{1}{X(t)} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t)) + (\sigma + \alpha(X)) \varepsilon(t), \quad (13)$$

com  $f(X) = r\left(1 - \frac{X}{K}\right)$  no caso do modelo logístico ou  $f(X) = r \ln\left(\frac{K}{X}\right)$  para o modelo de Gompertz. Suponhamos que a função  $\alpha$  é uma função de classe  $C^2$ , com  $\frac{|\alpha(X)|}{\sigma} \leq \delta$ , sendo  $0 \leq \delta < 1$ .

Também neste caso o comportamento qualitativo do "verdadeiro modelo" (13) coincide com o comportamento do modelo (2). O espaço de estados é o intervalo  $(0, +\infty)$ , com ambas as fronteiras não atrativas. As fronteiras são inatingíveis em tempo finito ou infinito, isto é,  $X$  não tende para  $0$  nem tende para  $+\infty$  quando  $t$  tende para  $+\infty$ . Em particular, não há extinção matemática e, como não existem explosões, garantimos a existência e unicidade de solução da equação diferencial estocástica (13). Também neste caso existe densidade estacionária.

Para estes modelos fizemos o estudo dos tempos de extinção, em particular, escrevemos as expressões da média e do desvio padrão. Apresentámos alguns exemplos numéricos do comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção. Obtivemos minorantes e majorantes para a média e para o desvio padrão dos tempos de extinção, o que nos permite estudar o erro cometido nos cálculos dos tempos de extinção quando o modelo real não é exatamente o usualmente utilizado na literatura. Estes limites podem ser escritos em função das expressões do comportamento da média e o desvio padrão dos modelos clássicos com outros parâmetros. Assim, poderemos obter os modelos clássicos como aproximação e estimar o erro cometido quando o fazemos. Ao comparar estes dois erros de aproximação podemos concluir que, se o erro de especificação do modelo estiver no coeficiente de tendência, o erro no cálculo da média e da variância do tempo de extinção é menor do que se o erro de especificação estiver no coeficiente de difusão.

## 5. Exemplos gráficos

Terminamos com a apresentação de alguns exemplos gráficos do tempo médio de extinção para os modelos logístico e de Gompertz. Pode ver-se em Carlos C. (2013) muitos outros exemplos gráficos e um estudo comparativo para os diferentes parâmetros.

Para facilitar a análise e como é tradicional em estudos de sistemas dinâmicos trabalhamos com grandezas adimensionais, considerando  $R = \frac{r}{\sigma^2}$  ( $R$  é uma espécie de relação sinal/ruído),  $d = \frac{q}{K}$  ( $d$  representa o limiar de extinção expresso como fração da capacidade de sustento do meio) e  $z = \frac{x}{q}$  ( $z$  o afastamento relativo da população inicial relativamente ao limiar de extinção). Consideramos  $R = 1$ , ou seja,  $r = \sigma^2$ , o que significa que temos um ruído de forte intensidade relativa e  $d = 0,01$  ou  $d = 0,1$ , equivalente a  $q = \frac{K}{100}$  ou  $q = \frac{K}{10}$ , respetivamente.



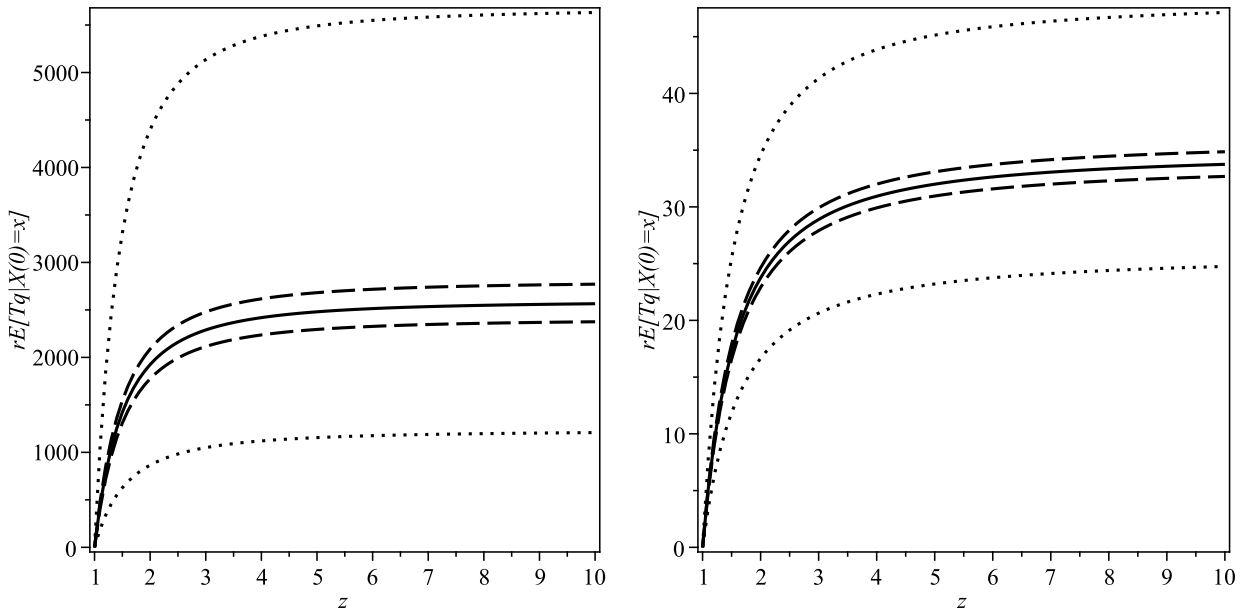


Figura 1: Comportamento da média  $rE[T_q|X(0) = x]$  do tempo de extinção da população em função de  $z := \frac{x}{q}$  para o modelo logístico (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e o majorante para o modelo aproximadamente logístico, com o erro relativo de  $\delta = 0.01$  (linhas a tracejado) e  $\delta = 0.1$  (linhas a ponteadas). Consideramos  $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ ,  $d := \frac{q}{K} = 0.01$  (à esquerda) e  $d := \frac{q}{K} = 0.1$  (à direita).

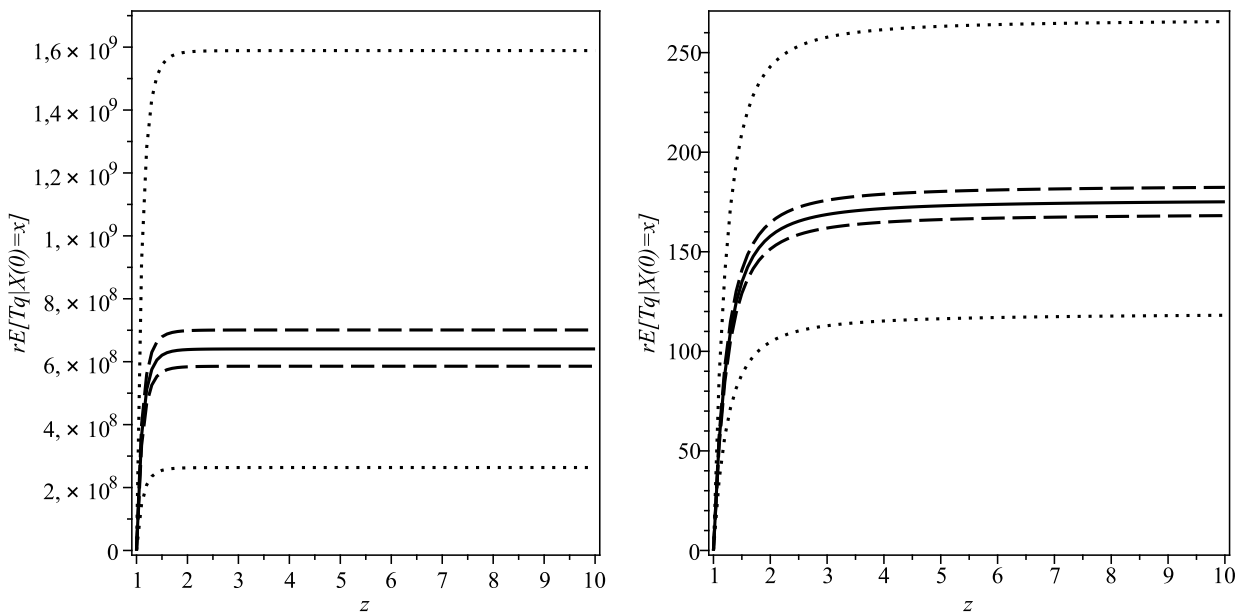


Figura 2: Comportamento da média  $rE[T_q|X(0) = x]$  do tempo de extinção da população em função de  $z := \frac{x}{q}$  para o modelo de Gompertz (linha a cheio). A figura também mostra o minorante e majorante para o modelo aproximadamente de Gompertz, com o erro relativo de  $\delta := 0.01$  (linhas a tracejado) e  $\delta := 0.1$  (linhas a ponteadas). Consideramos  $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$ ,  $d := \frac{q}{K} = 0.01$  (à esquerda) e  $d := \frac{q}{K} = 0.1$  (à direita).

Na figura 1 apresentamos exemplos gráficos não do tempo médio de extinção mas da grandeza adimensional  $rE[T_q|X(0) = x]$  em função de  $z = \frac{x}{q}$ , para o modelo logístico e modelo aproximadamente logístico (com erro relativo da taxa de crescimento *per capita* relativamente ao modelo logístico de  $\delta = 0,01$  e de  $\delta = 0,1$ ). Na figura 2 apresentamos exemplos gráficos de  $rE[T_q|X(0) = x]$  em função de  $z = \frac{x}{q}$ , para o modelo de Gompertz e modelo aproximadamente de Gompertz (com erro relativo da taxa de crescimento *per capita* relativamente ao modelo de Gompertz de  $\delta = 0,01$  e de  $\delta = 0,1$ ).

## Agradecimentos

A autora é membro do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações UID/MAT/04674/2013, Universidade de Évora, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

## Referências

- Braumann, C. A. (1999) - Applications of stochastic differential equations to population growth. *Proceedings of the Ninth International Colloquium on Differential Equations* (Bainov, D., Ed.), VSP, Utrecht, 47–52.
- Braumann, C. A. (2005) - *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*. Edições SPE, Lisboa.
- Braumann, C. A. (2007a) - Itô versus Stratonovich calculus in random population growth. *Mathematical Biosciences*, 206: 81–107.
- Braumann, C. A. (2007b) - Harvesting in a random environment: Itô or Stratonovich calculus. *Journal Theoretical Biology*, 244: 424–432.
- Braumann, C. A. (2007c) - Population growth in random environments: which stochastic calculus? *Bulletin of the International Statistical Institute*, LXII: 5802–5805.
- Braumann, C. A. e Carlos, C. (2013) - Allee effects in randomly varying environments. *Proceedings of the 2013 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, (Hamilton, I. P.; Vigo-Aguiar, J., Eds.), Cabo de Gata, Almería, Espanha, ISBN 978-84-616-2723-3, 304–307.
- Braumann, C. A. e Carlos, C. (2015) - Weak Allee effects population growth models in a random environment. *Proceedings 60th ISI World Statistics Congress*, 2455–2460.
- Carlos, C. e Braumann, C. A. (2005) - Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório. *Estatística Jubilar*, Braumann, C. A., Infante, P., Oliveira, M. M., Alpizar-Jara, R. and Rosado, F. (Eds.), Edições SPE, p. 133–142.
- Carlos, C. e Braumann, C. A. (2006) - Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório e cálculos de Itô e Stratonovich. *Ciência Estatística*, L. Canto e Castro, E. G. Martins, C. Rocha, M. F. Oliveira, M. M. Leal and F. Rosado (Eds.), Edições SPE, p. 229–238.
- Carlos, C., Braumann, C. A. e Filipe, P. A. (2013) - Models of individual growth in a random environment: study and application of first passage times. *Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications*, Springer, Berlin, 103–111.
- Carlos, C. (2013) - *Modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório, efeito de incorreta especificação do modelo, efeitos de Allee e tempos de extinção*, Tese de Doutoramento, Universidade de Évora
- Carlos, C., Braumann, C. A. (2014) - Consequences of an Incorrect Model Specification on Population Growth. *New Advances in Statistical Modeling and Applications, Studies in Theoretical and Applied Statistics* Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-319-05322-6, p.105-113.
- Carlos, C. e Braumann, C. A. (2017) - General population growth models with Allee effects in a random environment. *Ecological Complexity*, 30, 26–33.
- Filipe, P. A., Braumann C. A. e Carlos, C. (2015) - Profit optimization for cattle growing in a randomly fluctuating environment. *Optimization*, 64(6), p. 1393-1407.
- Gihmann, I. I. e Skorohod, A. V. (1972) - *Stochastic Differential Equations*. Springer, New York.
- Lange, R., Engen, S. e Saether, B-E. (2013) - *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, Oxford.
- Karlin, S. e Taylor, H. (1981) - *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, Orlando.
- Panik, M. J. (2017). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications in Population Dynamics Modeling*. John Wiley & Sons, Inc.



# Probabilidades e Hidrodinâmica

Ana Bela Cruzeiro, *abcruz@math.tecnico.ulisboa.pt*

*Grupo de Física-Matemática e Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico  
Universidade de Lisboa*

## 1. Introdução

As relações entre as Probabilidades e as Equações às Derivadas Parciais estão na base da construção de processos estocásticos, nomeadamente do movimento Browniano. Entre outros, lembremos alguns exemplos dessas relações. Seja  $B_t$  um movimento Browniano com valores em  $\mathbb{R}^d$ . Sabemos que

$$v(t, x) = E_x(f(B_t)),$$

onde  $E_x$  denota a esperança condicionada a  $B_0 = x$ , resolve a equação do calor, que por sua vez descreve a evolução do calor ao longo do tempo e numa certa região do espaço (neste caso simplesmente  $\mathbb{R}^d$ ):

$$\partial_t v = \frac{1}{2} \Delta v$$

com condição inicial  $f$ . Mais geralmente, soluções da equação às derivadas parciais  $\partial_t v = \frac{1}{2} \Delta v + b \cdot \nabla v$  podem ser representadas probabilisticamente pela célebre fórmula de Girsanov,

$$v(t, x) = E_x \left( f(B_t) \exp \left( \int_0^t b(B_s) \cdot dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |b(B_s)|^2 ds \right) \right)$$

e soluções da equação  $\partial_t v = \frac{1}{2} \Delta v + Vv$  pela fórmula de Feynman-Kac,

$$v(t, x) = E_x \left( f(B_t) \exp \left( \int_0^t V(B_s) ds \right) \right).$$

Também equações estacionárias são passíveis de representação probabilística. Por exemplo a solução do problema de Dirichlet

$$\frac{1}{2} \Delta v + Vv = 0$$

num domínio regular  $D$  sujeito à condição de fronteira  $v = g$  em  $\partial D$ , pode escrever-se (assumimos nesta introdução que todas as funções são regulares),

$$v(t, x) = E_x \left( f(B_\tau) \exp \left( \int_0^\tau V(B_s) ds \right) \right),$$

onde agora o limite superior de integração é o tempo aleatório  $\tau = \inf \{t : B_t \notin D\}$ ,  $B_0 = x$ .

Todas estas fórmulas de representação probabilística se podem generalizar para o caso em que, em vez do Laplaciano, consideramos um operador (digamos, elíptico) da forma

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma \sigma^T)_{i,j}(x) \partial_{i,j}^2 f + b \cdot \nabla f.$$

A chave da generalização encontra-se na possibilidade, descoberta por K. Itô nos anos cinquenta do século passado, de associar ao operador  $L$  uma equação diferencial estocástica,

$$dX_t = \sigma(X_t) \cdot dB_t + b(X_t) dt$$

onde  $dB_t$  refere ao diferencial em relação ao movimento Browniano conhecido como diferencial de Itô. Então as fórmulas de representação para as equações às derivadas parciais análogas às referidas acima onde se substitui o operador Laplaciano por  $L$ , escrevem-se substituindo o movimento Browniano pelo processo estocástico  $X_t$ .

Existe uma vasta literatura sobre as relações entre Análise Estocástica e Equações às Derivadas Parciais. Aqui citamos, a título de exemplo, [6], [14], [18], [20].

Todas as equações às derivadas parciais de que falámos até agora são lineares ( $L$  é um operador linear), mas existem também relações entre equações não lineares e processos estocásticos, uma classe das quais constitui o objecto deste artigo.

## 2. A equação de Navier-Stokes

Embora a teoria que passamos a expôr seja bastante mais geral, concentrar-nos-emos no caso da equação de Navier-Stokes que, como é sabido, modeliza o escoamento de fluidos viscosos e incompressíveis. Esta equação escreve-se,

$$\partial_t u = \nu \Delta u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0.$$

A constante  $\nu > 0$  representa a viscosidade,  $p$  a pressão, e a condição de divergência nula corresponde à incompressibilidade do fluido. De notar que a pressão não é um dado do problema, mas também uma incógnita.

Em Dinâmica dos fluidos é comum distinguir entre dois tipos de abordagem, a Euleriana, que refere à velocidade do fluido representada pelo campo de vectores  $u$  solução da equação de Navier-Stokes, e a abordagem Lagrangiana. Esta última consiste no estudo das trajetórias associadas ao movimento ou seja, dos fluxos integrais  $g$  que satisfazem

$$\partial_t g(t, x) = u(t, g(t, x)).$$

Aparentemente equivalentes, as duas abordagens não o são em geral, uma vez que nem sempre o campo de vectores velocidade tem regularidade suficiente para que exista solução da equação para o fluxo Lagrangiano.

Quando a viscosidade é nula, a equação de Navier-Stokes reduz-se à famosa equação de Euler incompressível,  $\partial_t u = -(u \cdot \nabla)u - \nabla p$ ,  $\operatorname{div} u = 0$ .

Num célebre artigo de 1966, Vladimir Arnold ([5]) mostrou que a equação de Euler corresponde à equação de uma geodésica num certo espaço de funções. Mais precisamente as correspondentes trajetórias Lagrangianas são “pontos” críticos do funcional de acção dado pela energia cinética associada à norma  $L^2$ :

$$A[g] = \frac{1}{2} \int_0^T \int |\partial_t g(t)(x)|^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \|\dot{g}(t)\|_{L^2(dx)}^2 dt$$

onde  $L^2$  refere à integração no espaço subjacente (aqui  $\mathbb{R}^d$ , mas mais geralmente uma variedade),  $\dot{g}$  designa a derivada de  $g$  em relação ao tempo.

Com efeito, escrevendo  $L(g, \dot{g}, t) = \frac{1}{2} \|\dot{g}(t)\|_{L^2(dx)}^2$  o Lagrangiano daquela acção, é simples deduzir que as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{g}} \right) - \frac{\partial L}{\partial g} = 0$$

se reduzem a

$$\frac{d}{dt} [\dot{g}(t)] = 0$$

ou seja obtém-se, formalmente, a equação de Euler (no sentido fraco  $L^2$ ). Devido à condição de incompressibilidade há que acrescentar *a posteriori* na equação um termo do tipo  $-\nabla p(t)$ , sendo  $p(t)$  a pressão no instante  $t$ .

Uma referência bastante completa sobre este tema e sobre as consequências do uso de métodos topológicos e geométricos no estudo da equação de Euler é o livro [21].

A equação de Euler é um sistema conservativo (ou seja, a energia é conservada ao longo da evolução no tempo), contrariamente à equação de Navier-Stokes. A questão de saber se existe também uma formulação variacional para esta equação é portanto não trivial. A resposta é no entanto afirmativa, se recorrermos à Análise Estocástica, como veremos na próxima secção. Descreveremos igualmente que o termo Laplaciano da equação de Navier-Stokes está (naturalmente) associado ao movimento Browniano.

### 3. Um princípio variacional estocástico

De modo a generalizar o princípio variacional da equação de Euler, consideramos, em vez de trajectórias Lagrangianas regulares, soluções das seguintes equações diferenciais estocásticas:

$$dg_t^u = \sqrt{2\nu}dB_t + u(t, g_t^u)dt, \quad g_0^u = x$$

e escrevemos por vezes  $g_t(x)$  de modo a sublinhar a dependência da condição inicial  $x$ .

Na realidade em certas aplicações consideram-se mais geralmente coeficientes de difusão não constantes, admitindo-se portanto correlações espaciais. Tal é o caso, em dinâmica dos fluidos, onde por vezes esses coeficientes de difusão são escolhidos a partir dos dados estatísticos observados (c.f. [17]).

Para campos de vectores suficientemente regulares estas equações definem fluxos (homeomorfismos) no espaço e, se impusermos a condição  $\operatorname{div} u = 0 \forall t$ , esses fluxos conservam a medida de Lebesgue, ou seja tem-se

$$\int E(f(g_t^u(x)))dx = \int f(x)dx$$

para todo o  $t$  e  $f$  suficientemente regular.

A primeira dificuldade com que nos deparamos para escrever um funcional de acção é que os processos estocásticos  $g^u$  não são diferenciáveis no tempo. No entanto é possível definir a seguinte “derivada generalizada”, denotada  $D_t$ :

$$D_t f(t, g_t^u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( E^{P_t} f(t + \varepsilon, g_{t+\varepsilon}^u) - f(t, g_t^u) \right)$$

onde  $E^{P_t}$  denota a esperança condicional relativamente à filtração  $P_t$  gerada pelo passado do processo no instante  $t$ . Do Cálculo de Itô sabemos que  $D$  é o gerador do processo  $g$ , ou seja que

$$D_t f(t, g_t^u) = (\nu \Delta f + (u \cdot \nabla f) + \partial_t f)(t, g_t^u) \quad \text{q.s.}$$

Em particular  $D_t g_t = u(t, g_t)$  q.s., o que justifica a interpretação do *drift* ( $u$ ) do processo estocástico como uma derivada.

Definimos então o seguinte funcional de acção estocástico sobre a classe de processos estocásticos  $g^u$  com coeficiente de difusão  $\sqrt{2\nu}$  e *drift*  $u$ , como acima, onde  $u \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ :

$$A[g^u] = \frac{1}{2} E \int_0^T \int |Dg_t^u(x)|^2 dx dt.$$

A questão de saber se, apenas com a regularidade  $L^2$  do *drift*, o processo estocástico  $g^u$  está bem definido e fornece um fluxo de homeomorfismos, não é uma questão trivial. De facto, em princípio este tipo de resultados exige muito mais regularidade. No entanto, e usando a condição  $\operatorname{div} u = 0$  é possível provar tais resultados, pelo menos no caso de se considerar, em vez do espaço  $\mathbb{R}^d$ , um toro (c.f. [8] para o caso de dimensão dois), o que corresponde a impôr condições periódicas no espaço às equações do movimento.

Finalmente, de modo a deduzir o princípio variacional, devemos precisar que tipo de variações são admissíveis. Escolhemos variações do tipo exponencial, nomeadamente

$$g_t^{u, \varepsilon, \nu} = e_t(\varepsilon \nu)(g_t^u),$$

onde

$$e_t(\varepsilon \nu)(x) = x + \varepsilon \int_0^t \partial_s \nu(s, e_s(\varepsilon \nu)(x)) ds$$

com  $\varepsilon > 0$  e onde  $v(t, \cdot)$  é um campo de vectores regular, dependente do tempo, tal que  $v(0) = v(T) = 0$  e  $\operatorname{div} v(t, \cdot) = 0$  para todo o  $t \in [0, T]$ .

Observe-se que, na primeira ordem em  $\varepsilon$  se está a variar nas direcções de  $v$ , uma vez que

$$e_t(\varepsilon v)(x) \simeq x + \varepsilon v(t, x).$$

Por definição  $g$  é ponto crítico de  $A$  se, para todo o  $v$  como acima, se tem

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} A [g^{u, \varepsilon, v}] = 0.$$

Pela fórmula de Itô,

$$dg_t^{u, \varepsilon, v} = \nabla e_t(\varepsilon v)(g_t^u) \sqrt{2v} dB_t + [\partial_t e_t(\varepsilon v) + (u \cdot \nabla) e_t(\varepsilon v) + v \Delta e_t(\varepsilon v)](g_t^u) dt$$

e, consequentemente,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} A [g_t^{u, \varepsilon}] = E \int_0^T \int (u(t, x) \cdot [\partial_t v + (u \cdot \nabla)v + v \Delta v])(t, g_t^u) dt dx$$

Usando a invariância da medida de volume tem-se ainda

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} A [g_t^{u, \varepsilon, v}] &= \int_0^T \int (u \cdot [\partial_t v + (u \cdot \nabla)v + v \Delta v])(t, x) dt dx \\ &= - \int_0^T \int ([\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - v \Delta u] \cdot v) dt dx \end{aligned}$$

onde usámos integração por partes, a condição  $\operatorname{div} u = 0$  e ainda o facto de  $v(0) = v(T) = 0$ .

Concluimos assim que a derivada do funcional de acção  $A$  quando se consideram as variações acima é igual a zero (ou seja, o processo estocástico  $g_t^u$  é crítico para  $A$ ) se e só se o campo de vectores  $u(t, \cdot)$  satisfaz a equação de Navier-Stokes no sentido fraco  $L^2$ .

O princípio variacional estocástico para a equação de Navier-Stokes que descrevemos foi introduzido em [8] no caso do toro de dimensão dois e posteriormente generalizado para variedades em [3] (ver igualmente o artigo [4]). Na base das ideias subjacentes estão os trabalhos [24] e [25]. De referir que existem diferentes tipos de abordagem probabilística àquela equação: [9], [15], [19], por exemplo.

#### 4. Equações diferenciais estocásticas “forward-backward”

Com uma simples mudança de variável, nomeadamente considerando  $\tilde{g}_t^u = g_t^u$ , onde  $\tilde{u}(t, x) = -u(T - t, x)$ , e aplicando o Cálculo de Itô, facilmente verificamos que

$$\begin{aligned} D_t D_t \tilde{g}_t^u &= \partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} + v \Delta \tilde{u} \\ &= \partial_t u + u \cdot \nabla u - v \Delta u \end{aligned}$$

ou seja, se  $u$  verifica a equação de Navier-Stokes, então  $D_t D_t \tilde{g}_t^u = -\nabla p_t$ .

De outra forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} d\tilde{g}_t^u &= \sqrt{2v} dB_t + Y_t, \quad \tilde{g}_0^u = x \\ dY_t &= dM_t - \nabla p_t \end{aligned}$$

onde  $M_t$  designa uma martingala (o termo de difusão do processo estocástico  $Y_t = \tilde{u}(t, \tilde{g}_t)$ ).

Este último par de equações é um sistema de equações “forward-backward” estocástico. Trata-se, no mundo das probabilidades, do sistema de equações mais próximo das de segunda ordem da Mecânica clássica. De modo a constituírem um problema bem posto à equação para  $Y_t$  deve ser dado um valor final  $Y_T$  o que corresponde, no nosso caso, a especificar o valor inicial de  $u$ , tal como no problema de Cauchy usual para a equação de Navier-Stokes.

As equações diferenciais estocásticas “forward-backward” são um tema de investigação bem conhecido, relacionado com a teoria do Controle Ótimo. Entre muitas outras possíveis referências a este tema indicamos [13] e [22].

No entanto a situação que aqui nos interessa é bastante mais complicada. Em primeiro lugar, a imposição da condição de incompressibilidade obriga-nos a trabalhar não num espaço de dimensão finita (caso das referências acima), mas num espaço funcional, necessariamente de dimensão infinita. Em segundo lugar, conforme já observámos, a pressão não é um dado do problema, mas também uma incógnita. Ou seja, se podemos observar com facilidade que, partindo de uma solução da equação de Navier-Stokes se chega a um sistema diferencial estocástico “forward-backward”, o problema recíproco (como chegar à solução de Navier-Stokes resolvendo um sistema “forward-backward” estocástico) não é simples. Para este problema fazemos referência aos artigos [11] e [12]. Neste último obtivemos um resultado de existência para a equação da vorticidade associada a Navier-Stokes no caso bidimensional. O primeiro trata da representação das soluções de Navier-Stokes em termos de sistemas “forward-backward” estocásticos.

## 5. Generalizações

O funcional de acção  $A$  considerado na secção 3 está definido sobre processos estocásticos  $g$  que tomam valores nos difeomorfismos do espaço de configurações subjacente. Este conjunto constitui um grupo (relativamente à composição) de dimensão infinita. Trata-se de facto “apenas” de um caso particular de uma teoria mais vasta, que poderemos chamar Mecânica Geométrica Estocástica. Na Mecânica Geométrica clássica são considerados princípios variacionais formulados em grupos de Lie, cujas equações do movimento correspondente são as equações de Euler-Poincaré (c.f. [16], [23]). O caso dos grupos de difeomorfismos dá origem precisamente à equação de Euler, mas muitas outras equações são assim obtidas, tanto em grupos de dimensão finita como de dimensão infinita.

Uma generalização estocástica da Mecânica Geométrica, e as correspondentes equações de Euler-Poincaré dissipativas, foi feita em [1] e continua actualmente a ser desenvolvida pelos seus autores e por outros colaboradores (c.f. por exemplo [7]). Várias questões são (e serão) investigadas, nomeadamente questões de existência e unicidade das equações (em vários sentidos), estudo das simetrias dos sistemas, métodos numéricos geométricos, etc. Outros modelos para além da equação de Navier-Stokes foram estudados (por exemplo as equações de Camassa-Holm e Leray-alpha dissipativas, c.f. [10]).

Finalmente observamos, embora a explicação devesse necessariamente ser um pouco longa, que existe uma relação entre o tipo de problemas aqui expostos e a teoria do Transporte Optimo. Para os leitores interessados, referimos o recente trabalho [2].

## REFERENCES

- [1] M. Arnaudon, X. Chen, A.B. Cruzeiro, *Stochastic Euler-Poincaré reduction*, J. Math. Phys. 55 (2014), 081507.
- [2] M. Arnaudon, A.B. Cruzeiro, C. Léonard, J.-C. Zambrini, An entropic interpolation problem for incompressible viscous fluids, arXiv:1704.02126
- [3] M. Arnaudon, A.B. Cruzeiro, *Lagrangian Navier-Stokes diffusions on manifolds: variational principle and stability*, Bull. Sci. Math., 136, 8 (2012), 857-881.
- [4] M. Arnaudon, A.B. Cruzeiro and N. Galamba, *Lagrangian Navier-Stokes flows: a stochastic model*, J. Phys A 44 no 17 (2011), 175501.
- [5] V. I. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier 16 (1966), 316–361.
- [6] R. F. Bass, *Diffusions and elliptic operators*, Springer-Verlag Probability and its Applications, 1998.
- [7] X. Chen, A.B. Cruzeiro, T.S. Ratiu, *Stochastic variational principles for dissipative equations with advected quantities*, arxiv.org/pdf/1506.05024.pdf
- [8] F. Cipriano, A.B. Cruzeiro, *Navier-Stokes equation and diffusions on the group of homeomorphisms of the torus*, Comm. Math. Phys. 275 (2007), no. 1, 255–269.
- [9] P. Constantin, G. Iyer, *A stochastic Lagrangian representation of 3-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. 61, 3 (2008), 330–345.
- [10] A.B. Cruzeiro, G. Liu, *A stochastic variational approach to the viscous Camassa-Holm and Leray-alpha equations*, Stoch. Proc. and their Applic. 127, 1 (2017), 1–17
- [11] A.B. Cruzeiro, E. Shamarova, *Navier-Stokes equations and forward-backward SDEs on the group of diffeomorphisms of the torus*, Stoch. Proc. and their Applic. 119 (2009), 4034–4060.
- [12] A.B. Cruzeiro, Z. Qian, *Backward stochastic differential equations associated with the vorticity equation*, J. Funct. Anal. 267, 3 (2014), 660–677.

- [13] G. Dos Reis, *Some advances on quadratic BSDE: Theory - Numerics - Applications*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.
- [14] R. Durrett, *Brownian motion and martingales in analysis*, Wadsworth, 1984.
- [15] D.A. Gomes, *A variational formulation for the Navier-Stokes equation*, *Comm. Math. Phys.* 257, 1 (2005), 227–234.
- [16] D.D. Holm, *Geometric Mechanics*, Vol. I, II, World Scientific, 2008.
- [17] D.D. Holm, *Variational principles for stochastic fluid dynamics*, *Proc.A.* 475, 2176 (2015), 20140963.
- [18] N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North Holland, 1981.
- [19] A. Inoue, T. Funaki, *A new derivation of the Navier-Stokes equation*, *Comm. Math. Phys.* 65 (1979), 83–90.
- [20] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian motion and Stochastic calculus*, Springer-Verlag, 1988.
- [21] B. Khesin, *Groups and topology in the Euler hydrodynamics and KdV*, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, 2008.
- [22] J. Ma, J. Yong, *Forward-backward stochastic differential equations and their applications*, Springer-Verlag Lecture Notes in Math., 2007.
- [23] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag Texts in Applied Math., 2002.
- [24] T. Nakagomi, K. Yasue, J.-C. Zambrini, *Stochastic variational derivations of the Navier-Stokes equations*, *Lett. Math. Phys.* 160 (1981), 337–365.
- [25] K. Yasue, *A variational principle for the Navier-Stokes equation*, *J. Funct. Anal.* 51 (1983), 133–141.





