Boletim

SPE
Sociedade Portuguesa de Estatística

Publicação semestral *primavera de 2026*

BioEconomia no Crescimento Estocástico – Uma Contribuição Portuguesa

Crescimento Estocástico – um Grupo de Investigação nascido em Évora
Carlos A. Braumann **25**

Modelos de crescimento populacional: tempos de extinção e impacto dos efeitos de Allee
Clara Carlos **42**

Modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório: políticas de pesca e otimização do lucro
Nuno M. Brites **49**

Modelos estocásticos de crescimento individual e otimização do lucro
Patrícia A. Filipe e Gonçalo Jacinto **56**

Modelos Mistos de Crescimento Individual e Problemas de Estimação
Gonçalo Jacinto, Patrícia A. Filipe e Nelson T. Jamba **63**

Editorial 2
Mensagem do Presidente 4
Notícias 5
Enigmística 14
Episódio na História da Estatística 15
BioEconomia no Crescimento Estocástico – Uma Contribuição Portuguesa 25
Ciência Estatística 71
Edições SPE - Minicursos 72
Boletim através do Tema Central 73

Informação Editorial
Endereço: Sociedade Portuguesa de Estatística.
Campo Grande. Bloco C6. Piso 4.
1749-016 Lisboa. Portugal.
Telefone: +351.217500120
e-mail: *spe*@spestatistica.pt
URL: https://www.spestatistica.pt
ISSN: 1646-5903
Depósito Legal: 249102/06
Tiragem: Edição digital
Execução Gráfica e Impressão: Gráfica Sobreirense
Editor: Fernando Rosado, *fernando.rosado@fc.ul.pt*

SPE

Sociedade Portuguesa de Estatística

https://www.spestatistica.pt

Sociedade Portuguesa de Estatística desde 1980

Junta-te à

SPE
Sociedade Portuguesa de Estatística

"Se já és sócio da SPE, incentiva os teus colegas, colaboradores e alunos a juntarem-se à SPE"

A SPE

- Oferece descontos em congressos e outros eventos organizados pela SPE.
- Oferece distinções e reconhecimento através dos seus prémios.
- Oferece oportunidades para ampliares a tua rede de contactos através da comunidade SPE.
- Oferece aos sócios acesso a um sistema de acreditação internacional.
- Valoriza sócios, comunidade e profissão apostando na educação, formação e inovação.
- Defende a profissão e molda o seu futuro.

Junta-te à SPE:

https://www.spestatistica.pt/socios/admissao-formulario

Quota anual

- Regular: 30€
- Estudante: 15€
- Promotor*: 0€
- Recém-licenciado†: grátis!

† Até um ano após terminar a licenciatura.
* Um "sócio promotor" angaria 2 novos sócios por ano.