# Equações Diferenciais Estocásticas: alguns exemplos e aplicações em Finanças

João Guerra, [jguerra@iseg.ulisboa.pt](mailto:jguerra@iseg.ulisboa.pt)  
João Nicolau, [jnicolau@iseg.ulisboa.pt](mailto:jnicolau@iseg.ulisboa.pt)

*Departamento de Matemática e CEMAPRE  
ISEG, Universidade de Lisboa*

## 1 Introdução

O cálculo infinitesimal desenvolvido por Newton e Leibniz no século XVII é provavelmente o ramo da Matemática com maior sucesso e com maior número de aplicações em diferentes áreas científicas. As teorias das equações diferenciais ordinárias e parciais que assentam no cálculo infinitesimal são particularmente importantes nas aplicações, uma vez que uma boa parte dos modelos usados nas mais diversas áreas são formulados precisamente em termos de equações diferenciais. Em muitos modelos é essencial considerar perturbações aleatórias, o que se traduz na transformação das equações diferenciais determinísticas em equações diferenciais estocásticas. Para analisar as questões fundamentais da existência e unicidade de soluções, assim como as propriedades das mesmas, é essencial aplicar o correspondente estocástico do cálculo infinitesimal: o cálculo estocástico ou análise estocástica.

As aplicações da análise estocástica e das equações diferenciais estocásticas são inúmeras e nas mais variadas áreas científicas. Destacamos algumas aplicações em Finanças como modelos de avaliação de opções e ativos financeiros derivados (modelos de Black-Scholes, modelos de volatilidade estocástica, modelo CEV) e modelos de evolução de taxas de juro (modelos de Vasicek, CIR, Hull-White, CEV com drift linear). Outras aplicações importantes ocorrem nas áreas de Biologia (modelos populacionais), Física (osciladores aleatórios, difusão turbulenta), Engenharia (problemas de filtragem de ruído, controlo estocástico, estabilidade de órbitas de satélites), Psicologia Experimental (modelo de Schöner) e medicina (modelo de actividade neuronal de Kallianpur). Para uma discussão detalhada de algumas destas aplicações, recomendamos a consulta de [3, 4, 13, 14, 15, 21, 24]. Uma breve história do cálculo estocástico e das suas aplicações financeiras é apresentada no artigo de Jarrow e Protter [12], cuja leitura vivamente se recomenda. A referência [6] é excelente para uma introdução rigorosa às equações diferenciais estocásticas.

Relativamente às aplicações financeiras da análise estocástica e das equações diferenciais estocásticas, o autor pioneiro foi Louis Bachelier, que na sua tese de doutoramento em 1900 [2], usou o movimento Browniano para modelar a evolução dos preços de ativos financeiros. Este foi o primeiro modelo estocástico financeiro a ser proposto e descreve a evolução do preço de um ativo financeiro através do processo estocástico

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

onde  $S_0 > 0$  é o preço inicial,  $\mu$  e  $\sigma$  são os parâmetros do modelo e  $W = \{W_t, t \in [0, T]\}$  é um movimento Browniano standard. Este modelo apresenta a característica indesejável de permitir preços negativos para o ativo financeiro. De forma a remediar este problema, Samuelson introduziu o movimento Browniano geométrico em [22], considerando o processo

$$S_t = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]. \quad (1)$$

O movimento Browniano geométrico  $S_t$  tem uma distribuição lognormal.

Em 1973, Black, Scholes [5] e Merton [17] desenvolveram o modelo conhecido na literatura como o modelo de Black-Scholes, que revolucionou o mundo financeiro e desencadeou o crescimento imparável do mercado de produtos financeiros derivados. Na sua versão mais simples, o modelo considera um mercado sem atritos e com apenas dois ativos. O primeiro ativo é um ativo com risco, com processo de preço  $S = \{S_t, t \in [0, T]\}$  descrito pelo movimento Browniano geométrico (1). O segundo ativo é um ativo sem risco. O modelo de Black-Scholes é um modelo completo, no sentido em que qualquer direito contingente (derivado financeiro ou opção) pode ser replicado por uma carteira dos ativos considerados no modelo. Avaliando o valor da carteira replicante, obtém-se um preço único para o preço do direito contingente (ou derivado financeiro).

O modelo de Black-Scholes tornou-se bastante popular a partir dos anos 70 do século passado. Contudo, apresenta alguns problemas. Um dos problemas é que a assimetria e a curtose que caracterizam a distribuição empírica dos retornos logarítmicos são consideravelmente diferentes da assimetria e curtose associadas à distribuição normal, o que significa que os movimentos bruscos e de grande amplitude nos preços dos ativos são muito mais frequentes que o que seria de esperar de um processo de preço dado pelo movimento Browniano geométrico (ver [8] e [23]). A distribuição empírica dos retornos logarítmicos apresenta “caudas pesadas”, quando comparada com a distribuição Gaussiana. Por isso, outros modelos mais sofisticados têm sido propostos para modelar a dinâmica do preço do ativo com risco, como por exemplo modelos baseados em processos de Lévy ou processos de volatilidade estocástica. Para uma introdução a este tipo de modelos mais sofisticados, recomendamos a consulta de [3, 9, 13, 23].

Neste artigo apresentaremos de forma sucinta o modelo de Black-Scholes na sua versão mais elementar, apresentaremos exemplos de equações diferenciais estocásticas para modelar taxas de juro, assim como discutiremos o problema da estimação de parâmetros.

## 2 Modelo de Black-Scholes

Consideremos um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , o movimento Browniano  $W = \{W_t; t \geq 0\}$  e a filtração  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  gerada pelo movimento Browniano.

As equações diferenciais que definem o modelo de Black-Scholes são as seguintes:

$$dB_t = rB_t dt, \tag{2}$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{3}$$

onde  $r, \mu$  e  $\sigma$  são constantes (parâmetros do modelo). Representa-se por  $B_t$  o preço de um ativo sem risco (obrigação ou depósito bancário) - é uma função determinística,  $S_t$  é o processo de preço de um ativo com risco (ação ou índice) e é um processo estocástico,  $W_t$  é um movimento Browniano standard relativamente à medida de probabilidade  $P$ ,  $r$  é a taxa de juro sem risco,  $\mu$  é a taxa média de rentabilidade (ou a taxa média de crescimento do preço -  $E[S_t] = S_0 e^{\mu t}$ ) e  $\sigma$  é a volatilidade do ativo com risco. A equação diferencial estocástica (3) é uma equação linear que obviamente tem uma única solução (dada a condição inicial  $S_0$ ). Essa solução é o movimento Browniano geométrico:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right).$$

Consideremos um direito contingente com maturidade  $T$  (por exemplo, um derivado financeiro ou opção), com payoff da forma

$$\chi = \Phi(S(T)), \tag{4}$$

e cujo processo de preço é tal que

$$\Pi(t) = F(t, S_t), \quad \forall t \in [0, T], \tag{5}$$

onde  $F$  é uma função diferenciável de classe  $C^{1,2}$ .

Considere-se também uma carteira de ativos  $(h^0(t), h^1(t))$  onde  $h^0(t)$  representa o número de obrigações (ou número de unidades do ativo sem risco) e  $h^1(t)$  representa o número de ações (ou o número de unidades do ativo com risco) no instante  $t$ . O valor da carteira no instante  $t$  é

$$V^h(t) = h^0(t)B_t + h^1(t)S_t.$$

Supõe-se que a carteira é auto-financiada, isto é que

$$dV_t^h = h^0(t)dB_t + h^1(t)dS_t.$$

Na forma integral, temos

$$\begin{aligned} V_t^h &= V_0 + \int_0^t h^1(s)dS_s + \int_0^t h^0(s)dB_s \\ &= V_0 + \int_0^t (\mu h^1(s)S_s + r h^0(s)B_s)ds + \sigma \int_0^t h^1(s)S_s dW_s. \end{aligned} \quad (6)$$

Assumimos que a carteira  $(h^0(t), h^1(t))$  é uma carteira replicante, ou seja, que o valor desta carteira é igual ao preço do direito contingente, *i.e.*

$$V_t^h = F(t, S_t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Aplicando a fórmula de Itô a (5) e considerando (3), obtemos

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= F(0, S_0) + \int_0^t \left( \frac{\partial F}{\partial t}(r, S_r) + AF(r, S_r) \right) dr \\ &+ \int_0^t \left( \sigma S_r \frac{\partial F}{\partial x}(r, S_r) \right) dW_r, \end{aligned} \quad (7)$$

onde

$$Af(t, x) = \mu x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$$

é o gerador infinitesimal associado à difusão  $S_t$  com EDE (3). Comparando (6) e (7), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(s, S_s) &= h^1(s), \\ \frac{\partial F}{\partial t}(s, S_s) + r S_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, S_s) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, S_s) - r F(s, S_s) &= 0. \end{aligned}$$

Temos então:

- Uma carteira  $h$  com valor  $V_t^h$ , constituída à custa de ativos com risco de preço  $S_t$  e de ativos sem risco com preço  $B_t$ .

- A carteira  $h$  replica em cada instante  $t$  o direito contingente (ou derivado) com payoff  $\chi$

e

$$\Pi(t) = V_t^h = F(t, S_t).$$

- Em particular

$$V_T^h = F(T, S_T) = \Phi(S(T)) = \chi.$$

A carteira deve ser continuamente atualizada com a compra (ou venda) de  $h^1(t)$  unidades do ativo com risco e  $h^0(t)$  unidades do ativo sem risco, onde

$$\begin{aligned} h^1(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t), \\ h^0(t) &= \frac{V_t^h - h^1(t)S_t}{B_t} = \frac{F(t, S_t) - h^1(t)S_t}{B_t}. \end{aligned}$$

Podemos portanto enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 2.1** (Eq. de Black-Scholes): *Assuma que o mercado é especificado pelas equações (2) -(3) e consideremos um derivado financeiro com payoff da forma (4). Então, a única função de preço que é consistente com o princípio de ausência de arbitragem é a solução  $F$  do seguinte problema de valores na fronteira, definido no domínio  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - rF(t, x) &= 0, \\ F(T, x) &= \Phi(x). \end{aligned} \quad (8)$$

### 3 A avaliação de opções

A equação de Black-Scholes (8) pode ser resolvida por via analítica (é essencialmente uma equação diferencial parcial parabólica do tipo da equação do calor) ou por via probabilística. A obtenção de uma solução explícita na forma fechada é apenas possível em alguns (poucos) casos. De forma a obter uma expressão para a solução em termos probabilísticos, aplicaremos o resultado de representação estocástica também conhecido como fórmula de Feynman-Kac (ver [3] e [21]) e que enunciamos na proposição seguinte.

**Proposição 3.1** (*Fórmula de Feynman-Kac*): *Assuma que  $F$  é solução do problema de valores na fronteira*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \alpha(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - rF(t, x) = 0, \quad (9)$$

$$F(T, x) = \Phi(x).$$

Então

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} E[\Phi(X_T)],$$

onde  $X$  satisfaz a E.D.E.

$$dX_s = \alpha(s, X_s) ds + \sigma(s, X_s) dB_s, \quad s \in [t, T],$$

$$X_t = x.$$

Aplicando a fórmula de Feynman-Kac da proposição anterior à eq. (8), obtemos

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} E[\Phi(X_T)], \quad (10)$$

onde  $X$  é um processo estocástico que satisfaz a E.D.E.

$$dX_s = rX_s ds + \sigma X_s dW_s, \quad (11)$$

$$X_t = x.$$

Note-se que o processo  $X$  não é o nosso processo  $S$ , pois o coeficiente de deriva de  $X$  é  $rX$  e não  $\mu X$ . Ou seja,  $S$  tem como taxa média de rentabilidade  $\mu$ , enquanto  $X$  tem como taxa média de rentabilidade a taxa de juro sem risco  $r$ . A ideia agora é “passar” do processo  $X$  para o processo  $S$  aplicando o Teorema de Girsanov (ver [21]).

Denotemos por  $P$  a medida de probabilidade original (medida de probabilidade “objectiva”). A dinâmica- $P$  do processo  $S$  é a dada em (3). Note-se que (3) é equivalente a

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t \left( \frac{\alpha-r}{\sigma} dt + dW_t \right)$$

$$= rS_t dt + \sigma S_t d \underbrace{\left( \frac{\alpha-r}{\sigma} t + W_t \right)}_{\bar{W}_t}.$$

Pelo Teorema de Girsanov, existe uma medida de probabilidade  $Q$  (equivalente à medida de probabilidade  $P$ ) tal que no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ , o processo

$$\bar{W}_t := \frac{\alpha-r}{\sigma} t + W_t$$

é um movimento Browniano e  $S$  tem a dinâmica (sob  $Q$ ):

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\bar{W}_t. \quad (12)$$

Considere-se a notação seguinte:  $E$  denota o valor esperado sob a medida original  $P$ ,  $E^Q$  denota o valor esperado sob a nova medida  $Q$ ,  $W_t$  denota o movimento Browniano original (sob a medida  $P$ ) e  $\bar{W}_t$  denota o movimento Browniano sob a medida  $Q$ .

Voltando a (10) e (11), tendo em conta que, sob a medida  $Q$ , as equações (11) e (12) são as mesmas, podemos representar a solução da Equação de Black-Scholes pela fórmula de Feynman-Kac e enunciar o teorema seguinte.

**Teorema 3.2** O preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente  $\Phi(S_T)$  é dado pela fórmula

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} E^Q[\Phi(S_T)], \quad (13)$$

onde a dinâmica de  $S$  sob a medida  $Q$  é

$$\begin{aligned} dS_u &= rS_u du + \sigma S_u d\bar{W}_u, \quad u \in [t, T], \\ S_t &= s. \end{aligned}$$

A medida  $Q$  designa-se por medida equivalente de martingala. A razão para esta terminologia tem a ver com o facto de que o processo de preço descontado

$$\tilde{S}_t := e^{-rt} S_t$$

é uma martingala sob a medida  $Q$ . A fórmula (13) é conhecida como fórmula de “avaliação neutra face ao risco”.

Calculando explicitamente o preço do derivado, temos

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} E^Q[\Phi(S_T)] = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(se^y) f(y) dy, \quad (14)$$

onde  $f$  é a densidade da v.a. gaussiana  $Z$ . O integral em (14), para uma função  $\Phi$  dada, deve em geral ser calculado usando métodos numéricos. Existem contudo alguns casos particulares em que (14) se pode reduzir a uma fórmula relativamente simples. Por exemplo, para uma opção Europeia de compra, que é uma opção que dá o direito (mas não a obrigação) de comprar, na data de maturidade  $T$ , uma unidade do ativo subjacente pelo preço de exercício  $K$ , e caracterizada pelo payoff

$$\Phi(S_T) = \max\{S_T - K, 0\},$$

é possível mostrar que

$$F(t, s) = sN[d_1(t, s)] - e^{-r(T-t)} KN[d_2(t, s)], \quad (15)$$

onde  $N[x]$  é a função de distribuição cumulativa da distribuição  $N(0,1)$  e

$$\begin{aligned} d_1(t, s) &= \frac{\ln(s/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \\ d_2(t, s) &= \frac{\ln(s/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}. \end{aligned}$$

A fórmula (15) é conhecida como a fórmula de Black-Scholes.

#### 4 Alguns exemplos de modelos de taxas de juro

Em Finanças, para além da avaliação e cobertura de risco de produtos financeiros derivados e opções, a análise estocástica e as equações diferenciais estocásticas também encontram numerosas aplicações na área da modelação de taxas de juros e risco de crédito. Em particular, é importante ter modelos adequados para a evolução das taxas de juro formulados em termos de equações diferenciais estocásticas. Sobre modelos de taxas de juro em geral, recomendamos a consulta de [3] e [4].

A hipótese típica em modelação de taxas de juro (sob a medida equivalente de martingala  $Q$  ou modelação de martingala), é que a taxa de juro  $r_t$  é solução da equação diferencial estocástica (EDE)

$$dr_t = \mu(t, r_t) dt + \sigma(t, r_t) d\bar{W}_t,$$

onde  $\bar{W}_t$  é um movimento Browniano sob a medida de martingala  $Q$  (ver [4]),  $\mu$  e  $\sigma$  são funções que representam o coeficiente de deriva e de difusão da taxa de juro. Consideremos alguns exemplos de equações diferenciais estocásticas populares na modelação de taxas de juro.

O modelo de Vasiček é especificado pelas solução da EDE

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma d\bar{W}_t, \quad (16)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$  são constantes (parâmetros do modelo). Este modelo é caracterizado por um comportamento de reversão para a média  $b$ . É possível deduzir expressões explícitas para a solução de (16) e deduzir o preço para obrigações de cupão zero (ver [4]).

As soluções do modelo de Vasiček podem tomar valores negativos, essencialmente porque o termo de difusão é  $\sigma d\bar{W}_t$ . Como alternativa a este modelo, Cox, Ingersoll e Ross propuseram um

modelo em que as taxas de juro são sempre positivas, o modelo CIR que é especificado pela EDE

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\bar{W}_t,$$

cuja diferença relativamente à dinâmica do modelo de Vasiček é o termo de difusão  $\sigma\sqrt{r_t}$ , o que vai provocar precisamente que as taxas de juro se mantenham sempre não negativas e prova-se que são estritamente positivas se  $2ab/\sigma^2 \geq 1$ . É também possível deduzir a forma explícita da estrutura temporal das taxas de juro para este modelo, assim como expressões na forma fechada para opções de compra Europeias sobre obrigações de cupão zero (ver [4]).

Hull e White propuseram uma generalização do modelo de Vasiček com o objetivo de ter um modelo com capacidade para se ajustar de forma perfeita à estrutura temporal de taxas de juro iniciais. Este modelo é especificado pela EDE

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma d\bar{W}_t,$$

onde  $a$  e  $\sigma$  são constantes e  $\theta(t)$  é uma função determinística do tempo. A função  $\theta(t)$  é determinada de forma a que a calibração dos preços teóricos iniciais das obrigações com diferentes maturidades seja perfeita (preços iguais aos observados no mercado). Este modelo é conhecido como o modelo de Hull-White. No contexto deste modelo, é possível deduzir fórmulas explícitas para os preços das obrigações de cupão zero e de opções de compra Europeias sobre estas obrigações (ver, por exemplo, [4]).

Como último exemplo, consideremos o modelo de difusão CEV (“constant elasticity variance”) com deriva linear, para a evolução das taxas de juro a curto prazo proposto em [7] e que é especificado pela EDE

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma X_t^\rho dB_t, \quad (17)$$

onde  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $\rho \geq \frac{1}{2}$ . O processo solução  $X$  é distribuído no intervalo  $]0, +\infty[$ . Note-se que se  $\rho = \frac{1}{2}$ , obtemos o modelo CIR e, neste caso, é necessária a restrição adicional sobre os parâmetros  $2ab/\sigma^2 \geq 1$  para garantir que  $X_t \in ]0, +\infty[$ . É possível provar que o processo solução não admite uma densidade de transição em forma fechada, a não ser que  $b = 0$  (ver [10]), mas nesse caso o modelo não é realista na descrição de taxas de juro, ou então no caso do modelo CIR (em que  $\rho = 1/2$ ). Para mais detalhes sobre o modelo (17) recomenda-se a consulta de [1, 7, 16].

## 5 Estimação de Parâmetros

Nas aplicações de equações diferenciais estocásticas em finanças é essencial ter bons métodos de estimação de parâmetros. Por exemplo, para aplicar os modelos de taxas de juro considerados na secção anterior é importante dispor de métodos de estimação com boas propriedades e eficientes, de forma a estimar os parâmetros dos modelos a partir de dados reais sobre taxas de juro ou obrigações.

O estimador de máxima verossimilhança para processos de difusão baseado em observações discretas apresenta as boas propriedades habituais (ver, por exemplo, [11]). Infelizmente, as densidades de transição (ou condicionais) de um processo de difusão, necessárias para construir a função de verossimilhança, são geralmente desconhecidas. Nessas circunstâncias, várias outras abordagens têm sido propostas (ver, por exemplo, [18]). As mais interessantes são, todavia, aquelas que replicam o estimador de máxima verossimilhança. Apresenta-se a seguir um método baseado na simulação da verossimilhança, que permite obter um estimador assintoticamente equivalente ao estimador de máxima verossimilhança, mesmo desconhecendo-se as probabilidades de transição [19].

Dacunha-Castelle e Florens-Zmirou [11] provam, sob certas condições de regularidade, que a densidade de transição  $p(\Delta, x, y; \theta)$ , (acrescentamos nesta especificação  $\theta$ , o vetor dos parâmetros desconhecidos) associada à equação diferencial estocástica  $dX_t = a(X_t; \theta)dt + \sigma dB_t$ , tem a seguinte expressão geral:

$$p(\Delta, x, y; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\Delta} + \frac{G(y)-G(x)}{\sigma^2}\right\} E(\psi), \quad (18)$$

onde

$$\begin{aligned}\psi &= \exp\left\{\sigma^2\Delta\int_0^1 g(z_u(x,y) + \sqrt{\sigma^2\Delta}BB_u)du\right\}, \\ G(y) &= \int_0^y a(u;\theta)du, \\ z_u(x,y) &= x(1-u) + yu, \\ BB_t &= B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1, \text{ (Brownian Bridge)} \\ g(x) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{a(x;\theta)^2}{\sigma^4} + \frac{da(x;\theta)}{dx} \frac{1}{\sigma^2}\right).\end{aligned}\tag{19}$$

A dificuldade em avaliar (18) reside na expressão  $E(\psi)$ . Dacunha-Castelle e Florens-Zmirou [11] fornecem condições (relativamente restritivas) nas quais  $\psi$  pode ser expresso com uma soma infinita de termos. É possível, todavia, avaliar  $E(\psi)$  através de simulações de Monte Carlo (ver [19]). Observe-se que  $\psi$  é uma quantidade aleatória  $\psi = \psi(\omega)$  onde a dependência face a  $\omega \in \Omega$  decorre do processo *Brownian Bridge*  $\{BB_u(\omega), 0 \leq u \leq 1\}$ . Assim, para estimar  $E(\psi)$  é possível considerar

$$\hat{\psi} = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} \psi_N(\omega_j),$$

onde

$$\psi_N(\omega) = \exp\left\{\sigma^2\Delta\sum_{i=0}^{N-1} N^{-1}g\left(z_{t_i}(x,y) + \sqrt{\sigma^2\Delta}BB_{t_i}(\omega)\right)\right\},$$

com  $t_i = i/N$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) e  $\{\omega_j; j=1\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. Pode provar-se, sob certas condições, que  $\hat{\psi}$  converge q.c. (quase certamente) para  $E(\psi)$  quando  $N \rightarrow +\infty$  e  $n_s \rightarrow +\infty$  (ver [19]). Consequentemente, quando  $N \rightarrow +\infty$  e  $n_s \rightarrow +\infty$  vem que, para cada  $x$  e  $y$ ,

$$\hat{p}(\Delta, x, y; \theta, S, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\Delta} + \frac{G(y)-G(x)}{\sigma^2}\right\} \hat{\psi}$$

converge q.c. para  $p(\Delta, x, y; \theta)$ .

Para obter  $\hat{\psi}$  por simulação, fixando  $N$  e  $n_s$  suficientemente grandes, procede-se da seguinte forma:

1. Obter<sup>1</sup>  $\psi_N(\omega_j)$  para cada  $j = 1, \dots, n_s$ .

(a) Para cada  $j$ , simular independentemente  $BB$  nos instantes  $t_i = i/N$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  através de  $BB_{t_i} = B_{t_i} - t_i B_1$  onde  $B_{t_i} = \sum_{k=0}^i \sqrt{1/N} \varepsilon_k$  com  $\varepsilon_0 = 0$  e  $\{\varepsilon_k, k = 1, \dots, N\}$  é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição  $N(0,1)$ .

(b) Calcular  $\psi_N(\omega) = \exp\left\{\sigma^2\Delta\sum_{i=0}^{N-1} N^{-1}g\left(z_{t_i}(x,y) + \sqrt{\sigma^2\Delta}BB_{t_i}(\omega)\right)\right\}$ .

2. Calcular  $\hat{\psi} = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} \psi_N(\omega_j)$ .

Em exercícios de simulação a estimativa  $\hat{p}(\Delta, x, y; \theta, S, N)$  revelou-se muito precisa para  $n_s$  e  $N$  moderadamente “baixos”. Naturalmente, para  $n_s$  e  $N$  finitos  $\hat{\psi}$  é apenas uma aproximação para  $E(\psi)$  podendo ocorrer algum enviesamento se, em particular,  $N$  for baixo. No entanto, a qualidade do estimador  $\hat{\psi}$  pode ser completamente controlada pelo analista (isto é, a sua precisão pode ser tão elevada quanto se deseje).

O estimador SML (*Simulated Maximum Likelihood*, [19]) é  $\hat{\theta}_{n,S,N} = \operatorname{argmax} \hat{L}_n(\theta)$ , onde

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \hat{p}(\Delta, X_{t_{i-1}}, X_{t_i}; \theta, S, N).$$

Com a condição adicional  $n/S \rightarrow 0$ , pode provar-se que o estimador  $\hat{\theta}_{n,S,N}$  é assintoticamente eficiente, i.e.  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_{n,S,N} - \theta)$  converge em distribuição para  $Z$  onde  $Z \sim N(0, I^{-1}(\theta))$  e  $I(\theta)$  é a matriz de informação de Fisher. Nestas condições, com  $S, N \rightarrow \infty$ , tem-se  $|\hat{\theta}_{n,S,N} - \hat{\theta}_n| \xrightarrow{p} 0$ , sendo  $\hat{\theta}_n$  o

<sup>1</sup> O procedimento admite primeiro  $N \rightarrow +\infty$  e depois  $n_s \rightarrow +\infty$ .

estimador de máxima verossimilhança.

Este método de estimação aplica-se diretamente à equação com coeficiente de difusão constante  $dX_t = a(X_t; \theta)dt + \sigma dB_t$ . Se a equação exibe volatilidade instantânea não constante, por exemplo, se for do tipo  $dX_t = a(X_t; \theta)dt + \sigma(X_t; \theta)dB_t$ , usa-se a chamada transformação de Lamperti

$$Y_t = F(X_t) = \int_z^{X_t} \frac{1}{\sigma(u; \theta)} du.$$

Pela fórmula de Itô, a nova equação é  $dY_t = a_Y(Y_t; \theta)dt + dB_t$  sendo

$$a_Y(y_t; \theta) = \frac{a(F^{-1}(y); \theta)}{\sigma(F^{-1}(y); \theta)} - \frac{1}{2} \sigma(F^{-1}(y); \theta).$$

Por exemplo, no caso  $dX_t = \beta(\tau - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t$ , e usando a transformação  $Y_t = \int X_t \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{X_t}$ , tem-se

$$dY_t = \left( \frac{\beta}{2Y_t} (4\tau - Y_t^2) - \frac{\sigma^2}{2Y_t} \right) dt + \sigma dB_t.$$

Note-se que a nova densidade de transição para  $Y = g(X) = 2\sqrt{X}$  é

$$p_Y(\Delta, x, y) = p_X(\Delta, g^{-1}(x), g^{-1}(y))y/2 = p_X(\Delta, x^2/4, y^2/4)y/2.$$

Naturalmente, dada a propriedade de invariância, os parâmetros de interesse definidos na equação original podem ser estimados a partir da equação transformada.

O método da verossimilhança simulada pode ser também aplicada a equações diferenciais não homogêneas do tipo  $dX_t = a(t, X_t; \theta)dt + \sigma(t, X_t; \theta)dB_t$  (ver [20]).

## 6 Comentários finais

Neste artigo apresentámos alguns exemplos de aplicações de equações diferenciais estocásticas em finanças e discutimos brevemente alguns métodos de estimação de parâmetros. Com a apresentação do modelo de Black-Scholes, pretendemos ilustrar de que forma as equações diferenciais estocásticas e a análise estocástica são essenciais em Matemática Financeira. Em particular, na teoria de avaliação de opções, a utilização de ferramentas teóricas como a Fórmula de Itô, a Fórmula de Feynman-Kac ou o Teorema de Girsanov são essenciais. Na secção sobre modelos de taxa de juro, o nosso objetivo foi apenas apresentar alguns modelos paramétricos importantes baseados em equações diferenciais estocásticas, de forma a ilustrar a ubiquidade deste tipo de equações em modelos financeiros. Finalmente, com a secção final sobre estimação de parâmetros, pretendemos apresentar de forma sucinta alguns métodos úteis para estimação de parâmetros em equações diferenciais estocásticas ou em processos de difusão, uma vez que, na aplicação de modelos estocásticos em finanças, este é um tema de grande importância. Os modelos e métodos referidos nesta modesta introdução ao tema são uma ínfima parte das inúmeras aplicações de equações diferenciais estocásticas e análise estocástica em finanças. Não abordámos temas tão importantes como os Teoremas fundamentais da avaliação de ativos, aplicações de modelos com saltos (ou processos de Lévy), modelos com volatilidade estocástica, modelos de risco de crédito, métodos numéricos para resolução de equações diferenciais parciais do tipo da Equação de Black-Scholes ou modelos baseados em processos não Markovianos como o movimento Browniano fracionário. O leitor interessado nestes temas poderá consultar as referências [3, 4, 9, 13, 23].

## Referências

- [1] Yacine Aït-Sahalia (1999), Transition Densities for Interest Rate and Other Nonlinear Diffusions, *The Journal of Finance* 54, 1361-1395.
- [2] Louis Bachelier (1900), *Théorie de la spéculation*, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Vol. III-17, 21-86, Thesis for the Doctorate in Mathematical Sciences (defended March 29, 1900). Reprinted by Éditions Jacques Gabay, Paris, 1995.
- [3] N. H. Bingham and R. Kiesel (2010), *Risk-Neutral Valuation - Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, 2nd Edition. Springer, 2010.



- [4] Tomas Björk (2004), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2nd Edition. Oxford University Press, 2004.
- [5] Fischer Black and Myron Scholes (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-654.
- [6] Carlos A. Braumann (2005), *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*. Edições SPE, 2005.
- [7] K. C. Chan, G. A. Karolyi, F. A. Longstaff and A. B. Sanders (1992), An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance* 47, 1209-1227.
- [8] Rama Cont (2001), Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, *Quant. Finance* 1, 223-236.
- [9] Rama Cont and Peter Tankov (2004), *Financial Modeling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [10] John C. Cox (1996), The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model, *The Journal of Portfolio Management*, 1996.
- [11] D. Dacunha-Castelle and D. Florens-Zmirou (1986), Estimation of the coefficients of a diffusion from discrete observations, *Stochastics* 19:4, 263–284.
- [12] Robert Jarrow and Philip Protter (2004), A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880–1970. *IMS Lecture Notes Monograph*, vol. 45 (2004), pages 1–17.
- [13] M. Jeanblanc, M. Chesney and M. Yor (2009), *Mathematical Method for Financial Markets*. Springer, 2009.
- [14] F. C. Klebaner (2005), *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press, 2005.
- [15] P. E. Kloeden, E. Platen and H. Schurz (1994), *Numerical solution of SDEs through computer experiments*. Springer, 1994.
- [16] Vadim Linetsky and Rafael Mendoza (2009), Constant Elasticity of Variance (CEV) Diffusion Model. *Encyclopedia of Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 2010.
- [17] Robert C. Merton (1973), Theory of Rational Option Pricing, *Bell J. Econ. Man. Sci.* 4, 141–183.
- [18] João C. H. C. Nicolau (2001), *Modelação e estimação de séries financeiras através de equações diferenciais estocásticas*. PhD Thesis, ISEG/UTL, Lisbon.
- [19] João Nicolau (2002), A new technique for simulating the likelihood of stochastic differential equations, *The Econometrics Journal* 5(1), 91–103.
- [20] João Nicolau (2010), Transition density and simulated likelihood estimation for time-inhomogeneous diffusions, *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 39(7), 1435–1454.
- [21] Bernt Oksendal (2003), *Stochastic Differential Equations*, 6th Edition. Springer, 2003.
- [22] Paul A. Samuelson (1965), Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Review* 6, 13–31.
- [23] Wim Schoutens (2003), *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, John Wiley, 2003.
- [24] Steven Shreve (2004), *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer, 2004.



# Políticas ótimas de pescas usando equações diferenciais estocásticas

Nuno M. Brites, *brites@uevora.pt*  
Carlos A. Braumann, *braumann@uevora.pt*

*Centro de Investigação em Matemática e Aplicações,  
Instituto de Investigação e Formação Avançada,  
Universidade de Évora*

## 1. Introdução

As equações diferenciais estocásticas (EDE) têm sido estudadas como forma de explicar muitos fenómenos físicos, biológicos, económicos e sociais. Uma aplicação particular é o estudo do crescimento do tamanho de uma população sujeita a pesca em ambiente aleatório, com o intuito de obter políticas ótimas de pesca.

Uma política de pescas eficaz tem como objetivo o desenvolvimento sustentável da atividade pesqueira que permita às gerações futuras beneficiarem dos recursos existentes. No entanto, uma política de pescas ótima que vise unicamente o lucro da pesca poderá, em alguns casos, levar à extinção da população.

Suponhamos que o crescimento de uma população sujeita a pesca decorre em ambiente aleatório, e que pode ser modelado por uma EDE da forma

$$dX(t) = f(X(t))X(t)dt - H(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x_0 > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

onde  $X(t)$  representa o tamanho da população (número de indivíduos, biomassa) no instante  $t$ ,  $f(X(t))$  é a taxa média de crescimento *per capita*,  $H(t)$  a taxa de captura (ou *yield* na literatura inglesa),  $\sigma$  mede a intensidade do efeito das flutuações aleatórias do ambiente sobre a população e  $W(t)$  é um processo de Wiener padrão que representa o efeito acumulado das flutuações aleatórias do ambiente até ao instante  $t$ .

O problema da otimização deste sistema dinâmico estocástico pode ser encarado como um problema de controlo ótimo estocástico. A taxa de capturas  $H(t)$  pode considerar-se como um controlo (uma vez que a trajetória  $X(t)$  dependerá da sua escolha) a qual, através da política de pescas que vier a ser definida, é da responsabilidade do gestor da pescaria.