Editorial

… sobre o "trabalho futuro" e, a propósito de um Tema Central…

1. O *Boletim SPE* tem dedicado algumas edições para apresentar "grupos científicos" que especificamente pela área principal da sua produção se destacam nos mais diversos indicadores. Por exemplo, foi assim no *Boletim primavera 2007*, com a Escola de Extremos em Portugal e com a Escola Bayesiana, no *Boletim outono de 2023*.
Com os mesmos objetivos, de registos memoriais, o *Boletim SPE primavera de 2026*, está centrado numa "outra escola" – a primeira que está longe de Lisboa. Embora possamos sentir que as distâncias na atual era IA "são apenas virtuais", todos sabemos que os (muito relativos, criticados e negativistas) *rankings*, constituem um dos fatores condicionantes do "afastamento real" talvez mesmo o "isolamento" vivido nas nossas Escolas Universitárias "mais afastadas" do centro científico – no caso vertente, na Universidade de Évora. A estes centros mais afastados, mais do que mostrar o seu valor também lhes é devido serem reconhecidos como raízes plantadas na descentralização num ambiente com menos estruturas tradicionais de apoio; como bibliotecas ou arquivos.
O Boletim, para cumprir um objetivo de "divulgação" a toda a comunidade e muito em especial aos estatísticos, desta vez, ressalta uma contribuição muito importante a vários níveis; porque é relevante do ponto de vista científico e talvez acima de tudo, porque o fundamental, o seu núcleo, está radicado numa universidade que teve de renascer após história atribulada.
De facto, a Universidade de Évora foi a segunda a ser fundada em Portugal. As referências do saber da época, após a criação da Universidade de Coimbra, indicaram Évora para local de "um serviço académico" para o sul do país. A adversidade de "o tempo e o modo" conduziu a um período muito atribulado que a História nos relata. Mas, como o gérmen era forte, no terceiro quartel do século XX, o recém-criado Instituto Universitário de Évora, que apenas viveu meia dúzia de anos, deu lugar à Universidade de Évora. No Alentejo profundo, a atual Universidade de Évora está, pois, a viver uma época jubilar de ouro. E, nesta renascida universidade, no interior do país, desde o seu início, laborou o Professor Carlos Braumann e à qual se tem dedicado com um projeto do mais elevado valor. O grupo nuclear do Tema Central da presente edição, tem as suas bases de partida sediadas na Universidade de Évora e, assim sendo, é também ele um elemento de prestígio para a própria universidade e onde se iniciaram investigadores já no caminho científico de outras academias. No conceito editorial de divulgação das "escolas científicas", como já referido, é esse labor e, em especial, os seus frutos que o *Boletim SPE primavera de 2026* integra como Tema Central.
O título "BioEconomia no Crescimento Estocástico – Uma Contribuição Portuguesa" é muito feliz e, na opinião do editor, define muito bem "ao que vem esta edição". Neste ponto deve salientar-se e reforçar a componente "Uma Contribuição Portuguesa". E isto porque é a ela que estão ligados muitos dos autores do boletim primavera, ou que já colaboraram com o boletim e, na generalidade, a comunidade sabe "o quê" sobre a sua área de trabalho e o que tem feito e publicado. Um detalhe é a novel "BioEconomia" que ao ser incluído, também revela pioneirismo. É importante que o Boletim o registe.
Ao Professor Carlos Braumann, pela generosidade manifestada em mais esta colaboração em prol da Estatística, o *Boletim SPE* deve um sincero agradecimento; pelo empenho e a dedicação, desde sempre e por, na presente edição, ter desempenhado a função de coeditor – pela seleção de temas e pelos autores convidados. A "Escola de Évora" passa a constituir património editorial do *Boletim SPE*.

2. No próximo outono, a linha do tempo mostra 20 anos de Boletim.
O primeiro Tema Central, foi dedicado ao *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. Ensino? O que mudou nestes vinte anos? Aprendizagem, no tempo em que o acrónimo IA apenas seria o pretérito imperfeito do verbo ir convertido em maiúsculas para algum realce comunicativo? Apesar da temática ser frequente nas páginas do Boletim, (*e. g.* edições de 2006, 2012, 2014 e 2023); a sua importância requer que se use, sempre, uma boa oportunidade para "atualizar", "rejuvenescer" e "comparar" para, de algum modo ajudar a consolidar.
No *Boletim SPE outono 2026* aqueles temas vão ser revisitados e com valor acrescentado, num contexto do Episódio na História da Estatística que está incluído nesta edição (Cf. p. 15).

Este “tema central”, também torna possível prolongar o excelente debate sobre a problemática referida; iniciado no recente XXVII Congresso SPE e que pode ser continuado no *Boletim SPE outono2026*.
O tema central de cada Boletim é um desafio bianual que pretende contribuir para a definição de objetivos estatísticos individuais que, uma vez, reunidos permitem construir um “texto programático”; um horizonte para a SPE no seu todo. No seu cinquentenário, obviamente, (ainda mais) intensamente vividos e / ou assimilados pelos “estatísticos protagonistas do presente” e adaptando as emergentes diretrizes IA (que deve ser valorizada!) é de ouro a época para “dar mais um passo em frente”.
É presente, para futuro; que a continuidade de gerações reclama!
Divulgar Ciência Estatística e contribuir para uma mais alta literacia na sociedade é ponto forte dos estatutos da SPE e, portanto, também do Boletim SPE. Como muito bem nos aponta a Mensagem do Presidente da SPE, essa é tarefa generalista para a qual, em vários caminhos, também todos os leitores, sejam ou não especialistas, podem ser convocados pois ela é um motor da Ciência.
Sobre o “trabalho futuro” e a propósito do próximo Tema Central o Boletim, como sempre, está de portas abertas para receber e divulgar todas as contribuições. Fica o convite para que todos os interessados possam responder: Presente!

O Tema Central do próximo Boletim será, pois,

SPE 2030

Mensagem do Presidente

Caros sócios da SPE,

Gostaria de começar por agradecer a elevada participação da comunidade estatística, refletida no número significativo de submissões recebidas para o livro de atas do último congresso da SPE, cuja publicação se encontra novamente assegurada em colaboração com a Springer. Aproveito para expressar o meu sincero agradecimento a todos os autores e, de forma muito especial, aos colegas que aceitaram o convite para proceder à revisão dos trabalhos, cujo rigor e dedicação têm sido fundamentais para garantir a qualidade científica da publicação e evidenciar uma comunidade ativa, colaborativa e comprometida com a excelência.

Embora este processo editorial ainda esteja em curso, a SPE iniciará já a preparação do próximo Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística, que terá lugar na cidade de Leiria em 2027. Este será certamente mais um momento privilegiado para a partilha de conhecimento, a discussão de novos desafios científicos e o reforço das ligações entre investigadores, profissionais e estudantes.

Entre as diversas iniciativas que se encontram em preparação, permitam-me destacar uma que assume particular significado para a nossa Sociedade. Em 2028 assinalar-se-á o centenário do nascimento do Professor Tiago de Oliveira, fundador da SPE e seu primeiro presidente. A celebração desta efeméride está já a ser preparada com a colaboração de vários parceiros institucionais e constituirá uma oportunidade importante para valorizar o legado científico e institucional de uma figura central na afirmação da Estatística em Portugal.

A SPE continuará igualmente a reforçar a sua presença internacional e a desenvolver iniciativas de divulgação e educação estatística, incluindo a atribuição de prémios e projetos que visam promover a literacia estatística e a valorização do uso responsável de dados na sociedade. Neste espirito, gostaria de recordar que se encontram abertas, até ao dia 15 de setembro, as candidaturas ao Prémio Estatística SPE 2026. Este prémio visa estimular a atividade de estudo e investigação científica na área, sendo atribuído a jovens investigadores, sócios da SPE, que não tenham recebido o prémio nas quatro edições anteriores. Informações detalhadas e o respetivo regulamento podem ser consultados no site da SPE, pelo que encorajamos todos os jovens investigadores elegíveis a submeter a sua candidatura e a aproveitar esta oportunidade de reconhecimento na comunidade estatística.

A SPE tem vindo a promover uma reflexão interna sobre a afirmação da Estatística enquanto disciplina científica e enfrenta desafios relevantes neste domínio, particularmente num contexto marcado pela crescente centralidade dos dados e pela expansão da Ciência de Dados. Independentemente das decisões que venham a ser tomadas, é essencial reforçar a visibilidade e a afirmação da Estatística no espaço científico e social, promover a literacia estatística e continuar a apoiar a nossa comunidade académica e profissional. São temas que permanecerão no centro da ação da Sociedade e que exigem o contributo e o envolvimento de todos.

A SPE continuará empenhada em promover iniciativas científicas, educativas e de divulgação que contribuam para o desenvolvimento da Estatística e para o reforço da sua relevância na sociedade.

Contamos com a vossa participação para continuar a construir uma comunidade estatística forte, dinâmica e mobilizadora.

Com os melhores cumprimentos,
Luís Machado
Presidente da Sociedade Portuguesa de Estatística

Notícias

• 45º Aniversário SPE

2025-11-28

Caros(as) Sócios(as),

Hoje, 28 de novembro, celebramos o 45.º aniversário da Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE), fundada em 1980. É com enorme satisfação que assinalo esta data em nome da Direção e em representação de toda a nossa comunidade.

Ao longo de quatro décadas e meia, a SPE afirmou-se como uma referência nacional na promoção da Estatística, impulsionando a investigação científica e a literacia estatística. Este percurso só foi possível graças ao compromisso contínuo dos nossos sócios, colaboradores e parceiros institucionais.

Permitam-me dedicar uma palavra especial aos fundadores da SPE, cuja visão e dedicação lançaram as bases de uma Sociedade que hoje se mantém dinâmica, ativa e reconhecida. O trabalho que iniciaram continua a inspirar a nossa missão e a orientar a construção do futuro da Estatística em Portugal.

A todos os sócios, deixo um sincero agradecimento pela confiança, pela participação e pelo empenho que têm demonstrado.