Métodos de controlo ótimo foram aplicados a modelos determinísticos (Clark (1976, 1990)) e a modelos estocásticos (Alvarez (1998, 2000), Alvarez e Sheep (1998, 2001), Lungu e Oksendal (1996), Lande *et al.* (1994, 1995)), no sentido de otimizar o lucro total descontado (por uma taxa social) num determinado horizonte temporal  $T$ . No caso de modelos estocásticos otimiza-se o lucro total esperado descontado.

No caso determinístico, a política ótima consiste em pescar com a máxima (mínima) intensidade quando a população se encontra acima (abaixo) de um determinado limiar crítico. Uma vez atingido o limiar, basta manter a taxa de capturas no valor adequado para que a população se mantenha no limiar.

No caso estocástico, devido às constantes oscilações do tamanho da população, impostas pelas alterações ambientais (que ocorrem constantemente), a política ótima de pesca prevê um regime *bang-regular-bang*. Isto quer dizer que o esforço de pesca deve ser ajustado de cada vez que o tamanho da

população se desvie de um limiar crítico, o que acontecerá constantemente. Estas políticas não são compatíveis com a logística da atividade pesqueira. Com efeito, a constante alteração do esforço de pesca, que frequentemente obriga à sua paragem ou à utilização do esforço máximo admissível, traduz-se na constante alteração do número de embarcações disponíveis, de instrumentos de pesca (redes, anzóis, linhas, etc.), mão-de-obra, entre outras. Por outro lado, quer no caso determinístico quer no estocástico, há situações em que a política ótima leva à extinção da população.

Políticas ótimas de pesca foram estudadas por Suri (2008) através de modelos determinísticos e estocásticos que usam várias técnicas de otimização (incluindo a teoria do controlo ótimo e programação dinâmica) e aplicação da teoria das opções, onde considerou que o crescimento da população e a dinâmica do preço são ambos sujeitos a flutuações aleatórias.

Foram também feitos alguns estudos de políticas de pesca em regime estacionário para modelos muito particulares (Beddington e May (1977, 1978), Braumann (1993, 1999, 2002)) em termos de maximização da taxa de capturas em regime estacionário. Braumann (1993), para modelos particulares, e Braumann (1999, 2002), para modelos gerais, consideraram políticas deste tipo e determinaram as condições que  $H(t)$  devia satisfazer para a existência de densidade estacionária e a não extinção da população de peixes. Não foi considerado, porém, o problema da otimização do lucro esperado descontado por unidade de tempo em regime estacionário, o que é diferente da acima referida maximização do lucro esperado acumulado descontado num horizonte temporal finito  $T$ .

Aqui, iremos apresentar políticas de pesca em ambiente aleatório que não provocam o efeito *bang-regular-bang*, ao sabor das flutuações aleatórias do tamanho da população, mas em que, pelo contrário, o esforço de pesca é mantido constante ao longo do tempo. Sob certas condições, estas políticas conduzem a população para um regime de equilíbrio sustentado em que  $X(t)$  possui uma distribuição assintótica (quando  $t \rightarrow +\infty$ ), absolutamente contínua e com densidade de probabilidade, também chamada de densidade estacionária,  $p(x)$ , garantindo-se ainda a ergodicidade da solução. Quando se dispõe de uma expressão para  $p(x)$ , o problema de otimização é de natureza determinística apesar de o problema inicial ser estocástico.

Finalmente, comparamos as duas políticas, a de esforço variável determinada pela teoria do controlo ótimo estocástico, que maximiza o lucro esperado acumulado descontado em  $[0, T]$ , e a de esforço constante, que maximiza o lucro esperado por unidade de tempo em regime sustentado.

## 2. Política ótima de pesca de esforço variável

As políticas de pesca de esforço variável consideram, usualmente, uma taxa de captura da forma  $H(t) := qE(t)X(t)$ , onde  $q > 0$  é o coeficiente de capturabilidade (fração da população capturada por unidade de tempo e unidade de esforço) e  $E(t) \geq 0$  é o esforço de pesca no instante  $t$ . A EDE (1) passa a escrever-se

$$dX(t) = f(X(t))X(t)dt - qE(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t). \quad (2)$$

O lucro por unidade de tempo proveniente da atividade pesqueira,  $P(t)$ , pode ser definido como a diferença entre as receitas da venda do pescado,  $R(t)$ , e o custo do esforço de pesca,  $C(t)$ . Aqui, iremos considerar

$$R(t) = pH(t) = pqE(t)X(t)$$

e

$$C(t) = (c_1 + c_2E(t))E(t), \text{ com } p > 0, c_1 \geq 0, c_2 > 0,$$

ou seja,

$$P(t) = R(t) - C(t) = pqE(t)X(t) - (c_1 + c_2E(t))E(t).$$

Existem outras formulações, porventura mais realistas, mas também mais complexas, para a estrutura das receitas e dos custos. Por exemplo, podemos introduzir preços unitários de venda,  $p$ , que dependam da oferta do pescado no mercado, isto é, dependam de  $H(t)$ . Não consideramos aqui a introdução

de custos fixos em  $C(t)$ , porque tal não altera o esforço ótimo de pesca, apenas o valor final do lucro obtido.

A estrutura de custos aqui escolhida, com  $c_2 > 0$ , representa o caso em que os pescadores precisam de usar embarcações e tecnologias de pesca menos eficientes e/ou pagar horas extraordinárias para implementar um esforço mais elevado do que o usual.

A política ótima de pesca de esforço variável consiste em maximizar o lucro esperado acumulado descontado no intervalo de tempo  $[0, T]$ , isto é,

$$V^* := J^*(x, 0) = \max_{\substack{E(t) \\ 0 \leq t \leq T}} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^T e^{-\delta t} P(t) dt \right], \quad (3)$$

onde  $\mathbb{E}_x[\dots]$  abrevia  $\mathbb{E}[\dots | X(0) = x]$ , e  $\delta > 0$  é um fator de desconto relacionado, por exemplo, com os custos de oportunidade ou desvalorização monetária.

Para  $t \in [0, T]$ , representamos por  $J(y, t) = \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-\delta(s-t)} P(s) ds | X(t) = y \right]$ , o lucro futuro descontado esperado quando o tamanho da população no instante  $t$  é  $y$ . Representamos por  $J^*(y, t)$  o seu valor quando se usa o esforço ótimo.

A expressão (3) traduz um problema de controlo ótimo estocástico sujeito à dinâmica da população dada pela EDE (2), a restrições no esforço de pesca  $0 \leq E_{min} \leq E(t) \leq E_{max} \leq +\infty$  (onde  $E_{min}$  e  $E_{max}$  são, respetivamente, o valor mínimo e máximo admitido para o esforço) e à condição terminal  $J^*(X(T), T) = 0$ . Assumimos que a pesca é iniciada no instante  $t = 0$  e que ‘termina’ no instante  $t = T$ , ou seja, a otimização compreende apenas o intervalo  $[0, T]$ . Este problema pode ser resolvido através da teoria da programação dinâmica estocástica, recorrendo ao princípio de otimalidade de Bellmann (ver Hanson (2007)).

A equação de Hamilton-Jacobi-Bellmann associada a este problema de controlo é a solução do problema (3), e é dada por

$$-J_t^*(X(t), t) = \max_{E(t)} \{ P(t) - \delta J^*(X(t), t) + J_x^*(X(t), t) (f(X(t)) - qE(t))X(t) + 0.5 J_{xx}^*(X(t), t) \sigma^2 X^2(t) \}, \quad (4)$$

onde  $J_t^*(\dots), J_x^*(\dots)$  são as derivadas parciais de 1ª ordem relativamente a  $t$  e a  $x$ , respetivamente, e  $J_{xx}^*(\dots)$  representa a derivada parcial de 2ª ordem relativamente a  $x$ .

Uma particularidade da equação (4) é a sua natureza determinística sendo, no entanto, originária de um problema de controlo ótimo estocástico.

O esforço ótimo é obtido através da equação (4). Com efeito, considerando  $D$  uma função que representa os termos em (4) que dependem apenas do esforço, obtemos

$$D(E) = (pqX(t) - c_1 - c_2E(t))E(t) - J_x^*(X(t), t) qE(t)X(t).$$

Representando por  $E_{livre}^*(t)$  o valor ótimo do esforço, livre de restrições, que maximiza  $D$ , obtido como solução da equação  $\frac{dD(E)}{dE} = 0$  em ordem a  $E$ , resulta que

$$E_{livre}^*(t) = \frac{(p - J_x^*(X(t), t))qX(t) - c_1}{2c_2}.$$

O esforço ótimo, considerando agora as condições de restrições do esforço, é

$$E^*(t) = \begin{cases} E_{min} & , & E_{livre}^*(t) < E_{min} \\ E_{livre}^*(t) & , & E_{min} \leq E_{livre}^*(t) \leq E_{max} \\ E_{max} & , & E_{livre}^*(t) > E_{max}. \end{cases}$$

A equação (4) é uma equação diferencial com derivadas parciais, é parabólica, e a sua solução pode obter-se recorrendo a métodos numéricos, aplicando um esquema de discretização como, por exemplo, o esquema de Crank-Nicolson (ver Brites (2017)).

Um caso particular da função  $f(X)$  é o modelo logístico, cuja expressão é dada por  $f(X) = r(1 - X/K)$ , onde  $r$  representa a taxa intrínseca de crescimento da população e  $K$  denota a capacidade de sustento do meio (valor de equilíbrio em ambiente determinístico). Será este modelo, bastante utilizado na modelação de populações de pescado, que utilizaremos na comparação entre as duas políticas.

### 3. Política sustentável ótima de pesca de esforço constante

Na presença de uma política de pesca de esforço constante,  $E \equiv E(t)$ , a EDE (2) toma a forma

$$dX(t) = f(X(t))X(t)dt - qEX(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x_0 > 0, \quad t > 0. \quad (5)$$

Em Braumann (1985), podemos verificar que, caso a função  $f$  satisfaça condições apropriadas, existe uma distribuição estacionária para o tamanho da população  $X(t)$ , ou seja, existe uma distribuição de equilíbrio com densidade dada por  $p(x)$ . Denotamos por  $X_\infty$  a variável aleatória com função densidade  $p(x)$ , ou seja,  $X_\infty$  define a variável aleatória que representa o tamanho da população em regime estacionário. A expressão para  $p(x)$  também pode ser encontrada em Braumann (1985) e é dada por

$$p(x) = \frac{m(x)}{\int_0^{+\infty} m(z)dz},$$

com  $x \in (0, +\infty)$ ,  $m(x) = Cx^{-2(1+\frac{qE}{\sigma^2})} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_{z_0}^x \frac{f(z)}{z} dz\right)$  e  $C$  é uma constante.

Em termos de lucro por unidade de tempo, faz todo o sentido agora trabalhar com  $X_\infty$  em vez de  $X(t)$ , e utilizaremos a expressão lucro sustentável por unidade de tempo. Assim, à semelhança do que feito anteriormente, definimos o lucro sustentável por unidade de tempo como a diferença entre as receitas e os custos por unidade de tempo, ou seja,

$$P_\infty := R_\infty - C = pqEX_\infty - (c_1 + c_2E)E,$$

onde  $R_\infty := pH_\infty = pqEX_\infty$  e  $C := (c_1 + c_2E)E$ , com  $p > 0, c_1 \geq 0, c_2 > 0$ .

A política ótima de pesca de esforço constante consiste em maximizar o lucro sustentável esperado por unidade de tempo em regime estacionário, isto é,

$$\max_E \mathbb{E}_x [P_\infty] = \max_E \left( p_1 q \frac{M_{01}(E)}{M_{00}(E)} - c_1 \right) E - \left( p_2 q^2 \frac{M_{02}(E)}{M_{00}(E)} + c_2 \right) E^2, \quad (6)$$

onde  $M_{jk}(E) = \int_0^{+\infty} (\ln z)^j z^{k-2(1+\frac{qE}{\sigma^2})} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_x^z \frac{f(y)}{y} dy\right) dz$ . Representamos o maximizante da expressão (6) por  $E^{**}$ , denominando-o por esforço ótimo sustentável.

Em Brites e Braumann (2017) encontra-se, para o caso particular do modelo logístico,  $f(X) = r(1 - X/K)$ , as expressões para o esforço ótimo sustentável e lucro ótimo sustentável esperado:

$$E^{**} = \frac{r}{2q} \cdot \frac{1 - \frac{\sigma^2}{2r} - \frac{c_1}{pqK}}{1 + \frac{c_2 r}{pq^2 K}}. \quad (7)$$

e

$$\mathbb{E}[P_\infty^{**}] = \frac{rK}{4} \cdot \frac{p \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r} - \frac{c_1}{pqK}\right)^2}{1 + \frac{c_2 r}{pq^2 K}}. \quad (8)$$

Para este modelo, é ainda possível obter explicitamente o valor esperado da população em regime de equilíbrio, o qual representamos por

$$\mathbb{E}[X_{\infty}^{**}] = \frac{K}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) \left(1 + \frac{2c_2 r}{pq^2 K}\right)^2 + \frac{c_1}{pqK}}{1 + \frac{c_2 r}{pq^2 K}}. \quad (9)$$

Fazemos notar que o primeiro fator  $r/2q$  na expressão de  $E^{**}$  representa o esforço que conduz a população ao nível MSY (Maximum Sustainable Yield) no caso determinístico ( $\sigma = 0$ ). O segundo fator na expressão de  $E^{**}$  corrige esse valor de modo a incluir a estrutura do lucro e a intensidade das flutuações aleatórias do ambiente.

#### 4. Comparação de políticas

A comparação entre a política ótima de pesca com esforço variável e a política sustentável ótima de esforço constante não pode ser feita de modo direto. Com efeito, a primeira produz o lucro ótimo esperado acumulado descontado considerando um horizonte de tempo finito,  $V^*$ , e a última devolve o lucro ótimo sustentável esperado por unidade de tempo,  $\mathbb{E}[P_{\infty}^{**}]$ , considerando um horizonte temporal infinito, isto é,  $T \rightarrow +\infty$ . No entanto, ambas as políticas podem ser comparadas se usarmos simulações de Monte Carlo. Para isso, definimos as seguintes quantidades

$$P^*(t) := pqE^*(t)X(t) - (c_1 + c_2E^*(t))E^*(t)$$

e

$$P^{**}(t) := pqE^{**}X(t) - (c_1 + c_2E^{**})E^{**}$$

como sendo o lucro ótimo por unidade de tempo para cada uma das políticas de pesca.

Tendo por base os lucros por unidade de tempo  $P^*(t)$  e  $P^{**}(t)$ , podemos calcular, para ambas as políticas, o lucro descontado acumulado esperado no intervalo  $[0, T]$  (\* refere-se à política ótima e \*\* refere-se à política sustentável ótima):

$$V^* := \mathbb{E}_x \left[ \int_0^T e^{-\delta t} P^*(t) dt \right], \quad V^{**} := \mathbb{E}_x \left[ \int_0^T e^{-\delta t} P^{**}(t) dt \right]. \quad (10)$$

A determinação dos valores  $V^*$  e  $V^{**}$  requer cálculos numéricos. Em vez de valores de parâmetros arbitrários, decidimos configurar um cenário base com valores realistas. Encontramos em Hanson (1998) um conjunto bastante completo com os parâmetros  $r, K, q, p, c_1$  e  $c_2$  para o Alabote-do-Pacífico (*Hippoglossus hippoglossus*) e estes foram os valores escolhidos para construir o cenário. Para os outros valores de parâmetros para os quais não tínhamos informações,  $E_{max}, \sigma, x$  e  $\delta$ , atribuímos valores realistas e escolhemos como horizonte de tempo  $T = 50$  anos. O conjunto completo de valores de parâmetros encontra-se na Tabela 1.

Os lucros  $V^*$  e  $V^{**}$  foram obtidos aproximando os valores esperados pelas médias amostrais de 1000 trajetórias simuladas pelo método de Monte Carlo, usando uma discretização de Euler da EDE.

Das simulações resultaram (ver Brites e Braumann (2017) e Brites (2017)) os seguintes valores:  $V^* = 413.6$  (38.3) e  $V^{**} = 396.4$  (35.0), onde os valores entre parêntesis representam o desvio-padrão e a unidade considerada é o milhão de dólar. A perda percentual média no valor do lucro ao usar a segunda política em vez da primeira é de apenas 4.1%.

Note-se que estas pequenas reduções de lucro ocorrem quando se considera um esforço de pesca constante em vez de um esforço variável. Com a aplicação de um esforço constante, o gestor da pescaria não precisa de preocupar-se com constantes alterações do esforço, ou seja, o número de embarcações, o número de redes ou o número de horas de trabalho (só para citar algumas possibilidades para o esforço) é sempre constante ao longo dos anos. Isto é extremamente vantajoso em termos de implementação e evita custos extra (que não foram aqui considerados), como a compra de novos equi-

pamentos devido a esforços mais elevados ou o pagamento de subsídios de desemprego devido a reduções no esforço.

Tabela 1: Valores dos parâmetros utilizados nas simulações do cenário base. UEE representa a Unidade Standardizada de Esforço e encontra-se definida em Hanson e Ryan (1998). \$ representa o dólar americano.

Fonte: Brites e Braumann (2017)

Parâmetro	Valor e Unidade	Descrição
$r$	0.71/ano	Taxa intrínseca de crescimento
$K$	$80.5 \times 10^6$ Kg	Capacidade de sustento do meio
$q$	$3.30 \times 10^{-6}/(\text{UEE} \times \text{ano})$	Capturabilidade
$E_{min}$	0 UEE	Esforço mínimo admissível
$E_{max}$	$0.7r/q$ UEE	Esforço máximo admissível
$\sigma$	$0.2/\text{ano}^{1/2}$	Magnitude das flutuações aleatórias
$x$	$0.5K$ Kg	População inicial
$p$	1.59 \$/kg	Preço por unidade de captura
$c_1$	$96 \times 10^{-6}$ \$/(UEE x ano)	Parâmetro linear do custo
$c_2$	$10^{-7}$ \$/(UEE <sup>2</sup> x ano)	Parâmetro quadrático do custo
$T$	50 anos	Horizonte temporal

Desenvolvemos outros cenários semelhantes ao cenário base, onde alteramos, à vez, os valores dos parâmetros apresentados na Tabela 1. Os resultados obtidos são, com algumas exceções, muito semelhantes aos aqui apresentados, e podem ser consultados em Brites (2017) e em Brites e Braumann (2017).

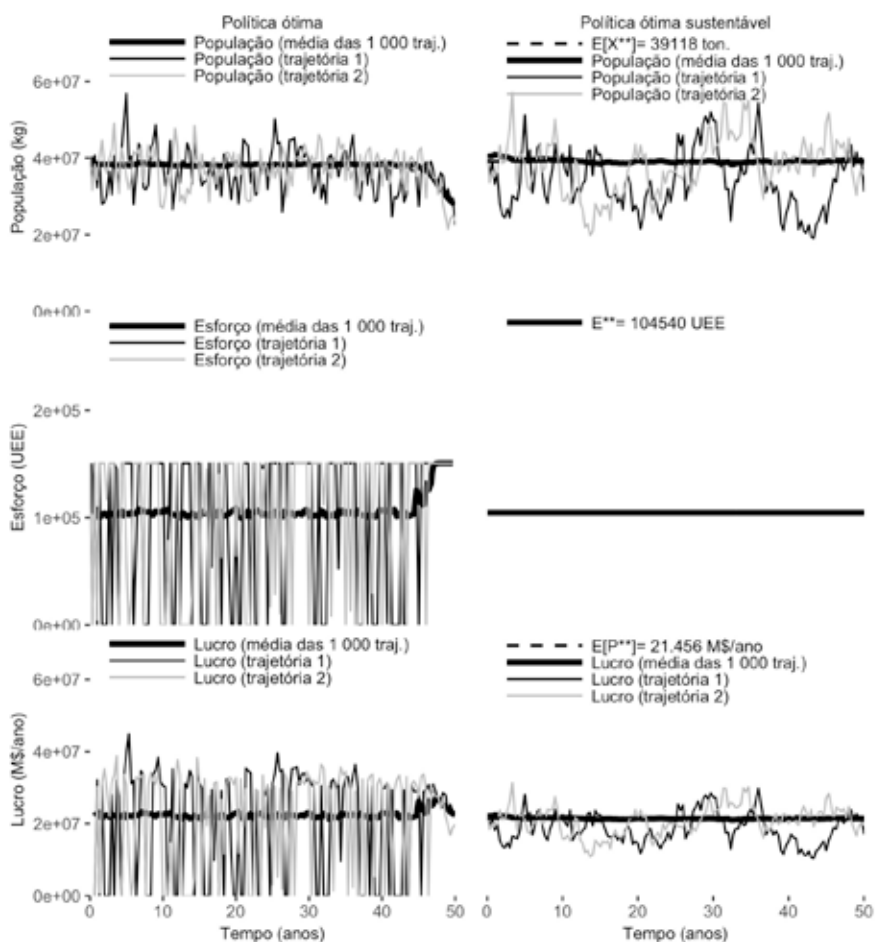


Figura 1: Média de 1000 trajetórias simuladas (linhas grossas) e duas trajetórias aleatoriamente escolhidas (linhas finas) para a população, esforço e lucro para a política ótima de esforço variável (lado esquerdo) e política ótima sustentável de esforço constante (lado direito). Para esta última, as linhas horizontais a tracejado (praticamente imperceptíveis) determinam os valores esperados em regime estacionário obtidos na Secção 3.

A Figura 1 mostra, para o período temporal de 50 anos ( $t \in [0, 50]$ ), o que aconteceria se fossem implementadas as duas políticas ótimas de pesca. O lado esquerdo da Figura 1 refere-se à política ótima de esforço variável e o lado direito refere-se à política sustentável ótima de esforço constante. São mostradas as seguintes variáveis:

- Tamanho da população (em cima): duas trajetórias escolhidas ao acaso de  $X^*(t)$  e  $X^{**}(t)$  e média das 1000 trajetórias simuladas; para a política de esforço constante é ainda mostrado o valor esperado da população em regime de equilíbrio (valor constante com linha a tracejado), dado pela expressão (9);
- Esforço ótimo (no meio): as correspondentes duas trajetórias de  $E^*(t)$  e  $E^{**}(t)$  e média das 1000 trajetórias simuladas;
- Lucro ótimo por unidade de tempo (em baixo): as correspondentes duas trajetórias de  $P^*(t)$  e  $P^{**}(t)$  e média das 1000 trajetórias simuladas; para a política de esforço constante é ainda mostrado o valor esperado do lucro por unidade de tempo em regime de equilíbrio (valor constante com linha a tracejado), dado pela expressão (8).

As linhas finas na Figura 1 (linhas preto e cinzento) mostram duas trajetórias escolhidas aleatoriamente, correspondendo a dois dos possíveis comportamentos particulares das condições ambientais. Isto ilustra o que os pescadores veriam acontecer em dois cenários distintos. Naturalmente, a trajetória real, ou seja, o comportamento real do ambiente que ocorreria, depende do acaso e seria diferente das escolhidas aleatoriamente para este estudo, mas teria um comportamento semelhante.

A Figura 1 mostra também os valores esperados das variáveis (linhas tracejadas quase imperceptíveis) quando somos capazes de calculá-los exatamente (o que acontece para a política ótima sustentável de esforço constante, à direita) ou aproximações muito boas (linhas sólidas a preto) baseadas nas 1000 trajetórias simuladas. Estes valores não são o que se veria, mas sim as nossas expectativas, ou seja, a média assumida sobre todos os possíveis comportamentos ambientais (aquele que efetivamente ocorre e os outros que podem ocorrer).

Na política de esforço constante, aplicamos o esforço ótimo  $E^{**}$  ao longo de 50 anos, qualquer que seja o comportamento do ambiente (o mesmo valor  $E^{**}$  aplica-se a todas as trajetórias). Assim, a logística da implementação é extremamente simples e a quantidade de embarcações, redes e mão-de-obra utilizada é sempre a mesma.

Na política de esforço variável, os pescadores aplicam um esforço altamente variável que depende do tamanho da população em cada momento. Isto requer a constante estimação do tamanho da população, o que é um processo bastante difícil, impreciso e dispendioso. Outra grande desvantagem desta política é, como pode ser visto na parte central esquerda da Figura 1, a frequente variação do esforço com períodos de ausência de pesca ( $E^* = 0$ ) e períodos de pesca com esforço máximo ( $E^{**} = E_{max}$ ), válido para ambas as trajetórias escolhidas e também para as restantes 998 simuladas. Estas transições frequentes e repentinas são difíceis de acomodar em situações reais. Além disso, os períodos de ausência ou baixa captura correspondem ao fecho ou redução substancial da atividade pesqueira e acarretam encargos sociais e custos económicos relacionados com o desemprego (incluindo subsídios de desemprego não considerados na nossa estrutura de custos).

As políticas de esforço constante são sustentáveis e não sofrem das desvantagens da política ótima de esforço variável. Aplica-se sempre o mesmo esforço ótimo  $E^{**}$ , seja qual for o comportamento do ambiente (o mesmo valor  $E^{**}$  aplica-se a todas as trajetórias). Assim, o valor esperado  $E[E^{**}] = E^{**}$  e, conseqüentemente, não conseguimos distinguir as linhas fina, tracejada e sólida no meio à direita da Figura 1. Do ponto de vista prático, essa política de esforço constante é muito fácil de implementar. O número de embarcações, equipamentos, redes e mão de obra, são mantidos constantes em todos os instantes. Além disso, a pescaria não fecha e não existe desemprego.

Com a implementação da política ótima sustentável, o tamanho da população é direcionado para uma distribuição de probabilidade de equilíbrio com um tamanho médio ligeiramente maior relativamente ao tamanho médio da população da política de esforço variável. Este tamanho esperado em equilíbrio é o valor médio da distribuição estacionária referida na Secção 3.

Em Brites (2017), considerámos outro modelo de crescimento, o também conhecido o modelo de Gompertz. Foi efetuado um estudo semelhante ao aqui apresentado e as conclusões são bastante



semelhantes, até com diferenças mais pequenas entre os lucros ótimos das duas políticas, mostrando que a política ótima sustentável é robusta no que concerne à escolha do modelo de crescimento e dos dados utilizados.

Estudámos ainda, para ambas as políticas ótimas, as comparações do lucro quando se considera um modelo de crescimento do tipo logístico com efeitos de Allee fracos, e concluímos que, quando estes efeitos existem, devem ser levados em consideração.

## 5. Conclusões

Neste trabalho apresentámos uma aplicação das equações diferenciais estocásticas no desenvolvimento de políticas ótimas de pesca. As políticas obtidas através da teoria do controlo ótimo estocástico implicam que o esforço de pesca se altere brusca e constantemente, de acordo com as oscilações do tamanho da população, provocadas pelas constantes flutuações aleatórias do ambiente. Do ponto de vista prático, estas políticas não podem ser implementadas, uma vez que a atividade pesqueira não é compatível com constantes alterações do esforço de pesca.

Como alternativa, desenvolvemos políticas ótimas sustentáveis de pesca com esforço constante. Estas políticas são totalmente compatíveis com a atividade pesqueira, uma vez que, a manutenção do esforço de pesca num nível constante, traduz-se na utilização do mesmo número de embarcações e instrumentos de pesca ao longo do tempo.

As políticas ótimas sustentáveis são sub-ótimas relativamente às políticas ótimas de esforço variável. À partida, poder-se-ia pensar que o lucro médio obtido pela aplicação da política sub-ótima em vez da política ótima, resultaria numa perda significativa. Mostrámos aqui, através de um exemplo com dados realistas do Alabote do Pacífico, que esta redução do lucro é bastante pequena, situação que se mantém (ver Brites (2017)) com outros modelos de crescimento, outras populações de pescado e outros valores dos parâmetros. No caso do modelo de Gompertz, a perda do lucro médio é, de facto, bastante reduzida.

## Agradecimentos

Os autores são membros do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações da Universidade de Évora, centro financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) com referência UID/MAT/04674/2013. Nuno M. Brites teve o apoio de uma bolsa de doutoramento FCT com a referência SFRH/BD/85096/2012.

## Bibliografia

- Alvarez, L.H.R. (1998) - Optimal harvesting under stochastic fluctuations and critical depensation. *Mathematical Biosciences*, 152, 63-85.
- Alvarez, L.H.R. (2000) - Singular stochastic control in the presence of a state-dependent yield structure. *Stochastic Processes and their applications*, 86, 323-343.
- Alvarez, L.H.R. e Sheep, L.A. (1998) - Optimal harvesting of stochastically fluctuating populations. *Journal of Mathematical Biology*, 37, 155-177.
- Alvarez, L.H.R. e Sheep, L.A. (2001) - Optimal Harvesting in the Presence of Density- Dependent Extinction Probabilities. Turku Centre for Computer Science.
- Beddington, J. R. e May, R. M. (1977) - Harvesting populations in a random fluctuating environment. *Science*, 197, 463-465.
- Braumann, C. A. (1993) - General models of fishing with random growth parameters. *Mathematics Applied to Biology and Medicine*. Wuerz Publishing Ltd.
- Braumann, C. A. (1999) - Variable effort fishing models in random environments. *Mathematical Biosciences*, 156, 1-19.
- Braumann, C. A. (2002) - Variable effort harvesting models in random environments: generalization to density-dependent noise intensities. *Mathematical Biosciences*, 177-178, 229-245.
- Brites, N. M., Braumann, C. A. (2017) – Fisheries management in random environments: Comparison of harvesting policies for the logistic model. *Fisheries Research*, 195, 238-246.

- Brites, N. M. (2017) – *Stochastic Differential Equations Harvesting Models: Sustainable Policies and Profit Optimization*. Tese de Doutorado. Universidade de Évora.
- Clark, C. W. (1976) - *Mathematical Bioeconomics: The optimal management of renewable resources*. 1st edition. Wiley, New York.
- Clark, C. W. (1990) - *Mathematical Bioeconomics: The optimal management of renewable resources*. 2nd edition. Wiley, New York.
- Gihman, I. I. e A. V. Skorohod. (1972) - *Stochastic Differential Equations*. Springer, New York.
- Hanson, F. B. (2007) – *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia.
- Karlin, S. e Taylor, H. (1981) - *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, Orlando.
- Lande, R, Engen, S. e Saether, B-E. (1994) - Optimal harvesting, economic discounting and extinction risk in fluctuating populations. *Nature*, 372, 88-90.
- Lande, R, Engen, S. e Saether, B-E. (1995) - Optimal harvesting of fluctuating populations with a risk of extinction. *The American Naturalist*, 145, 728-745.
- Lande, R, Engen, S. e Saether, B-E. (2003) - *Stochastic population models in ecology and conservation*. Oxford University Press. Oxford.
- Lungu, E. M. e Oksendal, B. (1996) - Optimal harvesting from a population in a stochastic crowded environment. *Mathematical Biosciences*, 145, 47-75.
- May, R. M., Beddington, J. R., Horwood, J. W., Shepherd, J. G. (1978) - Exploiting natural populations in an uncertain world. *Mathematical Biosciences*, 42, 219-252.
- Oksendal, B. (1998) - *Stochastic Differential Equations. An introduction with Applications*. 5th Edition. Springer, New York.
- Suri, R. (2008) - *Optimal harvesting strategies for fisheries: a differential equations approach*. PhD Thesis. Massey University, New Zeland.



# Avaliação de opções standard e barreira com o modelo CEV

José Carlos Dias, *jose.carlos.dias@iscte-iul.pt*

*Instituto Universitário de Lisboa (ISCTE-IUL) e Unidade de Investigação em Desenvolvimento Empresarial (UNIDE-IUL)*

## 1 Introdução

Caso um investidor espere a valorização do preço de uma determinada acção, poderá, naturalmente, assumir uma posição longa no mercado spot, i.e., comprar a acção em apreço. Em alternativa, e de modo a alocar menores recursos financeiros à sua estratégia de investimento, o investidor poderá assumir uma posição longa numa opção de compra standard cujo activo subjacente é a acção em questão. Mas como definir, sinteticamente, este instrumento financeiro? Uma opção standard é um contrato que dá ao comprador (que assume uma posição longa) o direito, mas não a obrigação, de comprar (no caso de uma opção de compra, i.e., uma call option) ou de vender (no caso de uma opção de venda, i.e., uma put option) ao vendedor da opção (que assume uma posição curta) uma determinada quantidade (unidade de transacção), de um determinado activo (activo subjacente), a um determinado preço de exercício (strike price).

O vendedor do contrato cede o direito de exercício da opção ao comprador em troca de um determinado montante designado de prémio da opção. Tomando como exemplo uma opção de estilo europeu (i.e., a opção só pode ser exercida na maturidade do contrato), o detentor de uma opção de compra (resp., venda) irá exercer a opção se a cotação spot do activo subjacente na maturidade for superior (resp., inferior) ao preço de exercício.

As opções barreira são extensões das opções standard. Enquanto que nas opções standard o payoff depende do preço de exercício (e, naturalmente, da cotação spot do activo subjacente na maturidade do contrato), as opções barreira têm payoffs que dependem do preço de exercício e da(s) barreira(s) (i.e., depende do valor de uma barreira no caso de opções com uma única barreira ou dos valores de duas barreiras no caso de opções com dupla barreira). Os contratos de opções barreira são iniciados (no caso de in barrier options) ou extintos (no caso de out barrier options) se o valor do activo subjacente tocar na(s) barreira(s) até à data de maturidade do contrato.