Que este aniversário seja não apenas uma celebração, mas também uma oportunidade para renovarmos o nosso compromisso com a promoção da Estatística e com o serviço à comunidade científica e ao país.

Parabéns à SPE e parabéns à nossa comunidade!

Com os melhores cumprimentos,
Luís Machado

• Prémios “Estatístico Júnior 2026”

Está aberto o período de candidaturas para os vários Prémios Estatístico Júnior 2026, que mantêm o seu compromisso de estimular e desenvolver o interesse dos estudantes

- do **3.° Ciclo do Ensino Básico**,

- do **Ensino Secundário**,

- dos **Cursos de Educação e Formação** (CEF) o

- dos **Cursos de Educação e Formação de Adultos** (CEFA)

pelas áreas de Probabilidade e Estatística.

As candidaturas podem ser submetidas até 31 de maio de 2026, de acordo com o Regulamento e o Boletim de Candidatura estabelecidos. Para auxílio dos participantes, está disponível o Projeto Census na Escola como exemplo de Guião de Trabalho. O Regulamento e o Guião podem ser consultados no final deste Boletim.

Todas/os as/os sócias/os a SPE convida a divulgarem esta iniciativa junto da comunidade escolar.

FR

• Prémio SPE 2026

Procurando estimular a atividade de estudo e investigação científica em Probabilidades e Estatística, a Sociedade Portuguesa de Estatística atribui o Prémio SPE a jovens investigadores, sócios da SPE, que não tenham recebido o prémio nas quatro edições anteriores.

Até 15 de Setembro está aberto o concurso para atribuição do Prémio SPE 2026. O Regulamento deste Prémio é apresentado no final desta edição do Boletim SPE.
Para obter informações adicionais: https://www.spestatistica.pt/pt/premios/premio-spe

Investigadores vencedores do Prémio SPE:

- 2025: Lídia André (Lancaster University). Neural Bayes Inference for Complex Bivariate Extremal Dependence Models.
- 2024: Ana Martins (universidade de Aveiro). *On the theory of spatio-temporal models for time series of counts*.
- 2023: Pedro Miranda Afonso (Erasmus University Medical Center). *A Bayesian shared-parameter approach to jointly model multiple Gaussian and non-Gaussian longitudinal markers with recurrent and competing event times.*
- 2022: André Martins Brito (INSA|NOVA FCT). *Temperature-Mortality Association: Portuguese Extreme Weather Event Early Warning System.*
- 2022: Henrique Guerreiro (ISEG|UL). *Least Squares Monte Carlo Methods in Stochastic Volterra Rough Volatility Models*.
- 2020: Ivo Sousa-Ferreira (CEAUL & DEIO|FCUL). *A new lifetime distribution and its applications in recurrent events analysis*.
- 2019: Jessica Silva Lomba (CEAUL & DEIO|FCUL). *L-moments for automatic threshold selection in extreme value analysis of wave heights from the Gulf of Mexico*.
- 2018: Soraia Alexandra Gonçalves Pereira (CEAUL & DEIO|FCUL). *Spatio-temporal models for georeferenced unemployment data*.
- 2017: Carlos Oliveira (DM|IST). *Problemas de tempo ótimo de paragem com critério integral*.
- 2016: Filipa Alexandra Cardoso da Silva (CMUC & DM|UCoimbra). *Processos INGARCH Poisson compostos na modelação de séries temporais de contagem sobredispersas*.
- 2015: Ana Isabel Coelho Borges (DM|UMinho). *Modelação Conjunta de Dados Longitudinais e de Sobrevivência de Cancro da Mama*.
- 2011-2014: Prémio não Atribuído.
- 2010: Gonçalo Jacinto (CIMA|UEvora). *Modelação dos Tempos de Duração de Rotas em Redes Móveis Ad Hoc*.

FR

• Encontro Internacional das Mulheres na Estatística e Ciência de Dados 2026

O International Day for Women in Statistics and Data Science (IDWSDS) regressa em 2026 com um novo encontro internacional, que terá lugar no dia 6 de outubro de 2026, em formato totalmente virtual.

Esta iniciativa é organizada pelo Caucus for Women in Statistics and Data Science (CWS), em colaboração com a Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE) e a American Statistical Association (ASA). Lançado em 2022, o IDWSDS tem vindo a afirmar-se como um espaço de celebração e visibilidade das contribuições das mulheres na Estatística e na Ciência de Dados a nível mundial.

Após o sucesso das edições anteriores, o encontro de 2026 continuará a promover a partilha científica, a inspiração e o envolvimento das novas gerações nas áreas da Estatística e da Ciência de Dados. A submissão de resumos decorre até 15 de julho de 2026, e as inscrições iniciam-se a 1 de junho de 2026.

Mais informações sobre o evento podem ser consultadas em https://www.idwsds.org.
A organização convida toda a comunidade a participar neste evento internacional e a juntar-se à celebração do papel fundamental das mulheres na Estatística e na Ciência de Dados.

Adicionalmente, convidamos todas as pessoas interessadas a explorar os materiais das edições anteriores disponíveis no mesmo site. Em particular, uma parte significativa das sessões do encontro de 2025 já se encontra acessível para visualização no YouTube, através da playlist:
https://www.youtube.com/watch?v=TBhGaEeUpao&list=PLMWQJOo52Q5WU7sSJbaxtspKlxZtgzA8Q

P'la Comissão Organizadora,
Lígia Henriques-Rodrigues e Vanda Lourenço

• Modern Trends in Time Series

Com mais de 50 participantes presentes, realizou-se no passado dia 6 de fevereiro, no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, a terceira edição do *One-Day Meeting on Advanced Statistics Topics* (oneMAST 2026) como oportunamente foi anunciado na última edição do Boletim da SPE.

Tendo como tema central *Modern Trends in Time Series*, esta edição teve como objetivo promover a discussão e a interação entre os participantes sobre um dos tópicos mais atuais e desafiantes em Estatística, nas vertentes metodológica e aplicada.

O programa desta terceira edição do oneMAST contou com excelentes palestras de oradores convidados, dedicadas a desenvolvimentos recentes e avanços metodológicos na análise de séries temporais. Patrícia de Zea Bermudez (CEAUL & FCUL) abordou a aplicação de *integrated nested Laplace approximations* (INLA) em modelos de volatilidade estocástica com limiar, enquanto David Stoffer (University of Pittsburgh) apresentou uma abordagem não paramétrica na deteção de alterações em frequências de banda estreita em séries temporais. João Gama (INESC TEC & FEP) discutiu os desafios emergentes associados aos fluxos de dados (*data streams)*, bem como as principais linhas de investigação atualmente em aberto nessa área.

A componente científica do evento incluiu ainda uma sessão com três comunicações submetidas (*Contributed Session*), que apresentaram abordagens inovadoras e recentes no estudo de séries temporais, assim como uma sessão destinada a jovens investigadores (*Young Researchers Session*) no formato de apresentações curtas (*pitch*), complementadas por uma exposição de posters em formato de *graphical abstract*. Esta última sessão contou com nove apresentações, revelador do interesse e participação ativa de jovens investigadores na área da Estatística. Antes do almoço houve ainda lugar a uma sessão extra com a apresentação de um estudo de caso prático por parte da PSE.

O encontro encerrou com uma mesa-redonda intitulada *What Comes Next? The Future of Time Series in a Data-Driven World*, moderada por Isabel Pereira (CIDMA & DMat-UA) proporcionando um fórum de debate sobre desafios emergentes, aplicações interdisciplinares e o papel da evolução desta área na ciência de dados convidando à reflexão sobre como estas metodologias poderão contribuir para um uso mais responsável da inteligência artificial e para uma interpretação mais rigorosa e transparente dos resultados por ela produzidos.

Apesar da longa e catastrófica sequência de tempestades que tem assolado muitas regiões de Portugal nas últimas semanas, a terceira edição do oneMAST realizou-se num ambiente acolhedor, muito fraterno e — acreditamos — muito estimulante e profícuo do ponto de vista científico.

Detalhes do programa científico pode ser obtido visitando a página do evento: https://sites.google.com/view/one-daymeeting-cidma

Oradores convidados, Comissão Científica e Comissão Organizadora do oneMAST 2026.

Agradecemos o apoio recebido do CIDMA (https://ror.org/05pm2mw36, ao abrigo do Programa de Financiamento Plurianual de Unidades de I&D da Fundação para a Ciência e a Tecnologia -FCT, https://ror.org/00snfqn58- referência UID/04106/2025, https://doi.org/10.54499/UID/04106/2025), DMat-UA, FLAD, PSE, SPE e CLAD.