O detentor de uma opção barreira de tipo knock-in tem direito a receber a correspondente opção standard se um determinado nível de barreira for tocado pelo valor do activo subjacente até à maturidade. Caso o valor do activo subjacente não toque na barreira até à maturidade do contrato um valor de compensação, denominado de rebate, poderá ser pago ao detentor da opção knock-in. Uma opção barreira de tipo knock-out é uma opção standard que irá ser extinta se uma barreira for tocada pelo valor do activo subjacente antes da maturidade do contrato. Se isto suceder (i.e., a extinção da opção barreira de tipo knock-out), o seu detentor poderá ter direito a receber o rebate. Note-se que em qualquer um dos contratos knock-in e knock-out o valor do rebate pode ser previamente definido como sendo igual a zero. Mas quais as vantagens de utilizar opções barreira em detrimento de opções standard? Pode apontar-se três razões essenciais:

1. Os payoffs associados às opções barreira poderão ser mais consistentes com as expectativas que o investidor tenha sobre o comportamento futuro do mercado.
2. As opções barreira podem ser mais adequadas às necessidades de cobertura de risco (hedging) do que as correspondentes opções standard.
3. Os prémios das opções barreira são geralmente mais baixos do que os das correspondentes opções standard.

Os trabalhos embrionários de [5] e [28] têm servido de base para o desenvolvimento de vários modelos de avaliação de opções financeiras. [5] apresentam uma metodologia geral para a avaliação de opções sobre acções não geradoras de quaisquer dividendos durante a vida da opção e derivam uma fórmula simples para avaliar uma opção de compra de estilo europeu. [28] generaliza o modelo de avaliação de opções de Black-Scholes para os casos em que existem pagamentos de dividendos (sob a forma de um dividend yield constante) durante a vida da opção e taxas de juro estocásticas.

Em termos gerais, qualquer modelo de avaliação de opções financeiras tem por base uma determinada equação diferencial estocástica com o objectivo de modelizar o comportamento dinâmico do preço dos activos financeiros. Isto implica que se assume um pressuposto fundamental relativamente à função de distribuição de probabilidade a utilizar no cálculo do valor actual do payoff esperado da opção. Este valor esperado é tipicamente calculado através da integração da função payoff numa função de densidade de probabilidade num mundo risco-neutral.

No modelo com distribuição lognormal de Black-Scholes-Merton (modelo BSM) assume-se que o preço do activo subjacente segue um movimento Browniano geométrico (GBM) com volatilidade constante. Contudo, este pressuposto tem sido rejeitado na literatura financeira de forma convincente. Por exemplo, [24, 25] documentam que o pressuposto de lognormalidade é incapaz de incorporar os efeitos de assimetria negativa e curtose elevada que estão usualmente implícitos nas distribuições empíricas da rendibilidade dos activos.

O denominado modelo de elasticidade constante da variância de [11], geralmente conhecido como *constant elasticity of variance model* (modelo CEV), é consistente com duas regularidades empíricas que têm sido suportadas na literatura financeira: a existência de uma correlação negativa entre a rendibilidade das acções e a volatilidade (usualmente conhecida como efeito de alavancagem), observada, por exemplo, em [4], [2], [10] e [3]; e a relação inversa entre a volatilidade implícita nos preços de mercado das opções e o preço de exercício dos contratos de opções (geralmente designada como efeito sorriso da volatilidade implícita), documentada, por exemplo, em [17] e [1]. Além disso, sendo um modelo de volatilidade local, o processo de difusão CEV é consistente com o pressuposto de mercado completo e, assim, permite a cobertura de posições curtas nas opções apenas através do activo subjacente.

O objectivo essencial deste artigo consiste na apresentação do modelo CEV para a avaliação de opções standard e barreira de estilo europeu. Neste sentido, o artigo está organizado da seguinte forma: a secção 2 ilustra, de forma sintética, o modelo CEV. A secção 3 apresenta a metodologia de avaliação de opções standard com o modelo CEV. A secção 4 utiliza a abordagem do tempo de paragem de [20] para avaliar opções barreira de estilo europeu com o modelo CEV. Na secção 5 sintetizam-se as principais conclusões deste artigo e sugerem-se algumas linhas orientadoras para um maior aprofundamento destas temáticas.

## 2 Modelo de elasticidade constante da variância

O modelo CEV constituiu uma das primeiras tentativas de correcção do pressuposto de volatilidade constante que é assumido no modelo BSM. Apesar da hipótese de lognormalidade permitir um tratamento analítico simples e ser uma aproximação razoável para o comportamento dos preços de alguns activos financeiros, existem vários argumentos teóricos e evidência empírica que justificam a existência de uma relação entre o preço do activo subjacente da opção e a volatilidade que não está contemplada no modelo BSM.

O modelo CEV permite que a volatilidade instantânea das rendibilidades dos activos dependa dos níveis dos preços dos activos subjacentes, permitindo, assim, incorporar o denominado efeito sorriso evidenciado nas curvas de volatilidade observadas nos preços de mercado de opções financeiras. Por outro lado, o modelo CEV é também consistente com o chamado efeito de alavancagem financeira verificado nos mercados de acções, cuja racionalidade económica é geralmente suportada através do seguinte argumento: quando o preço de mercado das acções aumenta, o rácio dívida/capital próprio da empresa diminui e, por conseguinte, a volatilidade do preço das acções tem tendência para diminuir.

Assim, este modelo utiliza um pressuposto mais geral para modelizar o processo estocástico da variável de estado de modo a conseguir incorporar as regularidades empíricas observadas na literatura financeira.

No contexto da medida de probabilidade risco-neutral  $\mathbb{Q}$ , o processo de difusão CEV assume que o preço dos activos  $\{S_t, t \geq 0\}$  é descrito pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = (r - q) S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (1)$$

com uma função de volatilidade local dada por

$$\sigma(S_t) = \delta S_t^{\frac{\beta}{2}-1}, \quad (2)$$

para  $\delta \in \mathbb{R}_+$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ , sendo  $r \geq 0$  a taxa de juro instantânea sem risco,  $q \geq 0$  o dividend yield do activo subjacente,  $\sigma(S_t)$  a volatilidade instantânea por unidade de tempo da rendibilidade dos activos e  $W_t^{\mathbb{Q}} \in \mathbb{R}$  um movimento Browniano standard na medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$  gerando a filtração  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq t_0\}$ . Note-se que os pressupostos assumidos no modelo BSM mantêm-se, com excepção de que o processo estocástico é agora generalizado para um processo de difusão CEV o qual tem a flexibilidade de permitir alterações na volatilidade.

A especificação CEV dada pela equação (1) representa um processo de difusão geral com vários casos especiais: o modelo BSM ( $\beta = 2$ ) e os modelos de [12] baseados na difusão absoluta ( $\beta = 0$ ) e na difusão com raiz quadrada ( $\beta = 1$ ). Quando  $\beta < 2$  (resp.,  $\beta > 2$ ) a volatilidade local dada pela equação (2) é uma função decrescente (resp., crescente) do preço do activo subjacente. Se  $\beta = 2$ , o preço do activo não tem qualquer influência na volatilidade, na medida em que a volatilidade será um parâmetro constante ao longo do tempo,  $\sigma(S_t) = \delta$ , independentemente do preço do activo subjacente.

A elasticidade da variância das rendibilidades em relação ao preço é igual a  $\beta - 2$  dado que  $dv(S_t)/v(S_t) = (\beta - 2) dS_t/S_t$ , onde  $v(S_t) = \delta^2 S_t^{\beta-2}$  representa a variância instantânea das rendibilidades do activo subjacente. Dado que a volatilidade é proporcional a um expoente do preço do activo subjacente, a elasticidade da variância é independente do preço do activo. Se  $\beta = 2$ , a elasticidade é zero o que implica que os preços dos activos seguem uma distribuição lognormal e a variância das rendibilidades é constante, tal como é assumido no modelo BSM. O parâmetro  $\delta$  do modelo deve ser interpretado como um parâmetro de escala que fixa a volatilidade instantânea no momento  $t = t_0$ ,  $\sigma_{t_0} = \sigma(S_{t_0}) = \delta S_{t_0}^{\beta/2-1}$ .

Apesar de [11] ter inicialmente restringido o parâmetro  $\beta$  na banda de valores  $0 \leq \beta \leq 2$ , os valores típicos de  $\beta$  implícitos nos preços de opções sobre o índice de acções S&P 500 chegam a atingir valores de  $\beta = -6$  no período pós-crash de 1987. Valores de  $\beta < 2$  (i.e., com um efeito de alavancagem directo) são esperados em opções sobre acções, índices de acções e preços do petróleo e valores de  $\beta > 2$  (i.e., com um efeito de alavancagem inverso) são uma característica dos preços à vista de algumas mercadorias e opções sobre futuros com volatilidades implícitas de declive ascendente—ver, por exemplo, [9], [14], [22] e [18].

Em termos gerais, o activo subjacente de um processo de difusão CEV pode ser uma acção, um índice de acções, uma taxa de câmbio, ou um contrato de futuros financeiros, desde que o parâmetro  $q$  seja entendido como um dividend yield, um dividend yield médio, uma taxa de juro sem risco externa, ou uma taxa de juro sem risco doméstica.

### 3 Avaliação de opções standard de estilo europeu

A fórmula de avaliação de opções standard de estilo europeu com base no modelo CEV foi inicialmente expressa em termos da função de distribuição gama complementar por [11] para o caso  $\beta < 2$  e por [21] para  $\beta > 2$ . Subsequentemente, [35] expressou a fórmula de avaliação do modelo CEV em termos da função de distribuição chi-quadrado não central com o preço de uma opção de compra (se  $\phi = -1$ ) ou de venda (se  $\phi = 1$ ) no momento de avaliação  $t_0$ , sobre o preço do activo subjacente  $S$ , preço de exercício  $K$  e maturidade no momento  $T$  a ser dado por<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} v_{t_0}(S, K, T; \phi) &:= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(\phi K - \phi S_T)^+ | \mathcal{F}_{t_0}] \\ &= \phi K e^{-r(T-t_0)} F_{\mathbb{Q}}(t_0, S_{t_0}; T, K) - \phi S_{t_0} e^{-q(T-t_0)} F_{\mathbb{Q}^S}(t_0, S_{t_0}; T, K), \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1</sup>Note-se que o caso  $\beta > 2$  requer um cuidado especial em algumas aplicações financeiras—ver, por exemplo, [16], [14], Footnote 8 e Appendix B] e [20, Remark 7].

com as necessárias funções de distribuição de probabilidade a serem definidas por

$$F_{\mathbb{Q}}(v, S_v; u, B_u) := \begin{cases} F\left(2x(S_v); \frac{2}{2-\beta}, 2y(B_u)\right) & \Leftarrow \beta < 2, \phi = -1 \\ F\left(2y(B_u); 2 + \frac{2}{\beta-2}, 2x(S_v)\right) & \Leftarrow \beta > 2, \phi = -1 \\ Q\left(2x(S_v); \frac{2}{2-\beta}, 2y(B_u)\right) & \Leftarrow \beta < 2, \phi = 1 \\ Q\left(2y(B_u); 2 + \frac{2}{\beta-2}, 2x(S_v)\right) & \Leftarrow \beta > 2, \phi = 1 \end{cases} \quad (4)$$

e

$$F_{\mathbb{Q}^S}(v, S_v; u, B_u) := \begin{cases} Q\left(2y(B_u); 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x(S_v)\right) & \Leftarrow \beta < 2, \phi = -1 \\ Q\left(2x(S_v); \frac{2}{\beta-2}, 2y(B_u)\right) & \Leftarrow \beta > 2, \phi = -1 \\ F\left(2y(B_u); 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x(S_v)\right) & \Leftarrow \beta < 2, \phi = 1 \\ F\left(2x(S_v); \frac{2}{\beta-2}, 2y(B_u)\right) & \Leftarrow \beta > 2, \phi = 1 \end{cases}, \quad (5)$$

com  $F(z; a, b)$  representando a função de distribuição chi-quadrado não central com  $a$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $b$  e  $Q(z; a, b)$  a sua respectiva função de distribuição complementar e

$$k_{v,u} = \frac{2(r-q)}{\delta^2(2-\beta)[e^{(r-q)(2-\beta)(u-v)} - 1]}, \quad (6)$$

$$\delta = \sigma(S_{t_0}) S_{t_0}^{1-\beta/2}, \quad (7)$$

$$x(S) = k_{v,u} S^{2-\beta} e^{(r-q)(2-\beta)(u-v)} \quad (8)$$

and

$$y(B) = k_{v,u} B^{2-\beta}. \quad (9)$$

As medidas de sensibilidade do preço de uma opção face a variações infinitesimais de cada um dos seus determinantes de valor (conhecidas como Greeks na literatura financeira) é de crucial importância na implementação de estratégias adequadas para a gestão do risco. No caso do modelo CEV, o seu cálculo pode ser efectuado através das soluções analíticas (expressas em termos da função de distribuição chi-quadrado não central) derivadas por [27]. Note-se também que existe uma extensa literatura dedicada à computação eficiente destas funções de distribuição para efeitos do cálculo do preço de opções e dos Greeks—veja-se, por exemplo, [27], [13] e [19].

#### 4 Avaliação de opções barreira de estilo europeu

A avaliação de opções barreira de estilo europeu assumindo que o preço do activo subjacente segue um processo GBM está bem desenvolvida na literatura—ver, por exemplo, entre outros, [34] ou [33] para o caso de opções com uma única barreira e [26], [23], [36], [32] ou [7] para o caso de opções com dupla barreira.

[6], [14], [15] e [29] sugerem metodologias de avaliação de opções barreira no contexto do modelo CEV, enquanto que [20] avaliam opções barreira para um modelo CEV mais geral proposto por [8] que admite a possibilidade de haver um salto do preço do activo subjacente para zero.

O objectivo essencial desta secção é ilustrar a abordagem do tempo de primeira passagem proposto por [20] para o caso particular do modelo CEV, cuja metodologia de avaliação tem por base o cálculo de tempos de primeira passagem do preço do activo subjacente pela(s) barreira(s).

##### 4.1 Definições

A próxima definição especifica as condições contratuais de opções de tipo knock-out e knock-in com dupla barreira.

**Definição 4.1** O preço no momento  $T$  de opções knock-out e knock-in de estilo europeu com dupla barreira sobre o preço do activo subjacente  $S$ , com preço de exercício  $K$ , rebate nulo, níveis de barreira inferior  $L : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , níveis de barreira superior  $U : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$  e maturidade no momento  $T (\geq t_0)$  são iguais a

$$EKODB_T(S, K, L, U, T; \phi) = (\phi K - \phi S_T)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_{LU} > T\}} \quad (10)$$

e

$$EKIDB_T(S, K, L, U, T; \phi) = (\phi K - \phi S_T)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_{LU} \leq T\}}, \quad (11)$$

onde  $\phi = 1$  para uma opção de venda,  $\phi = -1$  para uma opção de compra e

$$\tau_{LU} := \inf \{u > t_0 : S_u = L_u \text{ ou } S_u = U_u\} \quad (12)$$

é o tempo de primeira passagem do preço do activo subjacente por uma das duas barreiras, com  $L_u < U_u$  para  $u \in \mathcal{T} := [t_0, T]$ .

Note-se que o tempo de primeira passagem  $\tau_{LU}$  pode ser reescrito como

$$\tau_{LU} = \bar{\tau}_L \wedge \bar{\tau}_U, \quad (13)$$

onde

$$\bar{\tau}_L := \inf \left\{ u > t_0 : S_u = L_u, \sup_{t_0 \leq v \leq u} (S_v - U_v) < 0 \right\} \quad (14)$$

é o tempo de primeira passagem do preço do activo subjacente pela barreira inferior antes de tocar na barreira superior e

$$\bar{\tau}_U := \inf \left\{ u > t_0 : S_u = U_u, \inf_{t_0 \leq v \leq u} (S_v - L_v) > 0 \right\} \quad (15)$$

representa o tempo de primeira passagem do preço do activo subjacente pela barreira superior antes de tocar na barreira inferior.

**Observação 4.2** Seja  $B \in \{L, U\}$ . Tipicamente, as barreiras (dependentes do tempo) poderão ser representadas pela equação de uma recta se  $B_t = B_0 + \alpha t$  ou por uma função exponencial se  $B_t = B_0 \exp(\alpha t)$ . No caso particular de  $\alpha = 0$ , as barreiras serão independentes do tempo, i.e., serão constantes durante a vida da opção barreira.

## 4.2 A abordagem do tempo de paragem

A próxima proposição especializa [20, Proposição 3.2] para o caso particular da avaliação de opções knock-out e knock-in com o modelo CEV.

**Proposição 4.3** Assumindo o modelo CEV descrito pelas equações (1) e (2), o valor no momento  $t_0$  de uma opção de compra knock-out de estilo europeu com dupla barreira (se  $\phi = -1$ ) ou opção de venda knock-out de estilo europeu com dupla barreira (se  $\phi = 1$ ) sobre o preço do activo subjacente  $S$ , com preço de exercício  $K$ , rebate nulo, níveis de barreira inferior  $L : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , níveis de barreira superior  $U : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$  e maturidade no momento  $T (\geq t_0)$  é igual a

$$EKODB_{t_0}(S_{t_0}, K, L, U, T; \phi) = v_{t_0}(S_{t_0}, K, T; \phi) - EKIDB_{t_0}(S_{t_0}, K, L, U, T; \phi), \quad (16)$$

onde  $v_{t_0}(S_{t_0}, K, T; \phi)$  é o preço no momento  $t_0$  de uma opção de compra standard de estilo europeu (se  $\phi = -1$ ) ou opção de venda standard de estilo europeu (se  $\phi = 1$ ) sobre o preço do activo subjacente  $S$ , com preço de exercício  $K$  e maturidade no momento  $T$ , tal como definido na equação (3),

$$EKIDB_{t_0}(S_{t_0}, K, L, U, T; \phi) = \int_{t_0}^T e^{-r(u-t_0)} v_u(L_u, K, T; \phi) \mathbb{Q}(\bar{\tau}_L \in du | \mathcal{F}_{t_0}) \quad (17)$$

$$+ \int_{t_0}^T e^{-r(u-t_0)} v_u(U_u, K, T; \phi) \mathbb{Q}(\bar{\tau}_U \in du | \mathcal{F}_{t_0})$$

e  $\mathbb{Q}(\bar{\tau}_B \in du | \mathcal{F}_{t_0})$  representa a função de densidade de probabilidade do tempo de primeira passagem  $\bar{\tau}_B$ , com  $B \in \{L, U\}$ .

**Observação 4.4** Note-se que  $EKIDB_{t_0}(S_{t_0}, K, L, U, T; \phi)$  representa o valor, no momento  $t_0$ , de uma opção knock-in de estilo europeu com dupla barreira sobre o preço do activo subjacente  $S$ , com preço de exercício  $K$ , rebate nulo, níveis de barreira inferior  $L : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , níveis de barreira superior  $U : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$  e maturidade no momento  $T (\geq t_0)$ .

### 4.3 Densidades dos tempos de primeira passagem

A implementação da fórmula de avaliação oferecida na Proposição 4.3 necessita do conhecimento prévio das duas densidades dos tempos de paragem óptima contidas na equação (17). Tendo por base [31, Teorema 2], ambas as densidades podem ser calculadas como a solução implícita de duas equações integrais que envolvem simplesmente a função de densidade de transição do preço do activo subjacente.

**Proposição 4.5** Assumindo o modelo CEV descrito pelas equações (1) e (2), as duas densidades dos tempos de primeira passagem  $\mathbb{Q}(\bar{\tau}_L \in du | \mathcal{F}_{t_0})$  e  $\mathbb{Q}(\bar{\tau}_U \in du | \mathcal{F}_{t_0})$  são as soluções implícitas de

$$\begin{aligned} & F(t_0, S_{t_0}; u, L_u) \\ &= \int_{t_0}^u F(v, L_v; u, L_u) \mathbb{Q}(\bar{\tau}_L \in dv | \mathcal{F}_{t_0}) + \int_{t_0}^u F(v, U_v; u, L_u) \mathbb{Q}(\bar{\tau}_U \in dv | \mathcal{F}_{t_0}) \end{aligned} \quad (18)$$

e

$$\begin{aligned} & 1 - F(t_0, S_{t_0}; u, U_u) \\ &= \int_{t_0}^u [1 - F(v, L_v; u, U_u)] \mathbb{Q}(\bar{\tau}_L \in dv | \mathcal{F}_{t_0}) + \int_{t_0}^u [1 - F(v, U_v; u, U_u)] \mathbb{Q}(\bar{\tau}_U \in dv | \mathcal{F}_{t_0}), \end{aligned} \quad (19)$$

com

$$F(v, E_v; u, E_u) := \begin{cases} Q\left(2x(E_v); \frac{2}{2-\beta}, 2y(E_u)\right) & \Leftarrow \beta < 2 \\ Q\left(2y(E_u); 2 + \frac{2}{\beta-2}, 2x(E_v)\right) & \Leftarrow \beta > 2 \end{cases} \quad (20)$$

representando a função de densidade de transição  $\mathbb{Q}(S_u \leq E_u | S_v = E_v)$  do processo CEV, dada por [35, Equação 1] para  $\beta < 2$  e por [21, Equação 7] para  $\beta > 2$  e onde  $Q(z; a, b)$  representa a função de distribuição chi-quadrado não central complementar com  $a$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $b$ .

**Observação 4.6** Um exemplo numérico da implementação computacional da abordagem do tempo de primeira passagem com o modelo CEV pode ser consultada em [20, Table 1].

## 5 Conclusão

A avaliação de opções financeiras tem por base os modelos embrionários desenvolvidos por [5] e [28]. A importância destes modelos para a literatura financeira foi claramente reconhecida em 1997 através da atribuição do Prémio Nobel da Economia a Robert Merton e Myron Scholes.<sup>2</sup> Uma das características fundamentais do modelo BSM é o pressuposto do activo subjacente seguir um movimento Browniano geométrico com volatilidade constante.

Neste artigo utilizou-se um pressuposto mais geral para o comportamento dinâmico dos preços dos activos subjacentes de opções financeiras através do modelo CEV que consegue incorporar de forma mais apropriada as regularidades empíricas observadas na literatura financeira.

Por simplificação e questões de espaço, está-se a apresentar apenas a metodologia de avaliação de opções com dupla barreira e com rebate nulo assumindo o modelo CEV. Contudo, a mesma metodologia pode ser facilmente utilizada no cálculo de opções com uma única barreira e com pagamento de um rebate utilizando para o efeito o exposto em [20] e [30].

<sup>2</sup>Fischer Black não recebeu este prémio dado que tinha falecido em 1995.



## Agradecimentos

O autor agradece o suporte financeiro fornecido pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (Grant UID/GES/00315/2013).

## Referências

- [1] Bakshi, G., Kapadia, N., Madan, D. (2003). Stock Return Characteristics, Skew Laws, and the Differential Pricing of Individual Equity Options. *Review of Financial Studies* 16, 101–143.
- [2] Beckers, S. (1980). The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications For Option Pricing. *Journal of Finance* 35, 661–673.
- [3] Bekaert, G., Wu, G. (2000). Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets. *Review of Financial Studies* 13, 1–42.
- [4] Black, F. (1976). Studies of Stock Price Volatility Changes. *Proceedings of the Meetings of the American Statistical Association, Business and Economics Statistics Division*, 177–181.
- [5] Black, F., Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637–654.
- [6] Boyle, P. P., Tian, Y. (1999). Pricing Lookback and Barrier Options under the CEV Process. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 34, 241–264.
- [7] Buchen, P., Konstandatos, O. (2009). A New Approach to Pricing Double-Barrier Options with Arbitrary Payoffs and Exponential Boundaries. *Applied Mathematical Finance* 16, 497–515.
- [8] Carr, P., Linetsky, V. (2006). A Jump to Default Extended CEV Model: An Application of Bessel Processes. *Finance and Stochastics* 10, 303–330.
- [9] Choi, J. W., Longstaff, F. A. (1985). Pricing Options on Agricultural Futures: An Application of the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model. *Journal of Futures Markets* 5, 247–258.
- [10] Christie, A. A. (1982). The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects. *Journal of Financial Economics* 10, 407–432.
- [11] Cox, J. C. (1975). Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions. Working Paper, Stanford University. Reprinted in *Journal of Portfolio Management* 23 (1996), 15–17.
- [12] Cox, J. C., Ross, S. A. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics* 3, 145–166.
- [13] Cruz, A., Dias, J. C. (2017). The Binomial CEV Model and the Greeks. *Journal of Futures Markets* 37, 90–104.
- [14] Davydov, D., Linetsky, V. (2001). Pricing and Hedging Path-Dependent Options under the CEV Process. *Management Science* 47, 949–965.
- [15] Davydov, D., Linetsky, V. (2003). Pricing Options on Scalar Diffusions: An Eigenfunction Expansion Approach. *Operations Research* 51, 185–209.
- [16] Delbaen, F., Shirakawa, H. (2002). A Note on Option Pricing for the Constant Elasticity of Variance Model. *Asian-Pacific Financial Markets* 9, 85–99.
- [17] Dennis, P., Mayhew, S. (2002). Risk-Neutral Skewness: Evidence from Stock Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, 471–493.
- [18] Dias, J. C., Nunes, J. P. (2011). Pricing Real Options under the Constant Elasticity of Variance Diffusion. *Journal of Futures Markets* 31, 230–250.
- [19] Dias, J. C., Nunes, J. P. (2018). Universal Recurrence Algorithm for Computing Nuttall, Generalized Marcum and Incomplete Toronto Functions and Moments of a Noncentral  $\chi^2$  Random Variable. *European Journal of Operational Research* 265, 559–570.
- [20] Dias, J. C., Nunes, J. P., Ruas, J. P. (2015). Pricing and Static Hedging of European-Style Double Barrier Options under the Jump to Default Extended CEV Model. *Quantitative Finance* 15, 1995–2010.
- [21] Emanuel, D. C., MacBeth, J. D. (1982). Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17, 533–554.
- [22] Geman, H., Shih, Y. F. (2009). Modeling Commodity Prices Under the CEV Model. *Journal of Alternative Investments* 11, 65–84.

- [23] Geman, H., Yor, M. (1996). Pricing and Hedging Double-Barrier Options: A Probabilistic Approach. *Mathematical Finance* 6, 365–378.
- [24] Jackwerth, J. C., Rubinstein, M. (1996). Recovering Probability Distributions from Option Prices. *Journal of Finance* 51, 1611–1631.
- [25] Jackwerth, J. C., Rubinstein, M. (2012). Recovering Stochastic Processes from Option Prices. In J. A. Batten and N. Wagner, eds.: *Contemporary Studies in Economics and Financial Analysis*, Vol. 94 of *Derivative Securities Pricing and Modelling* (Emerald Group, Bingley, UK).
- [26] Kunitomo, N., Ikeda, M. (1992). Pricing Options with Curved Boundaries. *Mathematical Finance* 2, 275–298.
- [27] Larguinho, M., Dias, J. C., Braumann, C. A. (2013). On the Computation of Option Prices and Greeks under the CEV Model. *Quantitative Finance* 13, 907–917.
- [28] Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141–183.
- [29] Mijatović, A., Pistorius, M. (2013). Continuously Monitored Barrier Options under Markov Processes. *Mathematical Finance* 23, 1–38.
- [30] Nunes, J. P., Ruas, J. P., Dias, J. C. (2015). Pricing and Static Hedging of American-Style Knock-in Options on Defaultable Stocks. *Journal of Banking and Finance* 58, 343–360.
- [31] Park, C., Schuurmann, F. (1976). Evaluations of Barrier-Crossing Probabilities of Wiener Paths. *Journal of Applied Probability* 13, 267–275.
- [32] Pelsser, A. (2000). Pricing Double Barrier Options Using Laplace Transforms. *Finance and Stochastics* 4, 95–104.
- [33] Rich, D. R. (1994). The Mathematical Foundations of Barrier Option-Pricing Theory. *Advances in Futures and Options Research* 7, 267–311.
- [34] Rubinstein, M., Reiner, E. (1991). Breaking Down the Barriers. *Risk* 4, 28–35.
- [35] Schroder, M. (1989). Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula. *Journal of Finance* 44, 211–219.
- [36] Sidenius, J. (1998). Double Barrier Options: Valuation by Path Counting. *Journal of Computational Finance* 1, 63–79.



# Aplicações das equações diferenciais estocásticas em Engenharia

Paula Milheiro Oliveira, *poliv@fe.up.pt*

*Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia e CMUP*

## 1 Introdução

O mundo real dita que muitos problemas de engenharia envolvam a análise de sistemas ou a sua modelação, com a particularidade de serem estes sistemas do tipo que responde dinamicamente a perturbações aleatórias. É o caso de cargas ambientais como forças devidas ao vento, ondas ou terremotos que atuam em estruturas. É também o caso de uma grande diversidade de sistemas mecânicos e estruturais que regularmente estão sujeitos a circunstâncias operacionais incertas. Alguns circuitos elétricos e sistemas de energia são igualmente exemplos de sistemas que exibem dinâmica estocástica. Não é, portanto, de estranhar que as equações diferenciais estocásticas (EDEs), quer de baixa quer de elevada dimensão, apareçam frequentemente em aplicações de engenharia, com especial ênfase nestas últimas. Os problemas que surgem, na prática, traduzem-se matematicamente de diversas formas, variando da própria análise do sistema estocástico, à estimação dos parâmetros da equação ou do sistema, análise do ajuste do modelo, testes de ruptura do modelo e incluindo o controlo e a simulação do sistema. Também pode acontecer que alguns aspectos da sua dinâmica ou, por outras palavras, do seu comportamento evolutivo, sejam observados através de um conjunto de sensores em instantes discretos, geralmente envolvendo algum tipo de erro de medição. O sistema subjacente sendo intrinsecamente dinâmico e evoluindo em tempo contínuo, esta última situação conduz frequentemente a problemas ditos de sistemas parcialmente observados.

Neste artigo, pretende-se fazer realçar a utilidade do uso de EDEs na abordagem de uma classe de problemas de engenharia, recorrendo a uma variedade de aplicações e a exemplos ilustrativos. Naturalmente muitos outros exemplos poderiam ter sido invocados. Uma breve contextualização do tipo de uso que fazemos das EDEs é apresentada na Secção 2, de modo a introduzir resumidamente as idéias principais sobre este tema.

## 2 O uso de modelos de equações diferenciais estocásticas

As EDEs que surgem em contextos de Engenharia apresentam-se exibindo uma variedade de famílias de processos estocásticos para representar a componente de “perturbação”, sendo os processos de Wiener os mais simples e os mais comuns, mas aparecendo também com alguma frequência Movimentos Brownianos Fraccionários e até processos com saltos, de uma forma mais geral, processos de Lévy. EDEs deste tipo mostraram a sua adequação e a sua utilidade como modelos matemáticos em diversas situações (Bar-Shalom et al. (2004); Bodo et al. (1987); Milano and Zarate-Minano (2013); Gelb (2001); Serrano (1990); Mendelson and Tenno (2009), entre muitos outros).

Considera-se habitualmente uma EDE ou SDE (Sistema Diferencial Estocástico, que mais não é do que uma equação diferencial estocástica vectorial) que representa o estado do sistema em estudo:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = \dots \quad (1)$$

sendo

$$f(t, X_t) = \begin{bmatrix} f_1(t, X_t) \\ f_2(t, X_t) \\ \dots \\ f_n(t, X_t) \end{bmatrix}, \quad b(t, X_t) = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad W_t = \begin{bmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ \dots \\ W_t^n \end{bmatrix}.$$

Se o sistema for linear, ou seja,

$$f(t, X_t) = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ \dots \\ X_t^n \end{bmatrix}, \quad b(t, X_t) = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

com os  $f_{ij}, b_{ij}$  constantes, estamos perante um processo de Ornstein-Uhlenbeck em dimensão  $n$ .

Se o sistema for parcialmente observado, isto é, as medições que fazemos não são do processo  $\{X_t\}_t$  propriamente dito mas sim de alguma quantidade, um outro processo, com ele relacionado, à equação (1) adicionaremos uma nova equação, dita equação de observação. Ela será

$$dY_t = h(t, Y_t)dt + g(t, Y_t)dV_t$$

para observações em tempo contínuo ou

$$Y_k = h(k, X_k) + g(k, X_k)V_k$$

para observações em tempo discreto. O processo  $\{V_t\}_t$ , em tempo contínuo, ou  $\{V_k\}_k$  em tempo discreto, representam o erro de medição standardizado.

E também, naturalmente, teremos de ter em conta as observações se as houver (Figura 1).

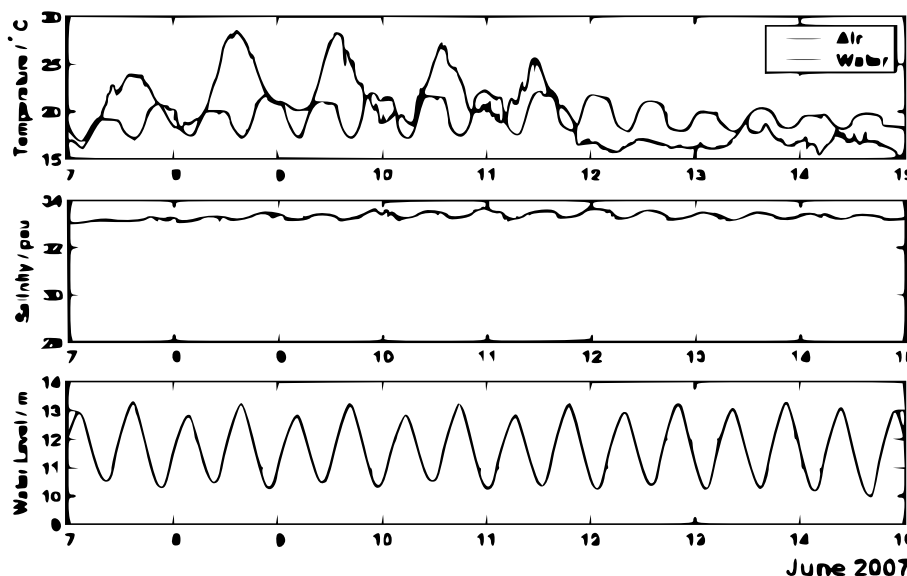


Figura 1: Exemplo de recolha de observações num sistema de monitorização em tempo contínuo.

Os problemas que surgem nas aplicações são também, do ponto de vista matemático, muito variados, podendo ir do problema de modelação ou de estimação de parâmetros a problemas de análise do processo estocástico solução da equação propriamente dito.

### 3 Aplicação na modelação de recursos hídricos e contaminação

Consideremos o exemplo de um lago em que existe uma fonte de contaminação. Um modelo simples para a concentração do contaminante é o seguinte (Serrano (2001) para mais detalhes):

$$dC_t + \left( \frac{1}{t_d} + K \right) C_t dt = h dt + \sigma_g dW_t, \quad C_0 = c_0$$

onde

- $C_t$  é a concentração de contaminante no instante  $t$ ;
- $t_d$  é o tempo de retenção do lago (assumido como constante);
- $K$  é o coeficiente de decaimento do contaminante (assumido como constante);
- $h$  é a carga média anual do contaminante por unidade de volume (assumido como constante);
- $\sigma_g$  é o desvio padrão da carga média do contaminante por unidade de volume e de tempo;
- $C_0$  é a concentração inicial (variável aleatória);
- $\{W_t\}_t$  é um processo de Wiener padronizado ou um ruído colorido com função de correlação  $E[W_{t_1} W_{t_2}] = e^{-\rho|t_1 - t_2|}$ .

Seja no caso da perturbação ser modelado por um processo de Wiener seja no caso de ser modelada por um ruído colorido com as características descritas acima, obtêm-se, sem dificuldade, as curvas da média, da variância e da autocorrelação, dado estarmos a tratar com sistemas estocásticos lineares, sendo portanto gaussianos os processos envolvidos:

$$E[C_t] = \frac{h}{\frac{1}{t_d} + K} \left( 1 - e^{-\left(\frac{1}{t_d} + K\right)t} \right)$$

$$var[C_t] = \frac{\sigma_g^2}{\left(\frac{1}{t_d} + K\right) \left(\frac{1}{t_d} + K + \rho\right)}, \quad (\rho < \frac{1}{t_d} + K, \quad t \text{ elevado})$$

$$E[C_{t_1} C_{t_2}] = \frac{h^2}{\left(\frac{1}{t_d} + K\right)^2} \left( 1 - e^{-\left(\frac{1}{t_d} + K\right)t_1} \right) \left( 1 - e^{-\left(\frac{1}{t_d} + K\right)t_2} \right) + \sigma_g^2 \frac{Num}{\left(\frac{1}{t_d} + K\right) \left(\frac{1}{t_d} + K + \rho\right) \left(\frac{1}{t_d} + K - \rho\right)}$$

com

$$Num = e^{-\rho(t_2 - t_1)} - \rho e^{-\left(\frac{1}{t_d} + K\right)(t_2 - t_1)} + \left( \rho + \frac{1}{t_d} + K \right) e^{-\left(\frac{1}{t_d} + K\right)(t_1 + t_2)} - \left( \frac{1}{t_d} + K \right) \left( e^{-\left(\frac{1}{t_d} + K\right)t_1 - \rho t_2} + e^{-\left(\frac{1}{t_d} + K\right)t_2 - \rho t_1} \right).$$

Outras aplicações na mesma área incluem: (i) transporte de água e solventes em meios porosos, em que as trajetórias moleculares são descritas por EDEs, por exemplo em reactores químicos; (ii) modelos de comportamento de bacias de drenagem, de rios (ditas hidrográficas) ou de sistemas de drenagem de águas pluviais urbanas, idealizando a bacia de drenagem como reservatórios em cascata e modelando as entradas no sistema como ruídos gaussianos; (iii) previsão e controlo de cheias ou fluxos em tempo real.

## 4 Navegação e seguimento (*tracking*)

Nos sistemas de navegação e nos modelos usados para o seguimento de objectos que se movem (*tracking*), o modelo é geralmente linear (Bar-Shalom et al. (2004)):

$$dX_t = FX_t dt + \Sigma dW_t, \quad X_0 = \xi \text{ (equação de estado)} \quad (2)$$

e parcialmente observado:

$$Y_k = h(t_k, X_{t_k}) + \varepsilon V_k \text{ (equação de observação)}. \quad (3)$$

O objectivo do estudo é estimar o estado  $X_t$  em cada instante  $t$ , em tempo real, dadas as observações até esse instante  $t$ . Naturalmente uma medida do erro de estimação também é geralmente necessária.

Um exemplo é a navegação e seguimento de veículos submarinos autónomos (AUVs) (ver Figura 2) observados através de bóias acústicas para navegação. Neste caso, em particular, tem-se

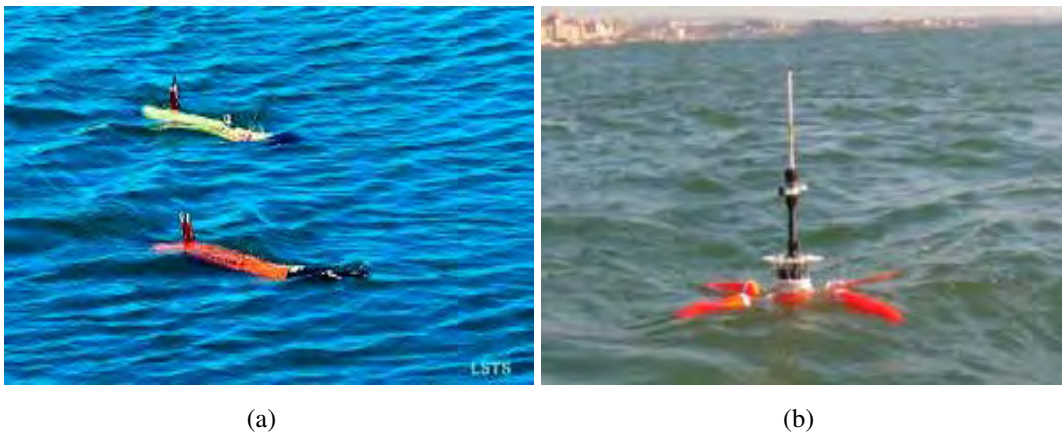


Figura 2: Navegação e seguimento de veículos submarinos autónomos: (a)veículos submarinos autónomos (AUVs); (b)bóia acústica portátil, para navegação.

$$h(t_k, X_{t_k}) = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k^{(1)} - a_1)^2 + (x_k^{(2)} - b_1)^2 + (x_k^{(3)} - c_1)^2} \\ \sqrt{(x_k^{(1)} - a_2)^2 + (x_k^{(2)} - b_2)^2 + (x_k^{(3)} - c_2)^2} \\ \sqrt{(x_k^{(1)} - a_3)^2 + (x_k^{(2)} - b_3)^2 + (x_k^{(3)} - c_3)^2} \end{bmatrix},$$

sendo  $(a_i, b_i, c_i)$  as coordenadas de localização das bóias e considerando 3 bóias. A dimensão de  $h$  tem obviamente a ver com o número de bóias, ou de instrumentos de medição no caso mais geral.

No que respeita à solução do problema, a melhor estimativa de  $X_t$  (no sentido do erro mínimo quadrático) é dada por  $\hat{X}_t = E[X_t | \sigma(\{Y_s\}_{s \leq t})]$  (ou, de uma forma mais geral,  $E[\phi(X_t) | \sigma(\{Y_s\}_{s \leq t})]$ ). Enquanto que determinar o estimador  $\hat{X}_t$  num modelo linear é bastante fácil, uma vez que estaremos a lidar com distribuições (condicionais) gaussianas, num modelo que envolva alguma não linearidade, como é o caso do modelo (2)–(3) já não será assim. A solução exacta do problema de estimação exigiria a resolução de uma equação em derivadas parciais, a equação de Duncan-Mortensen-Zakai (Pardoux, 2001; Fleming and Pardoux, 1982), para obtenção da densidade condicional. Em termos computacionais, dificilmente conseguiremos resolver esta equação em tempo real pelo que são usados, na prática, métodos aproximados. O mais popular destes métodos será o filtro de Kalman-Bucy (Gelb, 2001) que, neste caso,

fica:

passo de propagação

$$\begin{aligned} d\hat{X}_t &= F\hat{X}_t dt \\ dP_t &= FP_t dt + P_t F^T + \Sigma \Sigma^T \end{aligned}$$

passo de actualização

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t_k^+} &= \hat{X}_{t_k^-} + K_k [Y_k - h(t_k, \hat{X}_{t_k^-})] \\ P_k^+ &= [1 - K_k H_k(\hat{X}_{t_k^-})] P_k^- \\ K_k &= P_k^- H_k^T(\hat{X}_{t_k^-}) [H_k(\hat{X}_{t_k^-}) P_k^- H_k^T(\hat{X}_{t_k^-}) + \epsilon \epsilon^T]^{-1} \\ H &= \text{matriz jacobiana de } h \end{aligned}$$

Este algoritmo permite, para além de estimar o processo não observado, em cada instante (no exemplo, a posição e velocidade de um AUV) estimar a covariância do erro de estimação  $P_t$ . Os sistemas de GPS e de seguimento por satélite geram problemas deste tipo também.

## 5 Análise de sistemas de energia

As EDEs podem ser usadas para modelar tanto as cargas ou solicitações do sistema como o estado da linha de transmissão, na produção de energia (Milano and Zarate-Minano (2013)). O problema da gestão equilibrada de um sistema de energia, de hora a hora, pode ser abordado pela via destes modelos. Uma vantagem que fica logo realçada é a de termos uma metodologia que pode ser aplicada a sistemas de qualquer ordem ou complexidade. As EDEs permitem ainda avaliar o peso de perturbações estocásticas no comportamento transitório dos sistemas de potência. As fontes de perturbação consistem, neste contexto, em variações estocásticas das cargas ou das solicitações, nas vibrações de carácter transitório nos rotores de máquinas síncronas, variações nas harmónicas, EMTs, erros de medição em dispositivos de controlo, etc. A título de exemplo, a Figura 3 representa o comportamento da tensão num sistema complexo, obtida recorrendo a EDEs, segundo (Milano and Zarate-Minano, 2013). Mais concretamente,

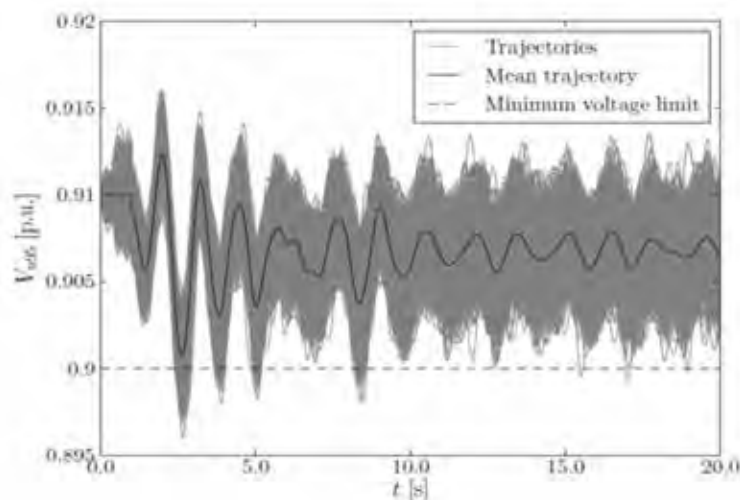


Figura 3: Comportamento da tensão obtida num sistema complexo usando um modelo de EDEs (Milano and Zarate-Minano, 2013).

neste exemplo, está a ser estudado um sistema constituído por 145 bus e 50 máquinas. O modelo para

as cargas é uma EDE do tipo de reversão para a média, a velocidade do rotor e das máquinas síncronas é considerada linear enquanto que os *phasors* de tensão de barramento são não lineares. As curvas representadas na figura foram obtidas na simulação de 1000 trajectórias e permitem observar que cerca de 38% das trajectórias não cumprem o limite MVTL (Minimum Voltage Technical Limit), permitindo portanto estimar probabilidades de ocorrência de estados desadequados para estes sistemas.

As EDEs permitem também uma análise bastante cuidada e realista do comportamento transiente de sistemas eléctricos (ver e.g. Brancik and Kolarova (2012)).

## 6 Monitorização de torres eólicas e outras estruturas de grande porte

Em termos de engenharia, as modernas turbinas eólicas são compostas de estruturas de suporte muito altas, juntamente com grandes pás de rotor, levando a sistemas altamente dinâmicos, propensos a problemas de degradação. Com o objetivo de detectar danos numa fase inicial, é frequentemente usada uma metodologia baseada na estimativa de certos parâmetros da estrutura, ditos as frequências modais, a partir de dados de vibração da estrutura recolhidos no seu funcionamento normal. O problema de estimar esses parâmetros é equivalente ao problema de estimar os parâmetros de EDEs num modelo parcialmente observado, assumido como sendo linear (ver e.g. Dai et al. (2017)):

$$\begin{aligned} dX_t &= AX_t dt + \Sigma dW_t, & X_0 &= \xi \text{ (equação de estado)} \\ Y_k &= CX_{t_k} + GV_k & & \text{(equação de observação)} \end{aligned}$$

sendo

- $X_t$  um vector representando deslocamento e velocidade em cada nodo da estrutura (ver Figura 4, em que as cruces assinalam os nodos considerados na estrutura);
- $\Sigma, G$  são matrizes, em geral consideradas conhecidas, sendo  $\Sigma\Sigma^T$  e  $GG^T$  as matrizes de covariância das respectivas perturbações;
- $A, C$  são matrizes geralmente desconhecidas.



Figura 4: Torre eólica com indicação dos nodos considerados na estrutura, assinalados por cruces.

O problema consiste portanto em estimar  $A$  e  $C$ , nomeadamente a matriz  $A$ , com base nas observações obtidas pelos instrumentos de medida instalados da estrutura, ou em testar hipóteses sobre esses mesmos



parâmetros desconhecidos, tendo em conta, para além destes, dados de referência sobre essa mesma estrutura (Figura 5).

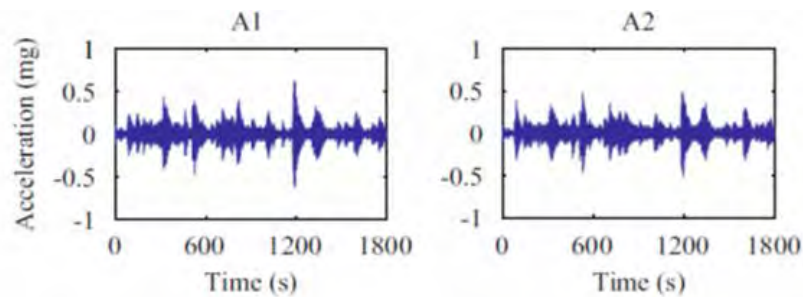


Figura 5: Exemplo de um registo feito por dois dos aparelhos de medição.

Trata-se tipicamente de problemas que envolvem elevadas dimensões nas matrizes, logo também no espaço de parâmetros desconhecidos, problemas esses para os quais são habitualmente usadas algumas simplificações, por exemplo restringindo o conjunto de parâmetros que se vai efectivamente monitorizar a um subconjunto dos parâmetros mais relevantes (após uma análise estatística e de engenharia cuidadas), ou adoptando estimadores subóptimos, entre os quais o Filtro de Kalman ou os Métodos de Subespaço (Peeters and de Roeck (1999)).

Problemas semelhantes surgem em estruturas de pontes e edifícios altos, entre outros.

## 7 Comentários finais

Não restam dúvidas de que as EDEs são muito úteis em problemas reais de engenharia. Os cálculos, ou mesmo a manipulação matemática, podem ser difíceis mas as expressões que obtemos com base nestes modelos são, em geral, elegantes e fáceis de implementar em muitos casos, com vantagens sobre modelos alternativos de tipo discreto como os que se baseiam em séries temporais. Métodos de estimação, testes de hipóteses, esquemas de simulação, etc. estão já implementados em algumas linguagens ou pacotes de código (em R, por exemplo) que podem ajudar-nos a analisar e a resolver problemas que surgem nesta área.

### Agradecimentos

O autor foi parcialmente apoiado pelo CMUP (projeto UID/MAT/00144/2013), que é financiado pela FCT (Portugal) com fundos estruturais nacionais (MEC) e europeus através dos programas FEDER, ao abrigo de acordos de parceria PT2020. Foi também parcialmente apoiado pelo projeto STRIDE ref. NORTE-01-0145-FEDER-000033, que é financiado pelo programa NORTE2020, através do Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional (FEDER).

## Referências

- Y. Bar-Shalom, X. Rong Li, and Thiagalingam Kirubarajan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. John Wiley & Sons, 2004.
- B.A. Bodo, M.E. Thompson, and T.E. Unny. A review on stochastic differential equations for applications in hydrology. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, 1(2):81–100, 1987.

- L. Brancik and E. Kolarova. Analysis of higher-order electrical circuits with noisy sources via stochastic differential equations approach. pages 81–84, 2012.
- K. Dai, Y. Wang, W. Lu, X. Ren, and Z. Huang. Investigation of the stochastic subspace identification method for on-line wind turbine tower monitoring. volume 10169, 2017. doi: 10.1117/12.2259759.
- Wendell H. Fleming and Etienne Pardoux. Optimal control for partially observed diffusions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 20(2):261–285, 1982. doi: 10.1137/0320021.
- Arthur Gelb. *Applied Optimal Estimation*. The MIT Press, 2001.
- A. Mendelson and R. Tenno. Application of zakai equation in parameter identification of electrode kinetics. volume 15, pages 1423–1428, 2009. doi: 10.3182/20090706-3-FR-2004.0406.
- F. Milano and R. Zarate-Minano. A systematic method to model power systems as stochastic differential algebraic equations. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(4):4537–4544, 2013.
- Etienne Pardoux. Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées. In Paul-Louis Hennequin, editor, *Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX - 1989*, Probability Theory & Stochastic Processes, pages 68–163. Springer, 2001.
- B. Peeters and G. de Roeck. Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(6):855–878, 1999.
- Sergio E. Serrano. Stochastic differential equation models of erratic infiltration. *Water Resources Research*, 26(4):703–711, 1990. doi: 10.1029/WR026i004p00703.
- Sergio E. Serrano. *Engineering Uncertainty and Risk Analysis*. HydroScience Inc., 2001.



# Problemas de tempo ótimo de paragem com critério integral

Cláudia Nunes, *cnunes@math.tecnico.ulisboa.pt*

CEMAT, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

Carlos Oliveira, *cmdoliveira@fc.ul.pt*

Grupo de Física Matemática e Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade de Lisboa

## 1 Introdução

Um dos problemas com maior relevância na área financeira prende-se com o estudo do tempo em que uma opção (financeira ou investimento) deve ser exercida, de forma a maximizar o valor esperado do retorno da decisão. O instante em que a decisão é tomada é conhecido na literatura como *instante de paragem*, e o problema de decisão é designado por *problema de tempo ótimo de paragem*. Neste artigo revisitamos um problema típico de tempo ótimo de paragem, apresentando uma versão geral, que permite considerar funções de retorno, adiante definidas, o mais gerais possíveis. Dadas as limitações de espaço, serão apresentados os resultados mais relevantes, dispensando-se as demonstrações. Serão referidas apenas as referências mais abrangentes, sendo que destacamos o livro de Peskir e Shiryaev [6] para uma leitura aprofundada sobre o problema de paragem ótima.

Ao longo do trabalho consideramos que  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  é um movimento geométrico Browniano, solução de

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$

com  $X(0) = x$ , sendo  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  um movimento Browniano. Além disso, considera-se a função  $\Pi$ , usualmente designada na literatura por *função recompensa*, onde  $\Pi(x)$  representa a recompensa quando o estado processo  $X$  é  $x$ . Definidos  $X$  e  $\Pi$ , estamos em condições de definir o problema de otimização da seguinte forma:

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E \left[ \int_0^\tau e^{-rs} \Pi(X(s)) ds \mid X(0) = x \right], \quad (1)$$

onde  $\mathcal{S}$  é o conjunto dos tempos de paragem admissíveis, e  $r$  representa, nas aplicações de índole financeira, a taxa de juro. A função  $V$  é designada por *função valor*, e é frequentemente estudada no contexto de opções reais, descrevendo, por exemplo, o retorno esperado de uma empresa enquanto está ativa no mercado, sendo  $\tau$  o instante em que decide abandonar o mesmo. Vide, por exemplo, Dixit e Pindyck [1], Trigeorgis[7] e Hagspiel, Huisman, Kort e Nunes [3]).

Neste trabalho estudamos condições mínimas sobre a função  $\Pi$  que ainda assim levam à existência de solução de (1). De entre vários trabalhos que se focam nesta questão, salienta-se Knudsen, Meister e Zervos [4]. Neste artigo os autores assumem que

$$E_x \left[ \int_0^\infty e^{-rs} |\Pi(X(s))| ds \right] < \infty, \quad (2)$$

(onde a notação  $E_x$  designa valor esperado condicional em  $X(0) = x$ ) hipótese essa que relaxaremos. Ao invés, assumimos as seguintes condições sobre a função  $\Pi$ .

**Hipótese 1.1.** A função  $\Pi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é Borel mensurável, tal que os conjuntos  $\{x \in I : \Pi(x) > 0\}$  e  $\{x \in I : \Pi(x) < 0\}$  têm medida de Lebesgue positiva e  $v_p^+(x) := E \left[ \int_0^\infty e^{-rs} \Pi^+(X(s)) ds \mid X(0) = x \right] < \infty$  para todo o  $x \in I$ . Além disso,  $\{x > 0 : \Pi(x) < 0\} \subset ]0, a_1[$  e  $\{x > 0 : \Pi(x) > 0\} \subset ]a_2, \infty[$  (ou vice-versa), com  $0 < a_1 \leq a_2 < \infty$ .

## 2 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

A resolução dos problemas de tempo ótimo de paragem passa pelo estudo de uma equação variacional, designada por equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Um dos elementos desta equação é uma equação diferencial, pelo que para garantirmos unicidade da solução (uma vez que o problema de otimização tem solução única), é necessário impor certas condições de fronteira, assim como restrições no comportamento limite da solução. A correspondente equação de HJB para o problema definido em (1) é:

$$\min \{ -\mathcal{L}v(x) - \Pi(x), v(x) \} = 0. \quad (3)$$

onde o operador  $\mathcal{L}$ , que aparece associado ao process  $X$ , é definido por  $\mathcal{L}\phi(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E_x [e^{-rt} \phi(X(t)) - \phi(x)]}{t}$ , que, para o caso do movimento geométrico Browniano, toma a seguinte forma:

$$\mathcal{L}\phi(x) = -r\phi(x) + \alpha x \phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \phi''(x). \quad (4)$$

Consequentemente, para resolver a equação de HJB é necessário encontrar uma solução,  $v$ , para a equação diferencial ordinária, que será candidata a solução do problema de otimização. Aqui nota-se que a equação de HJB pode não ter nenhuma solução clássica, no sentido que pode não existir nenhuma função  $v \in C^2$  que a satisfaça. Para evitar esse constrangimento, podem ser considerados outros conceitos de solução, nomeadamente as solução de Carathéodory (ou até soluções de viscosidade quando consideramos problemas de com processos  $n$ -dimensionais). De forma a garantirmos existência e unicidade de solução (de Carathéodory), impomos a seguinte hipótese sobre  $\Pi$ :  $\Pi$  é localmente somável em  $\mathbb{R}^+$ .

O próximo teorema garante a existência e unicidade de solução para o problema de tempo ótimo de paragem definido em (1), sendo uma variante do Teorema 3.2 apresentado em Knudsen, Meister and Zervos [4]. Relaxa algumas das hipóteses habitualmente impostas, uma vez que se exige apenas que  $v_p^+(x) < \infty$  para todo o  $x \in \mathbb{R}^+$  em vez de (2).

**Teorema 2.1.** Consideremos o problema de tempo ótimo de paragem descrito em (1), com as hipóteses sobre  $\Pi$  atrás referidas. Seja ainda  $v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma solução da equação de HJB (3), tal que  $v \in C^1(\mathbb{R}^+)$ ,  $v' \in AC(\mathbb{R}^+)$  e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} E_x [v(X(t)) \mathcal{I}_{\{\tau^* > t\}}] = 0, \quad (5)$$

onde  $\tau^* = \inf \{t > 0 : v(X(t)) = 0\}$  e  $\mathcal{I}_{\{\cdot\}}$  representa a função indicatriz. Então, a função valor verifica  $V(x) = v(x)$  para todo o  $x \in \mathbb{R}^+$ .

De realçar que é possível dividir o espaço de estados  $\mathbb{R}^+$  em duas regiões: a região de continuação, dada por  $D^c = \{x > 0 : v(x) > 0\}$ , e a da paragem, dada por  $D = \{x > 0 : v(x) = 0\}$ . Além disso, o tempo de paragem (em que se exerce a decisão) é dado por  $\tau^*$ , definido no teorema anterior.

Para referência futura, notamos que, utilizando a mudança de variável dada por  $t = \ln(x)$  e  $u(t) = \phi(e^t)$ , o gerador infinitesimal anterior é dado por  $\tilde{\mathcal{L}}u(t) = -ru(t) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) u'(t) + \frac{\sigma^2}{2} u''(t)$ . Por sua

vez, o polinómio característico associado ao operador  $\tilde{\mathcal{L}}$  é dado por

$$P(d) = \frac{\sigma^2}{2}d^2 - \left(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\right)d - r \quad (6)$$

e as suas raízes são  $d_1 := \frac{(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha) - \sqrt{(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha)^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$  e  $d_2 := \frac{(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha) + \sqrt{(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha)^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$ .

De acordo com o Teorema 2.1, a solução do Problema (1) deve verificar  $v \in C^1(\mathbb{R}^+)$  com  $v' \in AC(\mathbb{R}^+)$ . Uma vez que  $v(x) = 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}^+$ , temos em consideração as seguintes condições de fronteira:

$$v(x^*) = v'(x^*) = 0, \quad (7)$$

onde  $x^* \in \mathbb{R}^+$  é um valor a determinar. Usando a mudança de variável acima introduzida é fácil obtermos o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} -\tilde{\mathcal{L}}u(t) - \Pi(e^t) = 0 \\ u(\log(x^*)) = u'(\log(x^*)) = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

com  $\tilde{\mathcal{L}}$  atrás definido.

Notamos que, na literatura sobre problemas de tempo ótimo de paragem, é usual assumir que a função  $\Pi$  é tal que (2) é válida, o que garante que a solução particular da EDO associada à HJB,  $v_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , pode ser dada pela função

$$v_p(x) = E_x \left[ \int_0^\infty e^{-rs} \Pi(X(s)) ds \right] \quad (9)$$

$$= \frac{2}{\sigma^2(d_2 - d_1)} \left[ x^{d_1} \int_0^x s^{-d_1-1} \Pi(s) ds + x^{d_2} \int_x^\infty s^{-d_2-1} \Pi(s) ds \right]. \quad (10)$$

Na verdade, a condição (2) é equivalente a termos

$$x \rightarrow x^{-d_1-1} \Pi(x) \in L^1(]0, w]) \quad \text{e} \quad x \rightarrow x^{-d_2-1} \Pi(x) \in L^1(]w, \infty[), \quad (11)$$

para todo o  $w \in ]0, \infty[$  e  $d_1, d_2$  reais. Estes resultados podem ser encontrados em Knudsen, Meister e Zervos [4] e em Kobila [5]. Neste trabalho, relaxamos a referida hipótese, assumindo apenas que  $v_p^+(x) < \infty$ , pelo que a função apresentada em (9) pode não estar bem definida e não coincidir com a solução particular da ODE. A próxima proposição é apenas um corolário do Teorema 4.1 em Knudsen, Meister e Zervos [4], mas que se apresenta num formato mais útil para as secções seguintes.

**Proposição 2.1.** *Nas condições atrás impostas para  $\Pi$ , e sendo  $X$  um GBM, com  $b > 0$  uma constante dada e  $d_1$  e  $d_2$  as raízes do polinómio característico, então as afirmações seguintes são verdadeiras:*

- $E_x \left[ \int_0^\infty e^{-rs} |\Pi(X(s))| \mathcal{I}_{\{X(s) > b\}} \right] < \infty$ , qualquer que seja a condição inicial  $x > 0$ , se e só se  $x \rightarrow x^{-d_2-1} \Pi(x) \in L_1(]w, \infty[)$  para todo o  $w > b$ ;
- $E_x \left[ \int_0^\infty e^{-rs} |\Pi(X(s))| \mathcal{I}_{\{X(s) < b\}} \right] < \infty$ , qualquer que seja a condição inicial  $x > 0$ , se e só se  $x \rightarrow x^{-d_1-1} \Pi(x) \in L_1(]0, w])$  para todo o  $w < b$ .

Esta caracterização, apesar de completa, é de difícil utilização quando pensamos nas aplicações. Assim, o próximo resultado fornece uma regra de fácil utilização que permite excluir muitos dos casos em que  $v_p^+(x) = \infty$ , com  $x > 0$ , e que poderiam ter interesse nas aplicações.

**Proposição 2.2.** *Nas condições assumidas sobre  $\Pi$ , as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. se  $v_p^+(x) < \infty$  então  $d_1 < d_2$ ;

2. se  $d_1 < d_2$  e, além disso, uma das seguintes condições é verdadeira

a) se  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Pi(x) \geq 0$  e existem constantes  $\beta < d_2$  e  $B > 0$  tais que

$$\Pi(x) \leq Bx^\beta, \text{ para todo } x > 0; \quad (12)$$

b) ou se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Pi(x) \geq 0$  e existem constantes  $\beta > d_1$  e  $B > 0$  tais que

$$\Pi(x) \geq Bx^\beta, \text{ para todo } x > 0; \quad (13)$$

então a condição  $v_p^+(x) < \infty$  é verdadeira.

Notamos que as raízes  $d_1$  e  $d_2$  são reais e distintas se e só se  $r > -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} - \alpha \right)$ . Esta condição permite acomodar, em particular, taxas de juro negativas.

### 3 Solução do Problema de Optimização

Nesta secção, apresentamos uma solução analítica para o problema de tempo ótimo de paragem (1). A representação da solução do PVI aqui apresentada difere das representações habitualmente utilizadas na literatura, pelo facto de não termos a garantia que  $x \rightarrow x^{-d_1-1}\Pi(x) \in L_1(]0, w[)$  para todo o  $w > 0$ . A próxima proposição apresenta uma solução para o PVI apresentado em (8) e, conseqüentemente, uma solução para a HJB (3).

**Proposição 3.1.** *A solução do PVI, definido por (7) e (8), é a função  $v : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica:*

$$\begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \frac{-2}{\sigma^2(d_2 - d_1)} \begin{pmatrix} \int_{x^*}^x \frac{(\frac{x}{s})^{d_2} - (\frac{x}{s})^{d_1}}{s} \Pi(s) ds \\ \frac{1}{x} \int_{x^*}^x \frac{d_2(\frac{x}{s})^{d_2} - d_1(\frac{x}{s})^{d_1}}{s} \Pi(s) ds \end{pmatrix}. \quad (14)$$

pele que a solução do problema de otimização inicial formulado em (1) é dada por

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{A} \\ \frac{-2}{\sigma^2(d_2 - d_1)} \int_{x^*}^x \frac{(\frac{x}{s})^{d_2} - (\frac{x}{s})^{d_1}}{s} \Pi(s) ds & x \in \mathcal{A}^c \end{cases}, \quad (15)$$

onde  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^c$  e  $x^*$  são dados por uma das seguintes condições:

1) se existe  $a > 0$  tal que  $\Pi(x)$  é não positiva, para todo  $x < a$ , então  $\mathcal{A} = (0, \gamma]$ ,  $\mathcal{A}^c = (\gamma, \infty)$  e  $x^* = \gamma$ , onde  $\gamma$  é dado por:

$$\gamma = \inf \left\{ x > 0 : \exists C > 0, \int_x^C \frac{(\frac{C}{s})^{d_2} - (\frac{C}{s})^{d_1}}{s} \Pi(s) ds \geq 0 \right\}; \quad (16)$$

2) se existe  $a > 0$  tal que  $\Pi(x)$  é não negativa para todo  $x < a$ , então  $\mathcal{A} = [\zeta, \infty)$ ,  $\mathcal{A}^c = (0, \zeta)$  e  $x^* = \zeta$ , onde  $\zeta$  é dado por:

$$\zeta = \sup \left\{ x > 0 : \exists C > 0, \int_C^x \frac{(\frac{C}{s})^{d_2} - (\frac{C}{s})^{d_1}}{s} \Pi(s) ds \geq 0 \right\}. \quad (17)$$

Uma vez que em muitas aplicações, nomeadamente na área das opções reais, a função  $v$  apresenta-se normalmente com outro aspeto, na próxima observação estabelecemos o paralelo entre as duas representações.

**Observação 3.1.** Se, adicionalmente, a função  $\Pi$  for tal que verifique  $v_p^-(x) := E_x \left[ \int_0^\infty \Pi^-(X(s)) ds \right] < \infty$ , com  $\Pi^-(x) = \max(0, -\Pi(x))$ , então, nesse caso, temos

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{-2}{\sigma^2(d_2 - d_1)} \left( x^{d_2} \int_{x^*}^x s^{-d_2-1} \Pi(s) ds - x^{d_1} \int_{x^*}^x s^{-d_1-1} \Pi(s) ds \right) \\ &= a_1 x^{d_1} + a_2 x^{d_2} + v_p(x), \end{aligned}$$

onde  $v_p$  é dada por (9),  $a_1 = \frac{-2}{\sigma^2(d_2-d_1)} \int_0^{x^*} s^{-d_1-1} \Pi(s) ds$  e  $a_2 = \frac{-2}{\sigma^2(d_2-d_1)} \int_{x^*}^\infty s^{-d_2-1} \Pi(s) ds$ . Esta última representação é aquela que normalmente encontramos na literatura das opções reais.

Está implícito na obtenção da solução da equação de HJB as chamadas *condições de colagem* que permitem garantir que a função  $v$  é continuamente diferenciável e com derivada absolutamente contínua. No entanto, este tipo de problemas são conhecidos na literatura como *problemas de fronteira livre* (vide por exemplo Peskir e Shiryaev [6]), uma vez que o domínio onde pretendemos obter a solução da ODE é desconhecido. Assim sendo, opta-se algumas vezes por obter a solução da equação de HJB, e respetivamente do problema de tempo ótimo de paragem, como o limite das soluções de um problema de tempo ótimo truncado (vide por exemplo Guerra, Nunes e Oliveira [2]), o que motiva o aparecimento das Definições (16) e (17). Apesar disso, em alguns casos, é possível obter  $\gamma$  e  $\delta$  como a solução de uma equação integral, que coincide com a proposta em Knudsen, Meister e Zervos [4] no caso das funções  $\Pi$  não decrescentes.

**Proposição 3.2.** Consideremos  $\gamma$  e  $\zeta$  definidos em (16) e (17), respetivamente, tais que  $\gamma \neq 0$  e  $\zeta \neq 0$ . Então,  $\gamma$  e  $\zeta$  são as únicas soluções das equações

$$\int_\gamma^\infty s^{-d_2-1} \Pi(s) ds = 0 \quad e \quad \int_0^\zeta s^{-d_1-1} \Pi(s) ds = 0. \quad (18)$$

## 4 Conclusão

Para um problema de tempo ótimo de paragem do tipo

$$\sup_\tau E \left[ \int_0^\tau e^{-rs} \Pi(X(s)) ds \mid X(0) = x \right]$$

é possível encontrar-se solução para funções mais genéricas que o habitual, exigindo apenas que  $\Pi$  seja mensurável e localmente integrável. Embora a apresentação aqui feita considere apenas o caso do processo  $X$  ser um movimento geométrico Browniano, é possível uma análise similar para outro tipo de difusões.

No caso presente, assumindo então que  $X$  segue um movimento geométrico Browniano e que a função  $\Pi$  muda de sinal apenas uma vez, a representação integral que se propõe leva ainda a soluções analíticas em forma fechada para o problema.

Embora este tópico seja omitido neste pequeno artigo, é possível analisar ainda problemas de tempos de paragem com taxas de juro negativas, que levam a resultados inesperados de acordo com o senso comum das opções reais.

## Agradecimentos

Este trabalho foi suportado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) através da bolsa de doutoramento SFRH/BD/102186/2014.

## Referências

- [1] Avinash K Dixit and Robert S Pindyck. *Investment under uncertainty*. Princeton university press, 1994.
- [2] Manuel Guerra, Cláudia Nunes, and Carlos Oliveira. Exit option for a class of profit functions. *International Journal of Computer Mathematics*, 94(11):2178–2193, 2017.
- [3] Verena Hagspiel, Kuno JM Huisman, Peter M Kort, and Cláudia Nunes. How to escape a declining market: Capacity investment or exit? *European Journal of Operational Research*, 254(1):40–50, 2016.
- [4] Thomas S Knudsen, Bernhard Meister, and Mihail Zervos. Valuation of investments in real assets with implications for the stock prices. *SIAM journal on control and optimization*, 36(6):2082–2102, 1998.
- [5] TØ Kobila. A class of solvable stochastic investment problems involving singular controls. *Stochastics and Stochastic Reports*, 43(1-2):29–63, 1993.
- [6] Goran Peskir and Albert Shiryaev. *Optimal stopping and free-boundary problems*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [7] Lenos Trigeorgis. *Real options: Managerial flexibility and strategy in resource allocation*. MIT press, 1996.





# Um breve olhar sobre a Estatística das Equações Diferenciais Estocásticas em Portugal

Manuel L. Esquível, *mle@fct.unl.pt*

*Departamento de Matemática FCT NOVA e CMA/FCT NOVA/UNL*

## Introdução

A Estatística das Equações Diferenciais Estocásticas (EDE) é essencial para a aplicação deste tipo de modelos a problemas práticos. Nesta breve nota propomo-nos desenvolver uma descrição informal de alguns dos trabalhos de matemáticos Portugueses que contribuíram para o desenvolvimento das técnicas da Estatística das EDE. Procuraremos enquadrar os resultados obtidos nos problemas da Estatística e, da simulação de Monte Carlo, das EDE nas áreas respectivas de onde proveio a modelação.

Num caso particular muito frequente nos estudos que vamos referir, a equação diferencial estocástica (EDE) que nos interessa pode ser representada na fórmula seguinte,

$$X_t^\Theta = X_0^\Theta + \int_0^t f(X_u^\Theta, u, \Theta) du + \int_0^t h(X_u^\Theta, u, \Theta) dB_u$$

em que  $(X_t^\Theta)_{t \geq 0}$  é desconhecido e é o processo estocástico – família de variáveis aleatórias indexada pelos números reais não negativos – que resolve a equação,  $X_0^\Theta$  é a condição inicial e onde  $(B_t)_{t \geq 0}$  é o processo estocástico de Wiener; processo este muitas vezes também denominado movimento Browniano. O símbolo  $\Theta$  designa um parâmetro que pode ser multidimensional e que determina, tanto o *drift*  $f(X_t^\Theta, u, \Theta)$  – também conhecido como o coeficiente infinitesimal de *tendência* da equação – como determina o coeficiente infinitesimal denominado *volatilidade*  $h(X_t^\Theta, u, \Theta)$ . A representação diferencial da EDE acima escreve-se na forma:

$$dX_t^\Theta = f(X_t^\Theta, u, \Theta) dt + h(X_t^\Theta, u, \Theta) dB_t$$

No caso das EDE deste tipo, o objectivo das técnicas estatísticas é a estimação do parâmetro  $\Theta$ . Sublinhamos que os processos estocásticos semelhantes ao processo de Wiener podem ser vistos como uma variável aleatória em que os valores são, não números ou vectores mas sim, funções contínuas sem derivadas e sem variação limitada. A definição do integral de uma função relativamente ao processo de Wiener, integral como o que figura no termo à direita da equação EDE acima, foi introduzida em 1944 e 1946 em *Itô K (44)* e *Itô K (46)* na sua forma mais correntemente utilizada, pelo matemático Japonês Kiyosi Ito (1915-2008) e requer uma aproximação diferente da que se pode usar para os integrais de Riemann, Stieltjes ou de Lebesgue; a necessidade de uma tal aproximação diferenciada decorre da impossibilidade de definir o integral, do termo mais à direita no segundo membro da EDE acima, como um integral de Stieltjes uma vez que as trajetórias de  $(B_t)_{t \geq 0}$  não têm variação limitada.

São muito variadas as áreas do conhecimento científico em que – nas investigações em curso – se estudam e estimam modelos quantitativos com EDE do tipo representado acima. Em Portugal destacam-se as áreas da *Dinâmica das Populações em Ambientes Aleatórios* (Braumann, Brites, Filipe, Roquete), a *Mecânica e a Engenharia Estrutural* (Milheiro, Prior) e a *Matemática Financeira e a Econometria* (Dias, Esquível, Gaspar, Larginho, Mota, Nicolau, Vidal Nunes). Seguidamente vamos detalhar algumas contribuições, pelos autores referidos, em cada uma destas áreas.

## Dinâmica das Populações em Ambiente Aleatório

Os modelos de dinâmica de populações mais comuns partem de equações diferenciais que descrevem o comportamento médio das populações de um certo tipo. Quando se pretende um modelo mais completo que possa descrever, a mais do comportamento médio das populações, outras propriedades da dinâmica pode considerar-se que ao termo da equação diferencial usual - por exemplo logística ou Gompertz - que se pode sempre representar, na forma integral, por:

$$X_t^\Theta = X_0^\Theta + \int_0^t f(X_u^\Theta, u, \Theta) du$$

se adiciona um termo estocástico, uma perturbação aditiva aleatória do tipo

$$\int_0^t h(X_u^\Theta, u, \Theta) dB_u$$

sendo o resultado dessa soma uma EDE do tipo referido na introdução. Assim, com esta EDE, fica-se com um modelo que pode representar as variações da dinâmica das populações em torno da evolução de uma população média que se pode considerar como população de referência. A partir desta ideia inicial muitos outros modelos podem ser estudados. Os trabalhos pioneiros *Braumann C (83)*, *Braumann C (85)* e *Braumann C (88)* introduzem modelos onde, para além de se estudarem os métodos de estimação que permitem a aplicação dos modelos a populações reais, se determinam a partir dos modelos ajustados, quantidades relevantes como a probabilidade de extinção de uma população do tipo da que é modelada pela EDE. Mais recentemente, no trabalho *Filipe et al (10)*, os autores desenvolvem estudos para de estimação não paramétrica dos coeficientes de tendência e de volatilidade para dados provenientes de várias trajetórias e não uniformemente espaçados. Sublinhe-se que os métodos não paramétricos anteriores só consideravam uma trajetória, situação usual nos dados financeiros para os quais se tem um volume de dados suficiente para que a estimação não paramétrica seja bem sucedida. No caso que é o objecto deste estudo, tratando-se de um modelo de crescimento individual de bovinos, cada trajetória tinha apenas um pequeno número de observações mas, em compensação, os dados continham muitas trajetórias - correspondentes a muitos animais - com características relativamente uniformes, sendo admissível terem um modelo comum e com os mesmos parâmetros.

## Mecânica e Engenharia Estrutural

O estudo da oscilação um sistema mecânico pode ser feito através de um modelo com uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes, que é a equação do oscilador linear para o deslocamento. Quando no modelo se considera uma excitação aleatória no segundo membro, obtém-se uma equação do tipo da equação de Langevin; a esta, por sua vez, pode associar-se o sistema de equações diferenciais estocásticas dado por :

$$\begin{bmatrix} dX_t^d \\ dX_t^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_t^d \\ X_t^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dB_t^d \\ dB_t^v \end{bmatrix}$$

no qual,  $(X_t^d)_{t \geq 0}$  é o deslocamento linear,  $(X_t^v)_{t \geq 0}$  é a velocidade do deslocamento e onde  $k$ , a rigidez,  $m$ , a massa e  $c$ , o amortecimento, são parâmetros do modelo. Em *Prior et al (14)* estimam-se os parâmetros  $k$  e  $c$  do modelo, descrito pela EDE multi-dimensional acima, supondo que num dado instante fixo o parâmetro  $k$  muda de valor; trata-se, pois, de um problema de EDE com regimes de um tipo especial em que o tempo em que o regime muda é não aleatório. A estimação é feita pelo método da verosimilhança máxima recorrendo à solução explícita da EDE multi-dimensional do modelo. Posteriormente em *Prior et al (16)* os autores consideraram um modelo do tipo anterior só que com parâmetros matriciais e obtêm resultados muito gerais de regularidade para o estimador de verosimilhança máxima do coeficiente de tendência - que é matricial - do sistema de EDE recorrendo à noção de modelo regular segundo Ibragimov-Khasminskii que é explorada em *Ibragimov et al (81)*. O trabalho apresenta ainda estudos de simulação para modelos com relevância na engenharia de estruturas. O trabalho *Milheiro et al (03)* trata da construção de um estimador aproximado (filtro) para o estado de um sistema com comportamento não linear, parcialmente observado, para ser usado em tempo real quando o erro de medição é fraco. Mostra-se que o estimador proposto converge para o estimador óptimo quando a intensidade do ruído de observação tende para zero. Investiga-se também uma aplicação ao seguimento da queda de um corpo atravessando a atmosfera.

No âmbito da Matemática Financeira e da Econometria há muitos temas que admitem uma modelação eficaz por meio das EDE. Referiremos, entre outros cultivados em Portugal, os modelos com regimes auto-induzidos e modelos que rotineiramente são aplicados a problemas de matemática financeira e para os quais se desenvolvem métodos, mais eficazes, de estimação e simulação de Monte Carlo.

Os modelos com regimes auto-induzidos aparecem naturalmente quando o fenómeno aleatório, que pretendemos modelar com uma EDE, pode exibir alterações estruturais no tempo que levem a admitir que os termos de tendência e de volatilidade, da EDE que descreve o fenómeno, possam mudar a sua estrutura. Nessas condições a EDE – generalizada – que descreve o fenómeno pode ser, por exemplo, do seguinte tipo:

$$X_t^{\Theta_i} = X_{\tau_j}^{\Theta_i} + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f(X_u^{\Theta_i}, u, \Theta_i) du + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} h(X_u^{\Theta_i}, u, \Theta_i) dB_u \quad i = 1, 2$$

em que  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots$  é uma sucessão de tempos aleatórios, tempos nos quais o parâmetro muda de  $\Theta_1$  para  $\Theta_2$  ou vice versa. No trabalho *Esquível et al (14)* é feita a construção deste tipo de modelos no caso em que os tempos aleatórios são definidos pelo atravessamento de limiares – limiares superiores e inferiores, ou barreiras – pelas trajectórias do processo solução; propõe-se também um método de estimação dos parâmetros – com estimadores que se demonstra serem consistentes – que combina estimadores conhecidos com a minimização de uma função de contraste de mínimos quadrados; esta minimização é realizada sobre uma grelha que discretiza o espaço de parametrização dos limiares. Há, na literatura, outros modelos com regimes em que os tempos aleatórios em que ocorre a mudança de regime são, eles próprios, definidos por um outro processo estocástico, por exemplo por uma cadeia de Markov; a vantagem dos modelos com regimes auto-induzidos é que não há outra fonte de aleatoriedade para além da que rege a EDE e esta característica confere propriedades notáveis aos modelos. Por exemplo, os modelos com regimes auto-induzidos de preços de activos são completos – isto é permitem a definição de um preço único para produtos financeiros derivados – e tal é conseguido em condições muito gerais. O trabalho *Mota et al (14)* explora a aplicação das técnicas estatísticas desenvolvidas – com dados reais da Bolsa de Nova York – a um modelo com regimes auto-induzidos de tipo Browniano geométrico, conseguindo-se por simulação de Monte Carlo o apreçamento de produtos financeiros derivados simples de tipo *call-option*. O trabalho *Mota et al (16)* faz um estudo estatístico de modelos sem e, com regimes, e mostra que na perspectiva de critérios estatísticos standard – tais como o AIC ou o BIC – os modelos com regimes são preferíveis.

Na segunda área temática que identificámos, os novos métodos para modelos clássicos, temos uma variedade apreciável de resultados. Os trabalhos notáveis que referimos seguidamente, da autoria de João Nicolau, que foi aluno de doutoramento de Carlos Braumann, focam-se na estimação não paramétrica de difusões homogéneas e não homogéneas. *Nicolau (02)* apresenta um método para determinar, por simulação de Monte Carlo uma aproximação ao estimador de verosimilhança máxima do parâmetro de uma difusão homogénea a partir da densidade de transição. *Nicolau (03)* quantifica e, propõe um ajustamento para, o viés assintótico do estimador de Florens-Zmirou e do estimador de Jiang and Knight do coeficiente infinitesimal de volatilidade – estimadores estes que são não paramétricos, isto é, baseados num núcleo (*kernel*) - sendo que o ajustamento proposto mantém todas as propriedades assintóticas dos estimadores modificados. *Nicolau (07)* propõe estimadores não paramétricos para os coeficientes infinitesimais de tendência e volatilidade de difusões homogéneas, num sistema de EDE correspondente a uma EDE de segunda ordem do tipo seguinte,

$$\begin{cases} dY_t = X_t dt \\ dX_t = a(X_t) dt + h(X_t) dB_t \end{cases}$$

estimadores estes que mostra serem consistentes e assintoticamente normais sob hipóteses não muito restritivas. A motivação subjacente recai nos modelos em que as observações, a uma certa data, podem ser consideradas como a acumulação de todas as pequenas perturbações do passado até essa data, dando origem a um processo integrado que é depois considerado como uma SDE de segunda ordem que, finalmente, é reescrito como o sistema de EDE acima. *Nicolau (10)* propõe um método – baseado em simulações de Monte Carlo – para estimar as densidades de transição de difusões não lineares e não homogéneas, método este que se mostra ser assintoticamente equivalente ao estimador de verosimilhança máxima; consegue-se assim um método eficiente para estimar os parâmetros da difusão e os momentos condicionais do processo. Em *Mota et al (18)* mostra-se que para difusões ergódicas se podem aplicar, com bons resultados, os estimadores derivados dos estimadores de verosimilhança máxima; a ideia consiste em utilizar a densidade invariante, como se as observações do pro-

cesso fossem independentes e, identicamente distribuídas com a distribuição invariante. Os autores de *Beleza Sousa et al (12)*, com o objectivo de calibrar o modelo, aplicam ao modelo de Vasicek para taxas de juro a técnica de regressão de processos Gaussianos denominada também *machine learning for Gaussian processes* ou, na terminologia da Geologia, o *kriging*. Em *Beleza Sousa et al (15)*, introduz-se um método, vectorial para a simulação de trajectórias de variados processos, soluções de EDE, baseado na regressão de processos Gaussianos, método este que permite uma redução dos tempos de execução em cerca de nove vezes em comparação com a simulação recursiva usual. Em *Dias et al (18)* propõe-se um algoritmo de recorrência para o cálculo de momentos de uma variável com distribuição de qui-quadrado não central e para o cálculo de funções especiais – Nuttall, Marcum generalizadas e Toronto – que se demonstra ser muito eficiente. A utilidade de um algoritmo deste tipo fica patente quando se pretende o cálculo rápido e preciso de preços produtos financeiros derivados de um subjacente cujo preço tenha como modelo uma EDE descrita por,

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma(S_t)S_t dB_t, \quad \sigma(S_t) = \delta S_t^{\frac{\beta}{2}-1}, \quad \beta \geq 0$$

em que o coeficiente infinitesimal de volatilidade é uma função não linear – de tipo potência – do preço do subjacente; veja-se o trabalho *Larguinho et al (13)*.

## Conclusão

Fica claro neste breve sumário dos trabalhos desenvolvidos – e publicados em revistas – na área da Estatística das EDE por alguns matemáticos Portugueses, que há um conjunto de temáticas que vêm sendo desenvolvidas com notável sucesso – estimação por verosimilhança máxima, por simulação de Monte Carlo, por regressão de processos Gaussianos, estimação não paramétrica – em variadas áreas de aplicação distintas: Dinâmica das Populações, Mecânica e Engenharia Estrutural e Matemática Financeira. Houve publicações muito relevantes para a temática que explorámos e que não foram referidas neste trabalho, nomeadamente, as dissertações de doutoramento de Carlos Braumann, de João Nicolau, de Pedro Mota e de João Beleza e Sousa; sendo trabalhos não facilmente acessíveis mereceriam ainda assim referência e análise detalhada num trabalho mais amplo que este e que esperamos seja realizado em breve. Não podemos deixar de referir que, sobre o tema mais alargado das EDE – sem a particularização que seguimos nesta nota à Estatística e à simulação de Monte Carlo – há uma quantidade muito apreciável de trabalhos de excelente qualidade por autores Portugueses, trabalhos que merecem, sem dúvida, uma recensão cuidada.

## Referências

1. J **Beleza Sousa**, ML **Esquível**, RM **Gaspar**, Machine Learning Vasicek Model Calibration with Gaussian Processes, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 41:6, 776-786, (2012).
2. J **Beleza Sousa**, ML **Esquível**, RM **Gaspar**, Brownian Bridge and Other Path-dependent Gaussian Processes Vectorial Simulation, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 44:10, 2608-2621 (2015)
3. CA **Braumann**, Estimating parameters and extinction probabilities in population stochastic differential equation models. Biomathematics and related computational problems, *Proc. Workshop, Naples and Anacapri/Italy 1987*, 133-143 (1988).
4. CA **Braumann**, Stochastic differential equation models of fisheries in an uncertain world: Extinction probabilities, optimal fishing effort, and parameter estimation. Mathematics in biology and medicine, *Proc. Int. Conf., Bari/Italy 1983, Lect. Notes Biomath.* 57, 201-206 (1985).
5. CA **Braumann**, Population extinction probabilities and methods of estimation for population stochastic differential equation models. Nonlinear stochastic problems, *Proc. NATO Adv. Study Inst., Armação de Pera/Port.* 1982, NATO ASI Ser., C, Math. Phys. Sci. 104, 553-559 (1983).
6. JC **Dias**; JP **Vidal Nunes**, Universal recurrence algorithm for computing Nuttall, generalized Marcum and incomplete Toronto functions and moments of a noncentral  $\chi^2$  random variable. *Eur. J. Oper. Res.* 265, No. 2, 559-570 (2018).
7. ML **Esquível** and PP **Mota**. On Some Auto-Induced Regime Switching Double-Threshold Glued Diffusions. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 8(4):760–771, (2014).
8. PA **Filipe**, CA **Braumann**, NM **Brites**, and CJ **Roquete**. Modelling animal growth in random environments: An application using nonparametric estimation. *Biometrical Journal*, 52(5):653–666, (2010).
9. Ibragimov I, Khasminskii R, *Statistics of random processes*. Springer, New York (1981).
10. Kiyosi Ito, Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*. 20 (8): 519–524. (1944).
11. Kiyosi Ito, On a stochastic integral equation". *Proceedings of the Japan Academy*. 22 (2): 32–35 (1946).

12. M **Larguinho**, JC **Dias**, CA **Braumann**, On the computation of option prices and Greeks under the CEV model. *Quant. Finance* 13, No. 6, 907-917 (2013).
13. P **Milheiro** Oliveira, J Picard, Approximate nonlinear filtering for a two-dimensional diffusion with one-dimensional observations in a low noise channel, *SIAM J. Control Optim.* Vol. 41, No. 6, pp. 1801–1819 (2003).
14. PP **Mota** and ML **Esquível**. Pseudo Maximum Likelihood and Moments Estimators for Some Ergodic Diffusions. In *Recent Studies on Risk Analysis and Statistical Modeling*, Editors: TA Oliveira, CP Kitsos, A Oliveira, L Grilo; 335–343, Springer International Publishing, Cham, (2018).
15. PP **Mota** and ML **Esquível**. Model selection for stock prices data. *Journal of Applied Statistics*, 43(16):2977–2987, (2016).
16. PP **Mota** and ML **Esquível**. On a continuous time stock price model with regime switching, delay, and threshold. *Quant. Finance* 14(8):1479–1488, (2014).
17. J **Nicolau**. Transition Density and Simulated Likelihood Estimation for Time-Inhomogeneous Diffusions. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 39(7):1435–1454, (2010).
18. J **Nicolau**. Nonparametric estimation of second-order stochastic differential equations. *Econometric Theory*, 23(5):880–898, (2007).
19. J **Nicolau**. Bias reduction in nonparametric diffusion coefficient estimation. *Econometric Theory*, 19(5):754–777, (2003).
20. J **Nicolau**. A New Technique for Simulating the Likelihood of Stochastic Differential Equations. *The Econometrics Journal*, 5(1): 91–103, (2002).
21. AF **Prior**, M Kleptsyna and P **Milheiro** de Oliveira. On maximum likelihood estimation of the drift matrix of a degenerated O–U process. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 1–22, (2016).
22. AF **Prior** and P **Milheiro** de Oliveira. Parameter estimation of a two regime stochastic differential model for a bilinear oscillator subjected to random loads. In A Cunha, E Caetano, P Ribeiro, and G Muller, editors, Eurodyn 2014: *IX International Conference on Structural Dynamics*, volume 2014-January of EURO-DYN-International Conference on Structural Dynamics, pages 2845–2852, (2014).



# Modelos de equações diferenciais estocásticas e modelos mistos em crescimento individual

Patrícia A. Filipe, *pasf@uevora.pt*

*Departamento de Matemática, Escola de Ciências e Tecnologia, Universidade de Évora  
Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Instituto de Investigação e Formação Avançada,  
Universidade de Évora*

## 1. Introdução

Os modelos de crescimento individual representam alterações no tamanho de um único indivíduo ao longo do tempo. Apesar deste texto ser exclusivamente dedicado ao crescimento individual, muitos dos modelos aplicados ao crescimento populacional são também utilizados para modelar o crescimento individual.

Vários padrões são frequentemente observados nas taxas de crescimento de organismos. O chamado padrão exponencial é típico para o crescimento em certos períodos de tempo geralmente curtos e logo após o nascimento. O padrão de crescimento assintótico, aplica-se ao comprimento de alguns organismos, ao tamanho do crânio e do cérebro. É caracterizado por um decrescimento positivo e constante da taxa de crescimento, portanto não possui ponto de inflexão. O peso e volume do corpo e da maioria dos órgãos apresentam um padrão de crescimento sigmóide ou em forma de S. Inicialmente, a taxa de crescimento em massa é baixa mas a aumentar. A taxa de crescimento atinge um máximo, que corresponde ao ponto de inflexão da curva e depois vai decrescendo para zero à medida que o animal atinge o seu peso na maturidade. A curva sigmóide é prevalente entre animais de crescimento determinado, e isto conduziu ao surgimento de uma classe específica de “funções sigmóides” para descrever o crescimento. Uma curva de crescimento em forma de sino é observada em órgãos que degeneram (Thymus, bursa de Fabricius, ossos nos mais idosos, etc.). Neste caso o tamanho dos órgãos primeiro aumenta, e após atingir um máximo começa a decrescer. O crescimento pode apresentar padrões complexos, tais como não monótonos, alterações oscilantes em massa (por exemplo animais sujeitos a fortes diferenças sazonais na qualidade do alimento) e em plantas perenes.

Grande parte dos modelos de crescimento frequentemente aplicados são de natureza determinística e é usual tratar variações aleatórias dos dados através de modelos clássicos de regressão. A suposição tradicional dos modelos de regressão que considera que os desvios da curva de regressão observados são independentes para diferentes instantes seria realista se tivéssemos desvios provocados por erros de medição mas é totalmente irrealista quando os desvios são devido a alterações aleatórias nas taxas de crescimento induzidas por flutuações aleatórias ambientais. Por exemplo, nestes modelos de regressão um atraso no crescimento num certo instante não tem repercussões em tamanhos futuros. Com os modelos de equações diferenciais estocásticas (EDE) isto não se passa, uma vez que estes são construídos precisamente de forma a incorporar a dinâmica do processo de crescimento e o efeito que as flutuações aleatórias do ambiente têm nessa dinâmica.

Apresentamos uma classe de modelos de EDE para descrever o crescimento individual de organismos (animais ou plantas) em ambiente aleatório. Esta classe de modelos conduz a versões estocásticas de um modelo determinístico geral simples e flexível que inclui como casos particulares alguns dos modelos de crescimento determinísticos mais conhecidos com tamanho assintótico  $A$  (tamanho na maturidade), como é o caso, por exemplo, do modelo monomolecular, do modelo logístico, do modelo de Gompertz e do modelo de Bertalanffy-Richards. A classe de modelos de EDE desenvolvida possui um termo adicional, que incorpora o efeito das flutuações aleatórias do ambiente no próprio crescimento e utiliza uma função crescente continuamente diferenciável  $h$  que permite converter o tamanho  $X_t$ , em determinado instante (idade)  $t$ , num tamanho modificado  $Y_t = h(X_t)$  que segue um equação dinâmica simples.

Começamos por admitir que existe uma única forma funcional para descrever a dinâmica média da curva de crescimento completa e generalizamos para o caso multifásico, em que consideramos que o coeficiente de crescimento assume valores diferentes para diferentes fases da vida do indivíduo.

De forma a melhor captar a variabilidade entre indivíduos, usamos modelos mistos em que os parâmetros da equação são agora variáveis aleatórias dependentes do indivíduo. Podemos considerar que os parâmetros do modelo seguem uma determinada distribuição de probabilidade, como por exemplo, admitindo que o tamanho na maturidade é gaussiano. Estudamos mais recentemente um modelo misto de equação diferencial estocástica com parâmetros que são variáveis aleatórias dependentes de características dos indivíduos.

Abordamos aqui, brevemente, tópicos de estimação, previsão e otimização, no contexto de aplicação a dados do peso de bovinos, dos modelos de EDE expostos.

## 2. Modelos de equações diferenciais estocásticas

Grande parte dos modelos determinísticos clássicos utilizados na literatura para descrever o crescimento individual de um animal (ou planta) em termos do seu tamanho  $X_t$  (peso, volume, altura, comprimento, etc.) no instante (idade)  $t$  correspondem a uma equação diferencial autónoma da forma

$$\frac{dY_t}{dt} = \beta(\alpha - Y_t), Y_{t_0} = y_0, \quad (1)$$

onde  $Y_t$  pode ser visto como um tamanho modificado, ou seja,  $Y_t = h(X_t)$ , onde  $h$  é uma função estritamente crescente continuamente diferenciável (que assumimos conhecida). Temos, então,  $y_0 = h(x_0)$  e  $\alpha = h(A)$ , onde  $x_0$  é o tamanho observado em  $t_0$  (é a primeira observação) e  $A$  representa o tamanho assintótico ou tamanho na maturidade do indivíduo tal como descrito anteriormente. O parâmetro  $\beta$ , positivo, é o coeficiente de crescimento e representa a taxa de aproximação à maturidade. De acordo com a escolha da função  $h$  em (1) assim podemos obter alguns dos modelos de crescimento mais frequentemente utilizados. Quando  $h(x) = x$  temos o modelo monomolecular; se  $h(x) = -x^{-1}$  coincide com o modelo logístico; se  $h(x) = \ln x$  corresponde ao modelo de Gompertz, e para  $h(x) = x^c$ ,  $c > 0$  estamos perante o modelo de Bertalanffy-Richards.

O crescimento individual de organismos deve ter em conta as flutuações aleatórias do ambiente que afetam a taxa de crescimento e os modelos de equações diferenciais estocásticas são mais adequados para descrever este fenómeno. Assim, se um indivíduo cresce num ambiente sujeito a flutuações aleatórias, podemos modelar o crescimento através de uma EDE da seguinte forma

$$dY_t = \beta(\alpha - Y_t) dt + \sigma dW_t, Y(t_0) = y_0. \quad (2)$$

A intensidade do efeito das flutuações ambientais no crescimento é medida pelo parâmetro  $\sigma > 0$  e  $W_t$  é o processo de Wiener padrão. Este modelo é conhecido no contexto da dinâmica de taxas de juro como modelo de Vasicek (Vasicek, 1977) e é também designado por modelo de Ornstein-Uhlenbeck generalizado. A escolha adequada da função  $h$  conduz às versões estocásticas de modelos determinísticos já referidos.

Tendo por base o modelo (2), podemos considerar que o tamanho assintótico  $A$  é fixo, ou seja, o mesmo para todos os indivíduos, e que o coeficiente de crescimento  $\beta$  é constante ao longo de toda a curva de crescimento. Este é o caso mais simples, em que existe uma única forma funcional para descrever a dinâmica média da curva de crescimento completa, e existem inúmeros trabalhos na literatura onde é possível encontrar as suas principais propriedades analíticas. A solução desta EDE autónoma existe e é única, e é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência dado por  $\beta(\alpha - y)$  e coeficiente de difusão  $\sigma^2$  (ver por exemplo, Braumann, 2005). Em Garcia (1983) e em Rennolls (1995), podemos ver uma aplicação deste tipo de modelos aos crescimento de árvores. Qiming e Pitchford (2007) aplicaram-no ao crescimento de peixes.

Numa outra situação, podemos supor que o coeficiente de crescimento  $\beta$  tem valores diferentes para diferentes fases da vida do indivíduo, conduzindo a uma generalização do modelo estocástico referido ao caso multifásico (Filipe *et al.*, 2012). Por simplicidade, se considerarmos duas fases com coeficientes de crescimento  $\beta_1$  e  $\beta_2$  (o caso multifásico geral é uma generalização trivial), ou seja, assumindo duas fases distintas na curva de evolução do tamanho, o modelo de crescimento pode escrever-se da seguinte forma

$$dY_t = \beta_t(\alpha - Y_t) dt + \sigma dW_t, Y_{t_0} = y_0, \text{ com } \beta_t = \begin{cases} \beta_1, & t \leq u \\ \beta_2, & t > u. \end{cases} \quad (3)$$

O parâmetro  $\beta$  depende agora de  $t$ , sendo  $u$  o instante (idade) de mudança de fase. Neste caso, os resultados, dependem da fase de crescimento em que o indivíduo se encontra. Por exemplo, até atingir este o instante  $u$  o indivíduo encontra-se na primeira fase de crescimento e o seu tamanho modificado possui as propriedades do modelo de Ornstein-Uhlenbeck generalizado bastando substituir  $\beta$  por  $\beta_1$ . Para idades superiores a  $u$ , o indivíduo está na segunda fase de crescimento e caímos no primeiro caso com  $\beta = \beta_2$ . No que diz respeito às probabilidades de transição entre duas idades, se ambas se encontrarem na primeira fase ou ambas se encontrarem na segunda, estas probabilidades vão coincidir com as correspondentes ao primeiro caso substituindo  $\beta$  por  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , respectivamente. Caso uma idade esteja na primeira fase e outra na segunda, na distribuição de transição as expressões da média e da variância apresentam a contribuição da ambas as fases (Filipe *et al.*, 2012).

É natural pensarmos que a evolução do tamanho pode diferir de organismo para organismo devido a características próprias de cada indivíduo, por exemplo, devido a diferenças genéticas ou outras. Consequentemente, podemos admitir que os parâmetros da equação são agora variáveis aleatórias. Neste caso, o modelo resultante também pode ser designado como modelo de EDE misto ou modelo de EDE de efeitos mistos. Em particular, podemos construir uma extensão do modelo (2) ao caso em que o tamanho assintótico médio varia aleatoriamente de indivíduo para indivíduo. Mais concretamente, por exemplo, que  $\alpha$  é uma variável aleatória independente de  $W_t$  com distribuição gaussiana de média  $\mu$  e variância  $\theta^2$ . Este tipo de modelos é estudado, por exemplo, em Ditlevesen *et al.* (2005), Donnet e Samson (2008), Donnet *et al.* (2010) e Picchini *et al.* (2007). Podemos obter a distribuição de probabilidade do tamanho modificado do indivíduo. Em termos do tamanho modificado, a sua média é dada pela mesma expressão da correspondente ao caso do  $\alpha$  ser fixo, mas aqui usamos o valor médio de  $\alpha$  em vez do seu valor fixo. A variância do tamanho modificado é constituída por dois termos, um traduz a variabilidade devido às variações ambientais ao longo da vida do indivíduo (equivalente à variância no caso do  $\alpha$  fixo) e o outro traduz a variabilidade resultante das diferenças do tamanho médio assintótico existentes entre os indivíduos (Braumann *et al.* 2009).

Pretendemos melhorar este modelo incorporando a dependência dos parâmetros nas estimativas conhecidas dos valores genéticos do indivíduo, de forma a explicar parte da variação desses parâmetros.

Para cada uma das situações descritas, podemos aplicar o método de máxima verosimilhança, obtendo-se as expressões analíticas explícitas para a função de log-verosimilhança, as estimativas de máxima verosimilhança e os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros dos modelos (Filipe *et al.* 2010, 2012, Braumann *et al.* 2009). Em Filipe *et al.* (2013), apresentamos um estudo de previsão, com base neste tipo de modelos. Para a classe de modelos descrita, é possível caracterizar o tempo que um indivíduo demora a atingir um determinado tamanho (Carlos *et al.* 2013). Quando se trata de um tamanho de interesse económico, podemos destacar a importância destes resultados e, neste contexto, abordar problemas de optimização (Filipe *et al.* 2015).

### 3. Exemplo de aplicação ao crescimento de animais

Ilustramos brevemente a aplicação dos modelos descritos à evolução do peso de bovinos. Em particular, a dados do peso de bovinos das raças Mertolenga e Alentejana (Figura 1) fornecidos pela Associação de Criadores de Bovinos Mertolengos (ACBM) e pela Associação de criadores de Bovinos de Raça Alentejana (ACBRA).

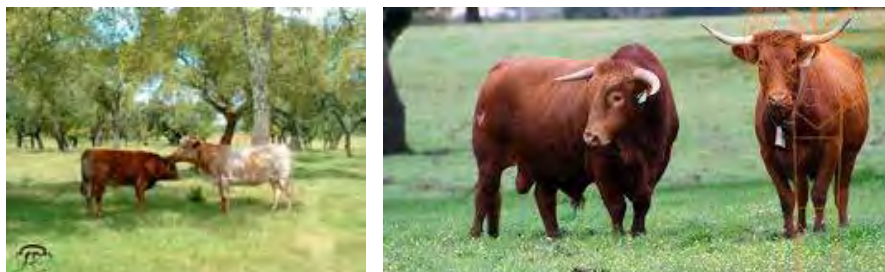


Figura 1: Bovinos de raça Mertolenga ([www.mertolenga.com](http://www.mertolenga.com)) e bovinos de raça Alentejana ([www.bovinoalentejano.pt](http://www.bovinoalentejano.pt))

Neste caso, em que trabalhamos com o peso de animais, verificou-se que as transformações mais adequadas eram  $h(x) = \ln x$  e  $h(x) = x^{1/3}$ , que conduzem ao modelo de Gompertz estocástico (MGE) e a um modelo de Bertalanffy-Richards estocástico (MBRE), respectivamente.



A Tabela 1, apresenta alguns resultados da aplicação do método de máxima verosimilhança a dados do peso de 97 fêmeas da raça Mertolenga, 16021 machos da raça Mertolenga e 9479 machos da raça Alentejana.

	97 Fêmeas	ACBM	16021 Machos	ACBM	9479 Machos	ACBRA
	MGE	MBRE	MGE	MBRE	MGE	MBRE
A	411.2 ± 8.1	425.7 ± 9.5	630.1 ± 6.4	886.5 ± 14.1	748.4 ± 5.8	935.2 ± 9.8
$\beta$	1.676 ± 0.056	1.182 ± 0.056	1.422 ± 0.012	0.811 ± 0.011	1.569 ± 0.011	0.964 ± 0.010
$\sigma$	0.302 ± 0.009	0.597 ± 0.019	0.340 ± 0.002	0.622 ± 0.031	0.336 ± 0.002	0.700 ± 0.004

Tabela 1: Estimativas de máxima verosimilhança e intervalos a 95% de confiança aproximados para os parâmetros do modelo (2).

Comparando os vários modelos aplicados, no caso das fêmeas Mertolengas, observámos que o modelo de efeitos-mistos é significativamente melhor do que o modelo admitindo  $\alpha$  fixo para o caso do MGE. Para o MBRE não se observou uma melhoria significativa do modelo com  $\alpha$  variável relativamente ao modelo com  $\alpha$  fixo. O modelo bifásico revelou ser significativamente melhor do que o modelo monofásico, quer no caso do modelo de Gompertz quer no de Bertalanffy-Richards.

Em termos de previsão de valores do peso de bovinos com base nos modelos de EDE monofásico e bifásico, em Filipe *et al.* (2013) mostramos que, de facto, os nossos modelos de EDE são os mais adequados quando comparados com os correspondentes determinísticos para os quais são usualmente aplicados métodos de regressão clássicos. Os intervalos de confiança assintóticos para a previsão, podem ser obtidos com base em simulação ou utilizando o método delta. Podem ser obtidos os resultados de previsão de valores futuros do peso de um animal trabalhando com dados passados desse animal e a previsão desses mesmos pesos no caso em que não temos dados anteriores desse animal mas temos dados de outros animais semelhantes os quais presumimos terem os mesmos parâmetros. O modelo bifásico mostrou ser melhor em termos de previsão.

A aplicação dos modelos apresentados pode ser de extrema utilidade no contexto económico. Filipe *et al.* (2015) é dedicado precisamente à questão de optimização do lucro médio de venda de um animal. Por um lado, com base nos nossos modelos, podemos calcular o lucro esperado para diferentes idades do animal, e em particular, podemos determinar a idade óptima de venda do animal de forma a que esse lucro seja máximo. Podemos também obter a distribuição de probabilidade do lucro de venda e calcular probabilidades envolvendo esse lucro. Por outro lado, sabendo qual o peso do animal exigido pelo mercado, podemos estudar as propriedades do tempo que o animal demora a atingir esse peso pela primeira vez. Podemos obter expressões para a média e variância destes tempos (tempos de primeira passagem), assim como expressões para a sua função densidade de probabilidade e função distribuição. Com base nestes resultados podemos determinar qual o peso óptimo de venda do animal em termos de maximização do lucro médio de venda. Foi feita a comparação entre as duas metodologias, uma consistindo em vender o animal numa idade fixa (escolhida de forma a otimizar o lucro médio) independentemente do seu peso e a outra consistindo em vender o animal quando atinja pela primeira vez um peso fixo (escolhido de forma a otimizar o lucro médio) independentemente da idade. Verificou-se que a segunda metodologia, para valores típicos do mercado, era preferível pois permitirá um lucro óptimo mais elevado do que a primeira até, no caso do modelo de Gompertz estocástico, com um menor desvio-padrão desse lucro óptimo.

#### 4. Considerações finais

Temos vindo a desenvolver e aplicar modelos de equações diferenciais estocásticas a dados do peso de bovinos. Em particular, começamos por trabalhar com dados do peso de fêmeas da raça Mertolenga, uma raça autóctone com elevada representação na região do Alentejo. Actualmente, encontramos a trabalhar com dados de machos das raças Mertolenga e Alentejana, no âmbito do projecto Go Bov+, que envolve a participação da Universidade de Évora, do INIAV - Instituto Nacional de Investigação Agrária e Veterinária, da Associação de Criadores de Bovinos Mertolengos, da Associação dos Criadores de Bovinos da Raça Alentejana e de vários produtores. Pretende-se continuar a aprofundar o estudo de modelos de EDE, incluindo no modelo a dependência dos parâmetros dos valores genéticos do indivíduo disponíveis, de forma a explicar parte da variação desses parâmetros e assim melhorar a margem de erro das previsões. Com base nos custos de produção e preços de venda no mercado, poderemos obter a previsão individual do peso futuro, da idade ótima de abate e do lucro associado, em função do peso

atual do animal e dos valores genéticos, tornando-a mais precisa e individualizada, com a consequente melhoria dos lucros.

## Agradecimentos

O Autor é membro do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações UID/MAT/04674/2013, Universidade de Évora, financiado pela FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia. Alguns resultados apresentados foram desenvolvidos no âmbito do Grupo Operacional - Go BovMais - PDR2020-101-031130, financiado por PDR2020.

## Referências

- Braumann, C.A. (2005) *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas*. Edições SPE, Lisboa.
- Braumann, C.A., Carlos, C., Filipe, P.A. e Roquete, C.J. (2009) *Growth of individuals in randomly fluctuating environments*, Em Proceedings of the 2009 International Conference in Computational and Mathematical Methods in Science e Engineering, (Vigo-Aguiar J., Alonso P., Oharu S., Venturino E. e Wade B., eds), Gijón, 201-212.
- Carlos, C., Braumann, C.A. e Filipe, P.A. (2013) *Models of individual growth in a random environment: study and application of first passage times*, Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications, Springer, Berlin, 103-111.
- Ditlevsen, S. e De Gaetano, A. (2005) *Mixed effects in stochastic differential equations*. REVSTAT-Statistical Journal, 3(2):137-153.
- Donnet, S., Foulley, J.L. e Samson, A. (2010) *Bayesian analysis of growth curves using mixed models defined by stochastic differential equations*. Biometrics, 66(3):733-741.
- Donnet, S. e Samson, A (2008) *Parametric inference for mixed models defined by stochastic differential equations*. ESAIM P&S, 12:196-218.
- Filipe, P.A., Braumann, C.A. e Carlos, C. (2015). *Profit optimization for cattle growing in a randomly fluctuating environment*. Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 64(6):1393-1407.
- Filipe, P.A., Braumann, C.A, Brites, N.M. e Roquete, C.J. (2013). *Prediction for Individual Growth in a Random Environment*. Recent Developments in Modeling and Applications in Statistics, Studies in Theoretical and Applied Statistics. Oliveira, P.E., Graça Temido, M., Henriques, C. e Vichi, M. (Eds.), Springer (ISBN: 978-3-642-32418-5), pp. 193-201.
- Filipe, P.A., Braumann, C.A. e Roquete, C.J. (2012) *Multiphasic Individual Growth Models in Random Environments*, Methodology and Computing in Applied Probability, 14(1):49-56.
- Filipe, P.A., Braumann, C.A., Brites, N.M. e Roquete, C.J. (2010) *Modelling Animal Growth in Random Environments: An Application Using Nonparametric Estimation*. Biometrical Journal, 52(5):653-666.
- Garcia, O. (1983) *A stochastic differential equation model for the height of forest stands*. Biometrics, 39:1059-1072.
- Picchini, U., Ditlevsen, S. e De Gaetano, A. (2006) *Modeling the euglycemic hyperinsulinemic clamp by stochastic differential equation*. Journal of Mathematical Biology, 53(5):771-796.
- Qiming, Lv. e Pitchford, J. (2007) *Stochastic von bertalanffy models, with applications to fish recruitment*. Journal of Theoretical Biology, 244:640-655.
- Rennolls, K. (1995) *Forest height growth modelling*. Forest Ecology and Management, 71:217-225.
- Vasicek, O. (1977) *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, 5:177-188.



# Breve introdução às equações diferenciais estocásticas

Carlos A. Braumann, *braumann@uevora.pt*

*Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Instituto de Investigação e Formação Avançada,  
Universidade de Évora*

*e*

*Departamento de Matemática, Escola de Ciências e Tecnologia, Universidade de Évora*

## 1. Introdução

O objetivo deste texto é o de proporcionar uma breve primeira apresentação informal das equações diferenciais estocásticas, num contexto simples que evite questões de natureza muito técnica, já que a principal preocupação é a de permitir ao leitor não familiarizado com esta matéria a compreensão dos aspetos fundamentais. Foi este o objetivo fixado no convite, que muito agradeço, do Editor do Boletim da SPE, Professor Doutor Fernando Rosado, com o objetivo de enquadrar a leitura deste número do Boletim dedicado às equações diferenciais estocásticas e suas aplicações. Sendo este o objetivo, este texto segue de perto, nalgumas partes, o texto Braumann (2008b) anteriormente publicado neste Boletim. O leitor interessado em aprofundar esta matéria pode consultar livros como Arnold (1974), Øksendal (2003), Braumann (2005) ou Braumann (2019).

É bem sabido que as equações diferenciais ordinárias (EDO) têm uma longa tradição e grande sucesso como modelos matemáticos do comportamento de fenómenos dinâmicos nas mais variadas áreas da Ciência e da Tecnologia. De facto, é por vezes mais fácil e natural descrever regras de comportamento da taxa de variação (derivada) de uma variável temporal (regras que podem envolver essa variável e/ou outras variáveis com as quais interage) do que descrever diretamente as regras de evolução da própria variável. Obtém-se assim uma EDO que, por integração, permite obter o comportamento da variável de interesse e fazer previsões sobre a sua evolução futura. No caso de uma só variável  $X(t)$  teremos um modelo da forma

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t)) \quad \text{ou} \quad dX(t) = F(t, X(t)) dt \quad (1)$$

com uma condição inicial  $X(0)=X_0$ . A extensão a várias variáveis é relativamente simples, trabalhando-se com um vetor de variáveis e usando também um vetor de funções das várias variáveis em vez de uma função escalar  $F$ . Para não complicar a notação, consideraremos aqui o caso unidimensional.

Raramente é possível ou desejável introduzir nesses modelos todas as variáveis que afetam a taxa de variação, muitas vezes desconhecidas ou difíceis de medir ou de prever e em número elevado. É, pois, natural, que a taxa de variação de uma variável  $X(t)$  seja expressa na forma de uma taxa média  $F$  dependente das variáveis explicitamente consideradas no modelo e de um termo estocástico adicional relativo aos desvios em relação a essa média decorrentes das alterações das variáveis não consideradas explicitamente no modelo (a que chamaremos genericamente variáveis ambientais). Tão natural como o tratamento probabilístico que usamos para descrever o resultado do lançamento de uma moeda ao ar em vez de pretendermos introduzir de forma determinística as diversas forças resultantes da gravidade e da forma exata como posicionamos e movimentamos a mão ao lançar a moeda e ao recolhê-la.

Se admitirmos que as variáveis ambientais são em número elevado, é natural que os desvios (em relação ao comportamento médio da taxa de variação) provocados pelas suas perturbações possam

ser aproximadamente descritos por um processo estocástico gaussiano de média zero. É mais fácil considerar o efeito acumulado dessas perturbações entre o instante 0 e o instante  $t$ . Se admitirmos que as perturbações que atuam em intervalos de tempo não sobrepostos são aproximadamente independentes, então é natural que esse efeito acumulado possa ser aproximado por um processo com incrementos independentes. Admitindo no limite a continuidade temporal das perturbações (também é possível considerar perturbações descontínuas mas disso não falaremos aqui), se os incrementos fossem estacionários, o processo estocástico referido seria o processo de Wiener (único que conjuga as propriedades de ser contínuo, gaussiano de média zero e ter incrementos independentes estacionários). Como, porém, para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a variância dos incrementos pode depender do instante  $t$  e do valor nele tomado pelas variáveis consideradas no modelo, o incremento do termo estocástico assumirá a forma do produto duma função  $G$  desse instante e desses valores (em que  $G^2$  é a taxa de variação da variância do processo) pelo incremento  $dW(t)$  do processo de Wiener padrão  $W(t)$ . O processo de Wiener diz-se padrão se o seu incremento num intervalo de tempo tem variância igual (e não apenas proporcional) à duração do intervalo.

Assim, no caso unidimensional, obtemos a equação diferencial estocástica (EDE)

$$dX(t) = F(t, X(t)) dt + G(t, X(t))dW(t) \quad (2)$$

com a mesma condição inicial  $X(0)=X_0$ . Como o valor inicial pode ser desconhecido, nada impede que  $X_0$  seja uma variável aleatória (v.a.) com variância finita, desde que seja independente de  $W(t)$ . Note-se que podemos generalizar, sem dificuldades, ao caso de várias variáveis e vários processos de Wiener. Também podemos generalizar, embora disso não tratemos aqui, ao caso de processos com saltos.

Naturalmente, pressupõe-se um espaço de probabilidade subjacente  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e, representando por  $\omega \in \Omega$  o “acaso”, convém lembrar que  $W(t)$  é um processo estocástico, isto é depende do tempo e do acaso, pelo que rigorosamente deveríamos escrever  $W(t, \omega)$ , mas abreviamos para  $W(t)$ . Podemos pensar que um  $\omega$  concreto representa um estado concreto do “ambiente” que determina os valores concretos (ao longo de toda a história do processo) dos fatores perturbadores do nosso fenómeno; então  $\Omega$  representará o conjunto de todos os possíveis estados “ambientais”, de entre os quais o estado observado  $\omega$  é “escolhido ao acaso” de acordo com a lei de probabilidade  $P$ . Para  $t$  fixo, temos uma v.a. (função mensurável- $\mathcal{F}$  do acaso). Para  $\omega$  fixo,  $W(t, \omega)$  é uma função do tempo (uma trajetória ou realização do processo) que descreve a evolução do efeito acumulado (entre 0 e  $t$ ) das perturbações de base quando o estado do “ambiente” é  $\omega$ . Claro que, a diferentes estados “ambientais”, correspondem em geral trajetórias diferentes. Obviamente, a solução  $X(t)=X(t, \omega)$  da EDE, se existir, é um processo estocástico pois também depende do estado do “ambiente”. Agora, as previsões futuras dos valores de  $X(t)$  são de natureza probabilística, já que, para  $t$  fixo,  $X(t)$  é uma v.a.

As EDE têm um vasto campo de aplicação em todas as áreas da Ciência e da Tecnologia sempre que os fatores “ambientais” aleatórios não sejam negligenciáveis. Elas são predominantes quando esses fatores assumem um papel fundamental, como sucede, por exemplo, nas muitas aplicações financeiras (bolsas, futuros, opções, etc.) ou em sismologia. Este número do Boletim da SPE dará exemplos ilustrativos de trabalho desenvolvido por investigadores portugueses nalgumas das áreas de aplicação das EDE.

## 2. Breve introdução às equações diferenciais estocásticas

Naturalmente, entende-se por solução da EDE (2), a solução  $X(t)=X(t, \omega)$  da correspondente equação integral

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds + \int_0^t G(s, X(s)) dW(s). \quad (3)$$

Sob condições de regularidade adequadas, para cada trajetória  $\omega$  fixa, o primeiro integral pode ser interpretado como um vulgar integral de Riemann. Porém, o segundo integral não pode ser interpretado como integral de Riemann-Stieltjes porque o processo integrador  $W(t)$  tem variação ilimitada para quase todas as trajetórias.

Por essa razão, quando aproximamos o segundo integral por somas de Riemann-Stieltjes para uma sucessão de decomposições  $0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \dots < t_{n-1,n} < t_{n,n} = t$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) (com diâmetro convergente para zero) do intervalo de integração, o limite dessas somas depende da escolha dos pontos intermédios onde é calculada a função integranda  $G(s, X(s))$ . Diferentes escolhas correspondem a diferentes integrais estocásticos.

Se fizermos a escolha (não-antecipativa) dos pontos iniciais de cada subintervalo (a escolha em que a dinâmica presente não é afetada pelas perturbações aleatórias futuras), temos, sob condições de regularidade adequadas, o *integral de Itô*

$$\int_0^t G(s, X(s)) dW(s) = \text{l. i. m.}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n G(t_{k-1,n}, X(t_{k-1,n})) (W(t_{k,n}) - W(t_{k-1,n})), \quad (4)$$

onde usamos o limite em média quadrática representado por l.i.m. (convergência  $L^2$  com respeito a  $\omega$ ) para a obtenção do limite das somas de Riemann-Stieltjes. O integral de Itô pode generalizar-se a uma classe mais vasta de funções integrandas substituindo essa convergência por uma convergência em probabilidade.

O integral de Itô tem excelentes propriedades probabilísticas para funções  $G$  satisfazendo condições de regularidade adequadas, como ter esperança matemática nula, variância igual a  $\int_0^t \mathbf{E}[G^2(s, X(s))] ds$  e ser, como função de  $t$ , uma martingala. Porém, não segue as regras usuais de cálculo. Tal obriga a um novo cálculo, o cálculo estocástico de Itô, que pode ser caracterizado pela regra de diferenciação da função composta. Sob condições de regularidade adequadas de  $F$  e  $G$  e para uma função  $h(t, x)$  com derivadas parciais contínuas em  $t$  e primeiras e segundas derivadas parciais contínuas em  $x$ , a função composta  $Y(t) = h(t, X(t))$  tem diferencial baseado na expansão de segunda ordem em  $x$ , isto é  $dY(t) = \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial x} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} (dX(t))^2$ . O termo de segunda ordem não apareceria no cálculo ordinário pois  $(dX(t))^2$  seria de ordem inferior a  $dt$ . Aqui, porém, como  $\mathbf{E}[(W(t + \Delta t) - W(t))^2] = \Delta t$ , vem  $(dX(t))^2 = F^2(dt)^2 + 2FGdt dW(t) + G^2(dW(t))^2 = 0 + 0 + G^2 dt$ , uma vez que os dois primeiros termos são de ordem inferior a  $dt$  mas o último não é, devido à irregularidade das trajetórias de  $W(t)$ . Substituindo  $dX(t)$  e  $(dX(t))^2$  pelas suas expressões, obtemos a *regra de diferenciação de Itô* (com  $F$ ,  $G$  e  $h$  e suas derivadas calculadas no ponto  $(t, X(t))$ )

$$dY(t) = \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} G^2 \right) dt + \frac{\partial h}{\partial x} G dW(t). \quad (5)$$

Há outros integrais correspondentes a outras escolhas ou combinações de escolhas dos pontos intermédios. O mais popular deles é o *integral de Stratonovich* que, sob condições de regularidade adequadas, é dado por (o “(S)” é para assinalar que se usa o cálculo de Stratonovich)

$$(S) \int_0^t G(s, X(s)) dW(s) = \text{l. i. m.}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n G \left( t_{k-1,n}, \frac{X(t_{k-1,n}) + X(t_{k,n})}{2} \right) (W(t_{k,n}) - W(t_{k-1,n})). \quad (6)$$

Dado que ele contempla uma suavização da trajetória, segue as regras usuais de cálculo, isto é, teríamos  $dY(t) = \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} F \right) dt + \frac{\partial h}{\partial x} G dW(t)$ . Não tem em geral, porém, as boas propriedades probabilísticas do integral de Itô.

Como é natural, as EDE de Itô e de Stratonovich com idênticas funções  $F$  e  $G$ , têm em geral soluções diferentes. Aliás, usando (4) e (6), é fácil mostrar que a EDE de Itô  $dX = F dt + G dW$  é equivalente à (tem a mesma solução da) EDE de Stratonovich  $(S) dX = F^* dt + G dW$  com  $F^* = F - \frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial x}$ .

Em qualquer dos cálculos, as funções  $F$  e  $G$  devem satisfazer certas condições de regularidade para se poder garantir a existência e unicidade de solução da EDE; felizmente, com condições de regularidade adequadas, a solução é um processo de Markov e até um processo de difusão, satisfazendo portanto as equações de Kolmogorov. Se a EDE for autónoma ( $F(t, x) = F(x)$  e  $G(t, x) = G(x)$ ), a solução é mesmo um processo de difusão homogêneo. Mais pormenores podem

ver-se em livros como os referidos no início da secção anterior ou, em versão resumida, em Braumann (1998).

Devo referir que tem havido uma certa controvérsia na literatura sobre qual dos cálculos, Itô ou Stratonovich, é mais adequado em cada tipo de aplicações, uma vez que eles dão resultados que, até do ponto de vista qualitativo, são aparentemente diferentes. Por exemplo, em modelos de crescimento populacional com aleatoriedade ambiental, um cálculo prevê que, em certas condições, a população se extingue com probabilidade um, enquanto o outro prevê que, nas mesmas condições, a probabilidade de extinção é nula. Braumann (2007a,b,c), ilustrando com modelos de crescimento populacional e de pesca, resolve a controvérsia mostrando que a razão da aparente discrepância de resultados resulta da suposição implícita feita na literatura de que  $F(t, x)$  (taxa “média” de crescimento da população) tem o mesmo significado para os dois cálculos. Isso é falso pois  $F(t, x)$  representa geralmente médias diferentes da taxa de variação. No caso do cálculo de Itô representa sempre a taxa média aritmética. No caso do cálculo de Stratonovich, o tipo de média depende da função  $G(t, x)$ ; se  $G$  não depender de  $x$ ,  $F(t, x)$  representa igualmente a taxa média aritmética e os dois cálculos não se distinguem; se  $G$  depender linearmente de  $x$ , como sucede nos modelos de crescimento populacional com aleatoriedade ambiental,  $F(t, x)$  representa a taxa média geométrica; noutros casos representa outros tipos de média. Se atendermos às diferenças entre as médias, os resultados dos dois cálculos coincidem. A moral da história é que temos de ter cuidado ao escolher a função  $F(t, x)$ . Por exemplo, nos modelos de crescimento populacional com aleatoriedade ambiental, se usarmos o cálculo de Itô, devemos naturalmente escolher para  $F(t, x)$  a expressão correta para a taxa média aritmética de crescimento da população; se, porém, usarmos o cálculo de Stratonovich, devemos escolher a expressão correta para a taxa média geométrica de crescimento. Se tivermos esse cuidado elementar, os dois cálculos dão resultados totalmente coincidentes.

### 3. Equações diferenciais estocásticas autónomas

Consideremos o caso particular de uma EDE autónoma. Vamos, por simplicidade, considerar o caso unidimensional, embora tudo possa ser facilmente generalizado ao caso multidimensional. Temos então a EDE autónoma

$$dX(t) = F(X(t)) dt + G(X(t))dW(t) \quad (7)$$

e, para  $t \geq s$ , designemos por  $X_{s,x}(t)$  a solução, caso exista, desta EDE com a condição inicial  $X(s) = x$ . Caso  $F$  e  $G$  satisfaçam uma condição de Lipschitz, pode assegurar-se a existência e unicidade da solução, que é um processo de difusão homogéneo. Devido à homogeneidade, os processos  $X_{s,x}(s + \tau)$  e  $X_{0,x}(\tau)$  têm, para  $\tau \geq 0$ , a mesma distribuição inicial, as mesmas probabilidades de transição e, portanto, as mesmas distribuições de dimensão finita. Assim, se condicionarmos à condição inicial, só interessam as probabilidades de transição, pelo que, do ponto de vista probabilístico, é indiferente trabalhar com um processo ou outro e podemos designar simplesmente por  $X(t)$  uma solução genérica de (7) sem especificar *a priori* qual é a condição inicial no instante 0. Fixada uma condição inicial, a solução será única. Para a esperança matemática condicional de uma função  $h$  da solução usaremos, para  $\tau \geq 0$ , a notação  $\mathbf{E}_x[h(X(\tau))]:= \mathbf{E}[h(X(\tau)) | X(0) = x] = \mathbf{E}[h(X(s + \tau)) | X(s) = x]$ . O processo  $X(t)$  tem *coeficiente de tendência* ou *média infinitesimal*  $a(x) := \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \mathbf{E}_x \left[ \frac{X(\Delta) - x}{\Delta} \right] = F(x)$  e *coeficiente de difusão* ou *variância infinitesimal*  $b(x) := \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \mathbf{E}_x \left[ \frac{(X(\Delta) - x)^2}{\Delta} \right] = G^2(x)$ .

Designando por  $\mathcal{D} = a(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  o *operador de difusão*, dada uma função  $h$  mensurável-Borel de classe  $C^2$  de suporte compacto (algumas destas exigências podem ser atenuadas), obtém-se a *fórmula de Dynkin*  $\mathbf{E}_x[h(X(t))] = h(x) + \mathbf{E}_x \left[ \int_0^t \mathcal{D}h(X(s)) ds \right]$  tirando partido da regra de Itô. Ela é igualmente válida se substituirmos o tempo fixo  $t$  por um tempo de Markov  $\tau$  com esperança matemática finita. Um exemplo de tempo de Markov é o tempo de primeira passagem  $T_a := \inf \{t \geq 0: X(t) = a\}$  do processo  $X(t)$  por um limiar  $a$ , pois, para saber se  $T_a \leq t$  ou não,

precisamos apenas de conhecer os valores do processo até (inclusive) o instante  $t$ , note-se que, para as trajetórias de  $X(t)$  que porventura não passem por  $a$ , se considera que  $T_a = +\infty$ .

Da fórmula de Dynkin e nas mesmas condições para  $h$ , deduz-se que a função  $u(t, x) = \mathbf{E}_x[h(X(t))]$  satisfaz  $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mathbf{E}_x[\mathcal{D}h(X(t))]$  e satisfaz também a equação de Kolmogorov regressiva  $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D}u$  com condição inicial  $u(0^+, x) = h(x)$ . Pode obter-se uma generalização muito útil para o estudo de produtos financeiros derivados (como, por exemplo, opções), a fórmula de Feynman-Kac, a qual, dada uma função  $q$  contínua e limitada inferiormente, nos diz que  $v(t, x) = \mathbf{E}_x \left[ \exp \left( - \int_0^t q(X(s)) ds \right) h(X(t)) \right]$  satisfaz  $\frac{\partial v}{\partial t} = \mathcal{D}v - qv$  com condição inicial  $v(0^+, x) = h(x)$ .

Um resultado fundamental para a Matemática Financeira é o teorema de Girsanov, do qual daremos apenas uma breve ideia do que trata. Ele permite mudar, sem alterar a solução do ponto de vista probabilístico, o coeficiente de tendência de  $F(x)$  (por exemplo, de um ativo com risco satisfazendo a EDE (7)) para um outro que nos seja mais conveniente  $F^*(x)$ , através da mudança do processo de Wiener  $W(t)$  para um novo processo  $W^*(t)$ . Porém,  $W^*(t)$  geralmente não será um processo de Wiener para a probabilidade  $P$ , mas é um processo de Wiener para uma nova medida de probabilidade  $P^*$  convenientemente construída (a qual distorce as probabilidades dos vários “ambientes” ou cenários dos mercados). Normalmente escolhe-se para  $F^*(x)$  a taxa de variação de um ativo sem risco, do que resulta que, na perspectiva de  $P^*$ , o ativo com risco parece ter a mesma taxa de rendimento média que o ativo sem risco, caso em que  $P^*$  é conhecida como *probabilidade neutral ao risco*.  $P^*$  também é conhecida por *medida martingala equivalente* porque, utilizando o valor descontado do ativo com risco (valor que resulta de lhe aplicar uma taxa de desconto igual à taxa de rendimento do ativo sem risco), este processo estocástico descontado é uma martingala para a probabilidade  $P^*$ . O mesmo sucede ao valor descontado de certos ativos financeiros derivados para os quais se conhece, por satisfazer certas regras acordadas contratualmente, a expressão do seu valor num certo instante futuro. A propriedade de martingala implica que é possível obter (para efeitos contratuais ou de mercado) o seu valor descontado presente. Este valor é simplesmente a esperança matemática condicional (sob a probabilidade  $P^*$ ) da expressão do seu valor descontado futuro condicionada pela informação disponível até (inclusive) o instante presente.

#### 4. Equações diferenciais estocásticas autónomas unidimensionais

O estudo das EDE autónomas unidimensionais é mais simples porque a continuidade das trajetórias implica que a transição da solução entre dois instantes  $s$  e  $t > s$  de um valor  $x$  para outro valor  $y$  obriga a solução a passar por todos os valores intermédios  $z$  no intervalo de tempo  $]s, t[$ . Isso facilita o estudo dos tempos de primeira passagem por limiares, bem como permite, através do estudo do comportamento nas fronteiras do espaço de estados, inferir algumas propriedades gerais da solução. Estes resultados, porém, não são generalizáveis ao caso multidimensional.

Consideremos a EDE autónoma unidimensional (7) e suponhamos que o espaço de estados (espaço de valores que a solução  $X(t)$  pode tomar para a condição inicial  $X(0) = x$  que for escolhida) tem fronteiras  $r_1$  e  $r_2$  com  $-\infty \leq r_1 < x < r_2 \leq +\infty$ . Qualquer das fronteiras pode pertencer ou não ao espaço de estados. Vamos supor o coeficiente de difusão  $b(x) = G^2(x) > 0$  para  $r_1 < x < r_2$  e que os pontos no interior do espaço de estados comunicam entre si (isto é, a probabilidade de transição em tempo finito entre dois desses estados é positiva).

Aqui nem precisamos de exigir que  $F$  e  $G$  satisfaçam uma condição de Lipschitz. Suporemos apenas que são funções de classe  $C^1$ , o que no caso unidimensional garante existência e unicidade da solução, mas apenas até a um possível instante de explosão (instante finito em que a solução se torna infinita). Naturalmente, no caso particular de as derivadas de  $F$  e  $G$  serem limitadas no espaço de estados, isso automaticamente implica a satisfação de uma condição de Lipschitz e a existência e unicidade global da solução. Mas, mesmo quando isso não sucede (situação frequente em várias aplicações), pode conseguir provar-se por outra via a inexistência de explosões, caso em que fica estabelecida também a existência e unicidade global da solução.

Um estudo particularmente interessante é o do tempo de saída de um intervalo  $]a, b[$  com  $r_1 < a < x < b < r_2$ , ou seja  $T_{a,b} = \min\{T_a, T_b\}$ . Seja  $u(x)$  a probabilidade de, partindo da condição

inicial  $X(0) = x$ , sair do intervalo através do limite superior  $b$ , isto é  $u(x) =: P_x[T_b < T_a] = P[T_b < T_a | X(0) = x]$ . Esta probabilidade pode obter-se resolvendo a EDO  $\mathcal{D}u(x) = 0$  com as condições inicial  $u(a) = 0$  e terminal  $u(b) = 1$ . Para  $h$  função contínua limitada (restrição que em certos casos pode ser relaxada) e  $q$  função de classe  $C^2$ , seja  $U_{h,q}(x) =: \mathbf{E}_x[q(\int_0^{T_{a,b}} h(X(s)) ds)]$ ; esta esperança matemática pode obter-se resolvendo a EDO  $\mathcal{D}U_{h,q}(x) = -h(x)U_{h,q}'(x)$  com as condições inicial e terminal  $U_{h,q}(a) = U_{h,q}(b) = q(0)$ , onde  $q'$  é a derivada da função  $q$ . No caso particular de  $q(x) = x$ , a EDO simplifica-se para  $\mathcal{D}U_{h,q}(x) = -h(x)$  com condições  $U_{h,q}(a) = U_{h,q}(b) = 0$ . No caso particular de  $q(x) = x$  e  $h(x) \equiv 1$ , vem  $U_{h,q}(x) = \mathbf{E}_x[T_{a,b}]$  e a EDO simplifica-se para  $\mathcal{D}U_{h,q}(x) = -1$  com condições  $U_{h,q}(a) = U_{h,q}(b) = 0$ .

As *medidas de velocidade e de escala* são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue, tendo densidades que se podem obter à custa dos coeficientes de tendência  $a(x) = F(x)$  e de difusão  $b(x) = G^2(x)$ . As densidades de escala e de velocidade são dadas, respetivamente, por

$$s(\xi) = \exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{2a(\eta)}{b(\eta)} d\eta\right) \quad \text{e} \quad m(\xi) = \frac{1}{b(\xi)s(\xi)} \quad (\xi \in ]r_1, r_2[), \quad (8)$$

onde  $\xi_0$  é um ponto interior do espaço de estados (cuja escolha é arbitrária, pelo que as densidades estão definidas a menos de uma constante multiplicativa). Os seus integrais

$$S(x) = \int_{x_0}^x s(\xi) d\xi \quad \text{e} \quad M(x) = \int_{x_0}^x m(\xi) d\xi \quad (x \in ]r_1, r_2[), \quad (9)$$

onde  $x_0$  é arbitrariamente escolhido, são denominados de função de escala e de velocidade, respetivamente. As medidas de escala e de velocidade de um intervalo (aberto, semiaberto ou fechado) de extremos  $a$  e  $b > a$  contido no interior do espaço de estados são dadas, respetivamente, por  $S(b) - S(a)$  e por  $M(b) - M(a)$ , estando definidas a menos de uma constante multiplicativa.

Verifica-se que  $u(x) =: P_x[T_b < T_a] = \frac{S(x)-S(a)}{S(b)-S(a)}$  e que  $\mathcal{D}h(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dM(x)} \left(\frac{dh(x)}{dS(x)}\right)$ . Tirando partido destes factos, Carlos e Braumann (2005, 2006), Carlos, Braumann e Filipe (2013) e Filipe, Braumann e Carlos (2015), obtêm soluções explícitas das EDO requeridas e obtêm expressões para a média e a variância de  $T_{a,b}$  e também (para comportamentos adequados nas fronteiras do espaço de estados) de  $T_a$  e de  $T_b$ , quer para o caso geral, quer para modelos particulares de crescimento de populações e de crescimento individual de bovinos.

À semelhança do que se passa com as EDO, em face do comportamento de  $X(t)$  na sua vizinhança, uma fronteira pode ser atrativa ou não-atrativa. Prova-se que uma condição necessária e suficiente para que uma fronteira seja não-atrativa é que a medida de escala de uma sua vizinhança seja infinita; se isso se verificar para uma vizinhança, verifica-se para qualquer outra vizinhança. Assim, a fronteira  $r_1$  é *não-atrativa* sse  $S(]r_1, x_0]) = S(x_0) - S(r_1^+) = \int_{r_1^+}^{x_0} s(\xi) d\xi$  for  $=+\infty$  para  $x_0$  no interior do espaço de estados (podemos escolher livremente esse  $x_0$  pois, se a propriedade se verificar para um deles, verifica-se para todos); isto é equivalente a  $S(r_1^+) = -\infty$ . Caso contrário, a fronteira é atrativa. A fronteira  $r_2$  é *não-atrativa* sse  $S(]x_0, r_2]) = S(r_2^-) - S(x_0) = \int_{x_0}^{r_2^-} s(\xi) d\xi$  for  $=+\infty$  para  $x_0$  no interior do espaço de estados; isto é equivalente a  $S(r_2^-) = +\infty$ . Uma fronteira não-atrativa também não é atingível num tempo finito  $t$  nem quando  $t \rightarrow +\infty$ . Se alguma ou ambas as fronteiras forem infinitas, bastará provar que essas fronteiras não são atingíveis em tempo finito para ficar obviamente provado que não há explosões e, conseqüentemente, existe uma solução global única. Uma condição suficiente é que as fronteiras infinitas, se as houver, sejam não-atrativas.

No caso de populações, um bom modelo deverá ter a fronteira  $r_1 = 0$  e a sua atratividade ou não-atratividade tem a ver com a extinção da população no sentido “matemático” do termo (tamanho da população a convergir para zero quando  $t \rightarrow +\infty$ ). Claro que estes modelos têm o mesmo problema das EDO, de a variável de estado  $X$  ser contínua e poder tomar valores não-inteiros, pelo que pode ser mais adequado utilizar um conceito mais “realista” de extinção. Veja-se, a respeito da extinção de populações, por exemplo, Braumann (1999, 2002, 2007a, 2007b, 2007c, 2008a), Brites e Braumann (2017) e Carlos e Braumann (2005, 2006).



Intuitivamente, à semelhança das EDO, pode haver pontos de equilíbrio estáveis mas isso requer condições muito exigentes; além de uma tendência média de atratividade do equilíbrio, o termo estocástico da equação deverá aproximar-se de zero na vizinhança do equilíbrio pois, caso contrário, ele induzirá flutuações aleatórias consistentes em torno do candidato a equilíbrio. Mais vulgarmente, poderemos ter o que podemos chamar um *equilíbrio estocástico*, no sentido de que, embora  $X(t)$  não se aproxime de nenhum valor de equilíbrio quando  $t \rightarrow +\infty$ , a distribuição de probabilidade de  $X(t)$  converge quando  $t \rightarrow +\infty$  para uma distribuição limite (denominada distribuição assintótica ou estacionária) com função densidade de probabilidade  $p(x)$ , que designamos por *densidade estacionária*. Isso sucede em particular se as fronteiras  $r_1$  e  $r_2$  forem ambas não-atrativas e a medida de velocidade for finita, isto é  $M(]r_1, r_2[) = \int_{r_1}^{r_2} m(\xi) d\xi < +\infty$ . Neste caso, a *densidade estacionária* será dada por

$$p(x) = \frac{m(x)}{\int_{r_1}^{r_2} m(\xi) d\xi} \quad (x \in ]r_1, r_2[) \quad (8)$$

e, além disso,  $X(t)$  será um *processo ergódico*. Em termos informais, isso significa que todos os estados do interior do espaço de estados são visitados infinitas vezes e, por isso, podemos aproximar, em regime estacionário (isto é para valores grandes de  $t$ ), as esperanças matemáticas (que são médias ao longo de todas as possíveis trajetórias) por médias temporais (num longo período de tempo) baseadas numa única trajetória do processo. Isso é particularmente importante, porque, na esmagadora maioria das aplicações, não podemos replicar o fenómeno ou a experiência para conseguir uma amostra de várias trajetórias, dispoendo apenas de uma única trajetória de  $X(t)$ , a que corresponde ao estado do “ambiente”  $\omega$  que efetivamente ocorreu.

Um estudo mais detalhado do comportamento nas fronteiras pode ver-se, por exemplo, em Karlin e Taylor (1981).

## 5. Conclusão

Apresentámos uma breve panorâmica, muito informal, sobre alguns aspetos relevantes das EDE, alguns dos quais particularmente importantes nas aplicações tratadas neste número do Boletim da SPE. Outros aspetos muito importantes nas aplicações que não focámos aqui, mas que são objeto de outro artigo deste número, são as questões estatísticas como a estimação de parâmetros, os testes de hipóteses, a escolha do modelo e a previsão, podendo ainda, se desconhecermos a forma das funções  $F(x)$  e/ou  $G(x)$ , proceder à estimação não-paramétrica destas funções em caso de haver um equilíbrio estocástico com densidade estacionária.

Se o leitor deste número do Boletim ficar com uma ideia, ainda que relativamente vaga, do que são as EDE e do seu enorme potencial de aplicação, já terá valido a pena o esforço investido pelo Editor do Boletim e pelos autores dos artigos. Se, além disso, for possível atrair alguns investigadores ou futuros investigadores para esta área ou atrair investigadores de outras áreas para a utilização destas metodologias quando elas se revelem apropriadas para o estudo de algum problema a que se dediquem, então o esforço terá sido amplamente compensado.

## Agradecimentos

O autor é membro do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações da Universidade de Évora, centro financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) com referência UID/MAT/04674/2013.

## Referências

- Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. Wiley, New York.
- Braumann, C. A. (1998). O Acaso, a bolsa e a vida. Em *Estatística: A Diversidade na Unidade*, Souto de Miranda, M., Pereira, I. (eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, Lisboa: p. 29-55.

- Braumann, C. A. (1999). Variable effort fishing models in random environments. *Mathematical Biosciences* 156: 1-19.
- Braumann, C. A. (2002). Variable effort harvesting models in random environments: generalization to density-dependent noise intensities. *Mathematical Biosciences* 177 & 178: 229-245.
- Braumann, C. A. (2005). *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*. Edições SPE, Lisboa.
- Braumann, C. A. (2007a). Itô versus Stratonovich calculus in random population growth. *Mathematical Biosciences* 206: 81-107.
- Braumann, C. A. (2007b) Harvesting in a random environment: Itô or Stratonovich calculus. *J. Theoretical Biology* 244: 424-432.
- Braumann, C. A. (2007c). Population growth in random environments: which stochastic calculus? *Bull. International Statistical Institute LXII*: 5802-5805.
- Braumann, C. A. (2008a). Growth and extinction in randomly varying populations. *Computers and Mathematics with Applications* 56 (3): 631-644.
- Braumann, C. A. (2008b). Equações diferenciais estocásticas e aplicações biológicas. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*, Outono de 2008: 61-69.
- Braumann, C. A. (2019). *Introduction to Stochastic Differential Equations with Applications to Modelling in Biology and Finance*. Wiley, no prelo.
- Brites, N. M., Braumann, C. A. (2017). Fisheries management in random environments: comparison of harvesting policies for the logistic model. *Fisheries Research* 195: 238–246.
- Carlos, C., Braumann, C. A. (2005). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório. Em *Estatística Jubilar*, Braumann, C. A., Infante, P., Oliveira, M. M., Alpizar-Jara, R., Rosado, F. (eds). Edições SPE, Lisboa p. 133-142.
- Carlos, C., Braumann, C. A. (2006). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório e cálculos de Itô e Stratonovich. Em *Ciência Estatística*, Canto e Castro, L., Martins, R. G., Rocha, C., Oliveira, M. F., Leal, M. M., Rosado, F. (eds), Edições SPE, Lisboa, p. 229-238.
- Carlos, C.; Braumann, C. A. (2017). General population growth models with Allee effects in a random environment. *Ecological Complexity* 30: 26-33.
- Carlos, C., Braumann, C. A., Filipe, P. A. (2013). Models of individual growth in a random environment: study and application of first passage times. In *Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications*, da Silva, J. L., Caeiro, F., Natário, I., Braumann, C. A., Esquível, M. L., Mexia, J. (eds.), Springer, p. 103-111.
- Filipe, P. A., Braumann, C. A., Carlos, C. (2015). Profit optimization for cattle growing in a randomly fluctuating environment. *Optimization* 64(6): 1393-1407.
- Karlin, S., Taylor, H. M. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York.
- Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. (6<sup>th</sup> edition). Springer, Berlin.



## • Artigos Científicos

- Braumann, C. A., Cortés, J.-C., Jódar, L. e Villafuerte, L. (Junho 2018, online Dec 6, 2017). On the random gamma function: Theory and computing. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 335:142-155. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.11.045>
- Carlos, C. e Braumann, C. A. (2017). General population growth models with Allee effects in a random environment. *Ecological Complexity* 30: 26-33. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ecocom.2016.09.003>
- Brites, N. M. e Braumann, C. A. (2017). Fisheries management in random environments: comparison of harvesting policies for the logistic model. *Fisheries Research* 195: 238-246. <http://dx.doi.org/10.1016/j.fishres.2017.07.016>

## • Livros e Capítulos de Livros

**Título:** *Obras de Pedro Bruno Teodoro Braumann - Participações em Diversos Ramos da Matemática*

**Autor:** Pedro Braumann

**Organização:** Carlos Braumann, João Tiago Mexia e Manuel Esquível

**Ano:** 2018. Editora: NOVA.FCT Editorial.

ISBN: 978-98999528-4-3. Depósito Legal: 441831/18

**Título:** *Estatística Bayesiana* (2ª Edição)

**Autores:** Carlos Daniel Paulino, Maria Antónia Amaral Turkman, Bento Murteira e Giovani L. Silva.

**Ano:** 2018. Editora: Fundação Calouste Gulbenkian.

ISBN: 978-972-31-1606-9. Depósito Legal: 442215/18.

**Título:** *Ecological Complexity – Dynamics in Bio-systems*

**Editores:** M. Aguiar, C. A. Braumann, B. W. Kooi, A. Pugliese e N. Stollenwerk.

**Ano:** 2017. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ecocom.2017.01.001>

## • Teses de Doutoramento

**Título:** Stochastic differential equation harvesting models: Sustainable policies and profit optimization

**Autor:** Nuno M. Brites, [brites@uevora.pt](mailto:brites@uevora.pt)

**Orientador:** Carlos Alberto dos Santos Braumann

Na minha tese, estudei a dinâmica de crescimento de uma população sujeita a pesca em ambiente aleatório e descrita através de modelos de equações diferenciais estocásticas, onde o termo de captura depende de um esforço de pesca constante ou variável. Comparei o lucro obtido pela atividade da pesca usando dois tipos de políticas de pesca, uma inaplicável e baseada em esforço variável e a outra aplicável, sustentável e socialmente vantajosa, baseada em esforço constante. As comparações foram realizadas com recurso a dados reais e considerando dois modelos de crescimento, o modelo logístico e o modelo de Gompertz. Para ambas as políticas ótimas, as comparações do lucro também foram estudadas quando se considera um modelo de crescimento do tipo logístico com efeitos de Allee fracos. Foram determinados a média e a variância dos tempos de primeira passagem por um limite inferior e por um limite superior e, para um determinado valor limite, a função de densidade do tempo de primeira passagem foi estimada, recorrendo à transformada de Laplace inversa.

Nuno M. Brites

**Título:** Modelação por regressão incorporando dependência espacial e temporal

**Autor:** Antônio Neco de Oliveira, [anecoo@gmail.com](mailto:anecoo@gmail.com)

**Orientadoras:** Raquel Menezes da Mota Leite e Susana Margarida Ferreira Sá Faria

A minha tese apresenta um estudo de modelação por regressão incorporando dependência espacial e temporal para estimar o número de notificações de casos de dengue no estado de Goiás, Brasil, a partir das variáveis meteorológicas precipitação, temperatura mínima, temperatura máxima, humidade relativa do ar e velocidade do vento. Sabe-se que o clima tropical favorece a proliferação do principal vetor transmissor da doença, o mosquito *Aedes aegypti*, e que a dengue é uma doença viral com tratamento sintomático, devendo o vetor transmissor ser eliminado para evitar epidemias e mortes.

Neste estudo analisa-se os dados de notificações semanais dos casos de dengue na cidade de Goiânia, capital e principal cidade do Estado. Aplica-se a metodologia das Equações de Estimção Generalizadas, uma vez que os valores semanais das notificações de casos de dengue poderão ser temporalmente correlacionados, o que viola o pressuposto da independência das observações. Neste contexto, ajustam-se modelos de regressão com as distribuições de Poisson e Binomial Negativa para prever o número de notificações de casos de dengue em função das variáveis meteorológicas.

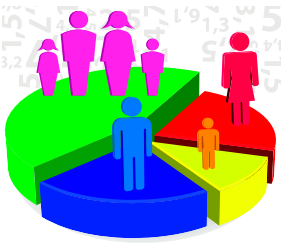
Numa análise englobando 20 cidades do estado de Goiás, onde os dados dizem respeito a informações repetidas no tempo para diversos locais, torna-se necessário considerar a eventual existência de correlação espacial e/ou temporal. Por tratar-se de dados agrupados, o número de notificações de casos de dengue é estudado recorrendo-se aos Modelos Lineares Generalizados Mistos, os quais permitem incorporar os efeitos fixos associados às variáveis meteorológicas e os efeitos aleatórios para explicar as influências espaço-temporais caracterizadas pelos fatores *cidade*, *ano* e *semana*. Nos modelos ajustados, o número de notificações de casos de dengue é estimado utilizando as variáveis meteorológicas e as estações do ano como efeitos fixos e os fatores *cidade* e *ano* como efeitos aleatórios de modo a caracterizar a dependência espacial e temporal.

Para analisar a significância das componentes de variância, associadas aos efeitos aleatórios, aplicam-se métodos de reamostragem *bootstrap* em dados simulados e em dados reais, obtendo-se probabilidades de cobertura superiores a 90 % quando o processo de reamostragem no nível do fator em estudo envolve cerca de 50 % dos dados originais.

Os resultados obtidos indicam uma associação direta entre as variáveis meteorológicas e o número de notificações de casos de dengue, sendo o verão e o outono as estações do ano com maior número de casos registados. A precipitação, a temperatura mínima e a humidade relativa do ar são as variáveis que mais contribuem para o aumento no número de casos de dengue. O ano e a localização da cidade são os fatores determinantes na incidência de casos de dengue. A partir dos resultados obtidos, tem-se a indicação da necessidade de políticas públicas, juntamente com ações conjuntas da população local, para combater o vetor transmissor da dengue e evitar períodos epidémicos.

Antônio Neco de Oliveira

# Sessão de entrega dos Prémios Estatístico Júnior 2018



Sociedade  
Portuguesa de  
Estatística

Porto  
Editora

## 29 de Setembro de 2018, FNAC – Fórum, Coimbra

A Sociedade Portuguesa de Estatística promove anualmente o Prémio Estatístico Júnior, com o patrocínio da Porto Editora. Com esta iniciativa pretende-se incentivar o interesse pelas áreas de Probabilidades e Estatística dos estudantes dos Ensinos Básico e Secundário, e dos Cursos de Educação e Formação (CEF) e de Educação e Formação de Adultos (CEFA).

O Prémio Estatístico Júnior (PEJ) distingue anualmente sete trabalhos e é atribuído aos estudantes que os realizaram e a alguns dos professores orientadores, sendo a sua entrega formal realizada numa sessão que lhe é expressamente consagrada.

A sessão de entrega dos PEJ 2018 iniciou-se pelas 16 horas com breves palavras da Presidente da SPE sobre este Prémio e com a entrega dos prémios aos estudantes e professores distinguidos nesta edição.

Em seguida tivemos o prazer de ouvir o Doutor Jaime Carvalho e Silva, docente da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, com uma palestra intitulada “Os números também nos enganam!”. Depois de destacar a importância da existência de dados e do seu tratamento estatístico cuidado, reconhecida por fontes tão diversas como H.G. Wells, Sherlock Holmes, Aaron Levenstein ou Ronald Coase, foram apresentadas múltiplas situações, baseadas em dados reais, que podem levar a conclusões ou interpretações desprovidas de sentido. Uma breve panorâmica sobre os Números no Humor foi também apresentada. A concluir a palestra ficaram sugestões de leitura sobre o tema (Os números (não) mentem de Charles Seife, Asesinatos matemáticos de Claudio Alsina, Como mentir com a Estatística de Darrel Huff, entre outros) bem como a mensagem de que é fundamental a escolaridade estatística em todos os ciclos de estudo.



A Direcção da SPE agradece a presença nesta sessão dos estudantes premiados, seus professores e familiares, assim como às Doutoradas Maria Eugénia Graça Martins e Manuela Neves, membros do júri dos PEJ 2018. Um agradecimento especial é dirigido ao Doutor Jaime Carvalho e Silva pela interessante palestra com que, generosamente, enriqueceu o programa desta iniciativa.

Esmeralda Gonçalves



## Palavras dos premiados

**Ana Beatriz Gomes Silva e Miriam de Faria Ferreira**, da Escola Secundária do Castelo da Maia

*Porque concorreram ao Prémio Estatístico Júnior?* Despertou-nos curiosidade em saber mais sobre as Preferências Escolares dos estudantes face à atual sociedade em que vivemos.

*Como souberam dos PEJ?* Através dos nossos professores.

*O que é, para vós, ser Estatístico?* Ser estatístico é estudar problemas tratados e analisar as conclusões.

**Carolina Horta, Daniela Silva e Margarida Confraria**, do Colégio do Senhor dos Milagres, Leiria

*Porque concorreram ao Prémio Estatístico Júnior?* Concorremos ao Prémio Estatístico Júnior porque elaborámos um trabalho no Clube de Saúde, recolhemos e analisámos dados e estabelecemos conclusões.

*Como souberam dos PEJ?* Os professores deram-nos conhecimento deste projeto, nós achámos interessante e decidimos participar.

*O que é, para vós, ser Estatístico?* Ser estatístico é recolher dados, trabalhá-los e tirar conclusões.

**Daniel Pereira**, da Escola Secundária do Castelo da Maia

*Porque concorreste ao Prémio Estatístico Júnior?* Em primeira medida, o projeto foi-nos apresentado pelo professor de MACS, disciplina em que a estatística é uma “disciplina” fundamental. Após realizar o trabalho, este foi enviado a concurso.

*Como soubeste dos PEJ?* Como referido acima, o PEJ foi-nos apresentado pelo então professor de MACS.

*O que é, para ti, ser Estatístico?* Para mim ser estatístico é estudar problemas tratados e analisar as conclusões. A estatística pode ser também uma das mais importantes faculdades do Homem. Todos os dias argumentamos tentando persuadir o outro com as nossas ideias, logo uma das ferramentas necessárias será o uso dos números, do real. A base da nossa coerência passa por sermos verdadeiros.

**Susana Dias, António Abreu e Guilherme Salvador**, da Escola Secundária Artur Gonçalves, Torres Vedras

*Porque concorreram ao Prémio Estatístico Júnior?* O Prémio era aliciante, incentivo da professora e interesse na temática do concurso – estatística.

*Como souberam dos PEJ?* Através da professora Alice.

*O que é, para vós, ser Estatístico?* É olhar o mundo pelo espectro da interpretação de dados.

**Ana Carolina Mendes Barbosa e Lia Margarida Mota Sobral**, da EB 2/3 da Maia

*Porque concorreram ao Prémio Estatístico Júnior?* Como avaliação para a disciplina de matemática tivemos de fazer um trabalho de estatística; como o professor gostou do nosso trabalho propôs que participássemos e nós aceitámos o desafio.

*Como souberam dos PEJ?* Pelo professor de matemática (Bernardino C. Andrade).

*O que é, para vós, ser Estatístico?* Ser estatístico é saber investigar sobre um assunto, saber fazer o devido tratamento de dados e tirar conclusões de forma assertiva.

## **Prémios Estatístico Júnior 2018**

### **Trabalho classificado em 1º lugar (3º ciclo do Ensino Básico)**

Título: *Hábitos Tabágicos dos encarregados de educação*

Autores: Carolina Sofia Gomes Horta, Daniela Fortunato Silva e Margarida Crespo Confraria

Professora orientadora: Eneida Edite Spencer Monteiro.

Estabelecimento de Ensino: Colégio Senhor dos Milagres, Leiria

### **Trabalho classificado em 2º lugar *ex-aequo* (3º ciclo do Ensino Básico)**

Título: *Relação entre pais e filhos*

Autores: Ana Carolina Mendes Barbosa e Lia Margarida Mota Sobral

Professor orientador: Bernardino Carneiro de Andrade.

Estabelecimento de Ensino: Escola EB 2,3 da Maia, Maia

### **Trabalho classificado em 2º lugar *ex-aequo* (3º ciclo do Ensino Básico)**

Título: *Já alguma vez fez dieta?*

Autores: Rosa Daniela Fontes Maciel Azevedo

Professor orientador: Bernardino Carneiro de Andrade

Estabelecimento de Ensino: Escola EB 2,3 da Maia, Maia

### **Trabalho classificado em 1º lugar (Ensino Secundário)**

Título: *Torres Novas aos olhos dos jovens: Cultura e Lazer*

Autor: António Pedro Santos de Abreu, Guilherme Eduardo Roque Salvador e Susana Gomes Dias

Professor orientador: Maria Alice da Silva Martins

Estabelecimento de Ensino: Escola Básica e Secundária Artur Gonçalves, Torres Novas

### **Trabalho classificado em 2º lugar *ex-aequo* (Ensino Secundário)**

Título: *A Homossexualidade*

Autores: Daniel Jorge dos Santos Pereira, Henrique Manuel Magalhães Vinha e Vera Lúcia Oliveira Machado

Professor orientador: Andreia Mónica Moreira da Silva

Estabelecimento de Ensino: Agrupamento de Escolas do Castelo da Maia

### **Trabalho classificado em 2º lugar *ex-aequo* (Ensino Secundário)**

Título: *Preferências escolares*

Autores: Ana Beatriz Gomes Silva e Miriam da Faria Ferreira

Professor orientador: Paula Maria Botas de Sousa Pratas

Estabelecimento de Ensino: Agrupamento de Escolas do Castelo da Maia

### **Trabalho premiado (Cursos EFA/CEF)**

Título: *Açúcar: o veneno mais doce!*

Autores: Adriana Jacinto Santos e Cátia Sofia Vicente Neto

Professora orientadora: Marta Maria Direito Pereira Caseiro

Estabelecimento de Ensino: Agrupamento Rafael Bordalo Pinheiro, Caldas da Rainha

**Nota: Não foi atribuído o 3º lugar (Ensino Secundário e Ensino Básico)**



## Edições SPE - Minicursos

**Título:** *Estatística Bayesiana Computacional – uma introdução*

**Autores:** M. Antónia Amaral Turkman e Carlos Daniel Paulino

**Ano:** 2015.

**Título:** *Análise de Valores Extremos: Uma Introdução*

**Autoras:** M. Ivette Gomes, M. Isabel Fraga Alves e Claudia Neves

**Ano:** 2013.

**Título:** *Modelos com Equações Estruturais*

**Autora:** Maria de Fátima Salgueiro

**Ano:** 2012.

**Título:** *Análise de Dados Longitudinais*

**Autoras:** Maria Salomé Cabral e Maria Helena Gonçalves

**Ano:** 2011

**Título:** *Uma Introdução à Estimação Não-Paramétrica da Densidade*

**Autor:** Carlos Tenreiro

**Ano:** 2010

**Título:** *Análise de Sobrevivência*

**Autoras:** Cristina Rocha e Ana Luísa Papoila

**Ano:** 2009

**Título:** *Análise de Dados Espaciais*

**Autoras:** M. Lucília de Carvalho e Isabel C. Natário

**Ano:** 2008

**Título:** *Introdução aos Métodos Estatísticos Robustos*

**Autores:** Ana M. Pires e João A. Branco

**Ano:** 2007

**Título:** *Outliers em Dados Estatísticos*

**Autor:** Fernando Rosado

**Ano:** 2006

**Título:** *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*

**Autor:** Carlos Braumann

**Ano:** 2005

**Título:** *Uma Introdução à Análise de Clusters*

**Autor:** João A. Branco

**Ano:** 2004

**Título:** *Séries Temporais – Modelações lineares e não lineares*

**Autoras:** Esmeralda Gonçalves e Nazaré Mendes Lopes

**Ano:** 2003 (2ª Edição em 2008)

**Título:** *Modelos Heterocedásticos. Aplicações com o software Eviews*

**Autor:** Daniel Muller

**Ano:** 2002

**Título:** *Inferência sobre Localização e Escala*

**Autores:** Fátima Brilhante, Dinis Pestana, José Rocha e Sílvio Velosa

**Ano:** 2001

**Título:** *Modelos Lineares Generalizados – da teoria à prática*

**Autores:** M. Antónia Amaral Turkman e Giovani Silva

**Ano:** 2000

**Título:** *Controlo Estatístico de Qualidade*

**Autoras:** M. Ivette Gomes e M. Isabel Barão

**Ano:** 1999

**Título:** *Tópicos de Sondagens*

**Autor:** Paulo Gomes

**Ano:** 1998

## Retrospectiva do Boletim SPE

O *Boletim SPE* através dos seus “Tema Central”

- Primavera de 2018 - Destaque: Estatística Multivariada - perspectiva no séc. XXI
- Outono de 2017 - Destaque: O Tema Central da Estatística - um novo olhar
- Primavera de 2017 - Destaque: Incerteza em Engenharia
- Outono de 2016 - Destaque: O Tema Central da Estatística
- Primavera de 2016 - Destaque: Séries Temporais e suas aplicações
- Outono de 2015 - Destaque: Estatística em Genética
- Primavera de 2015 - Destaque: Estatística no Desporto
- Outono de 2014 - Destaque: Estatística no Ensino Básico e Secundário
- Primavera de 2014 - Destaque: (Um) Ano Internacional da Estatística
- Outono de 2013 - Destaque: A "Escola Bayesiana" em Portugal
- Primavera de 2013 - Destaque: Estatística não-paramétrica
- Outono de 2012 - Destaque: Métodos Estatísticos em Medicina
- Primavera de 2012 - Destaque: Estatística no Ensino Superior Politécnico
- Outono de 2011 - Destaque: Análise de Sobrevivência
- Primavera de 2011 - Destaque: Sondagens e Censos
- Outono de 2010 - Destaque: Estatística Espacial
- Primavera de 2010 - Destaque: Data Mining - Prospecção (Estatística) de Dados
- Outono de 2009 - Destaque: Modelos Econométricos
- Primavera de 2009 - Destaque: Investigação (em) Estatística
- Outono de 2008 - Destaque: Processos Estocásticos
- Primavera de 2008 - Destaque: ALEA - Um sítio do nosso mundo
- Outono de 2007 - Destaque: Bioestatística
- Primavera de 2007 - Destaque: A "Escola de Extremos" em Portugal
- Outono de 2006 - Destaque: Ensino e Aprendizagem da Estatística

também disponíveis em <http://www.spestatistica.pt/index.php/publicacoes-57/boletins>



# Índice

Editorial .....	1
Mensagem da Presidente .....	2
Notícias .....	3
<i>Enigmística</i> .....	18
<b><i>Equações diferenciais estocásticas e algumas aplicações</i></b>	
“Modelos de crescimento populacional usando equações diferenciais estocásticas – tempos de extinção e influência da incorreta especificação do modelo” <i>Clara Carlos</i> .....	19
Probabilidades e Hidrodinâmica <i>Ana Bela Cruzeiro</i> .....	25
Equações Diferenciais Estocásticas: alguns exemplos e aplicações em Finanças <i>João Guerra e João Nicolau</i> .....	31
Políticas ótimas de pescas usando equações diferenciais estocásticas <i>Nuno M. Brites e Carlos A. Braumann</i> .....	40
Avaliação de opções standard e barreira com o modelo CEV <i>José Carlos Dias</i> .....	49
Aplicações das equações diferenciais estocásticas em Engenharia <i>Paula Milheiro Oliveira</i> .....	57
Problemas de tempo ótimo de paragem com critério integral <i>Cláudia Nunes e Carlos Oliveira</i> .....	65
Um breve olhar sobre a Estatística das Equações Diferenciais Estocásticas em Portugal <i>Manuel L. Esquível</i> .....	71
Modelos de equações diferenciais estocásticas e modelos mistos em crescimento individual <i>Patrícia A. Filipe</i> .....	76
Breve introdução às equações diferenciais estocásticas <i>Carlos A. Braumann</i> .....	81
<b><i>Ciência Estatística</i></b>	
<i>Artigos Científicos</i> .....	89
<i>Livros e Capítulos de Livros</i> .....	89
<i>Teses de Doutoramento</i> .....	89
Prémios “Estatístico Júnior 2018” .....	91
Edições SPE - Minicursos .....	95
Retrospectiva .....	96