O nosso agradecimento especial a todos os que fizeram desta edição um espaço tão agradável de partilha e convívio científico.

P’ro ano há mais!

Adelaide, Magda e Luís (CIDMA & DMat-UA)

• Glossário Inglês-Português de Estatística – Versão 2026

O **Glossário inglês-português de Estatística** (Glossário) é um projeto iniciado há cerca de 20 anos.

A **Comissão Especializada de Nomenclatura Estatística** (CENE) da **Sociedade Portuguesa de Estatística** (SPE), em colaboração com a **Associação Brasileira de Estatística** (ABE), está a proceder a uma atualização e proceder a uma nova versão do Glossário, que serve de guia normativo para o uso oral e escrito do vocabulário estatístico em língua portuguesa.

O glossário está disponível no site da ABE em:
https://www.redeabe.org.br

e no site da SPE em:
https://www.spestatistica.pt/pt/glossario

Pode também aceder ao glossário através do QR Code.

A CENE está a criar uma **rede de especialistas**, sócios da SPE de diferentes áreas da Estatística, que atuem como **consultores na atualização e expansão do glossário**, garantindo que se mantém atual face aos novos termos técnicos.

Para mais informações, sugestões para o glossário ou para participar na rede de especialistas, contacte-nos através do e-mail: glosspeabe@spestatistica.pt

Comissão Especializada de Nomenclatura Estatística:
Rui Santos (Politécnico de Leiria)
Marco Costa (Universidade de Aveiro)
Sílvio Velosa (Universidade da Madeira)

SPE
Sociedade Portuguesa de Estatística

• Conferências em 2026

MPDEE'26 - Conference on Models in Population Dynamics, Ecology, and Evolution,
Leicester, UK, 20-24 abril 2026,
https://dbearup.github.io/mpdee26/

WCDANM | 2026 - X Workshop on Computational Data Analysis and Numerical Methods,
Guimarães, 11-13 junho 2026,
https://w3.math.uminho.pt/WCDANM2026/

ICMASC'26 - 3rd International Conference Mathematical Analysis and Applications in Science and Engineering,
Porto, 21-23 junho 2026,
https://icmasc2026.app.earendelplatform.com/

CB

• VIII Jornadas Científicas de Estudantes da SEB com apoio da SBio-SPE

Como doutorando em Matemática Aplicada na Universidade de Aveiro e assistente convidado no Departamento de Ciências Médicas da mesma instituição, estive presente nas *VIII Jornadas Científicas de Estudiantes* organizadas pela Sociedad Española de Bioestadística (SEB), que decorreram em Bilbao, na Facultad de Ciencia y Tecnología da Universidad del País Vasco entre os dias 28 e 30 de janeiro de 2026. O encontro científico reuniu estudantes e jovens investigadores da área da bioestatística, promovendo a apresentação de trabalhos e a troca de experiências científicas num ambiente internacional de formação avançada. A minha participação contou com o apoio de uma bolsa atribuída pela Secção de Biometria da Sociedade Portuguesa de Estatística (SBio-SPE). Esta secção da Sociedade Portuguesa de Estatística tem como missão promover o desenvolvimento e a aplicação de métodos estatísticos nas ciências da vida, incentivando a investigação, a formação avançada e a colaboração científica entre investigadores nacionais e internacionais. Em articulação com a Sociedad Española de Bioestadística, a SBio-SPE contribui para o fortalecimento da comunidade ibérica de biometria e bioestatística, estimulando a mobilidade de jovens investigadores e a disseminação de novas metodologias estatísticas aplicadas à saúde, ambiente e ciências biológicas.

O programa científico das jornadas incluiu diversas sessões temáticas dedicadas a tópicos atuais da bioestatística e da estatística aplicada à saúde. Entre os temas abordados destacaram-se modelos estatísticos avançados, análise de sobrevivência e modelos, ensaios clínicos e métodos médicos, inferência causal, epidemiologia e saúde populacional, modelos espaço-temporais aplicados à epidemiologia e aplicações de aprendizagem automática em biomedicina. O encontro incluiu ainda uma sessão de pósteres científicos, momentos de discussão informal entre participantes e uma mesa-redonda dedicada à comunicação estatística interdisciplinar, refletindo sobre os desafios e oportunidades da colaboração entre estatísticos e investigadores de outras áreas científicas.

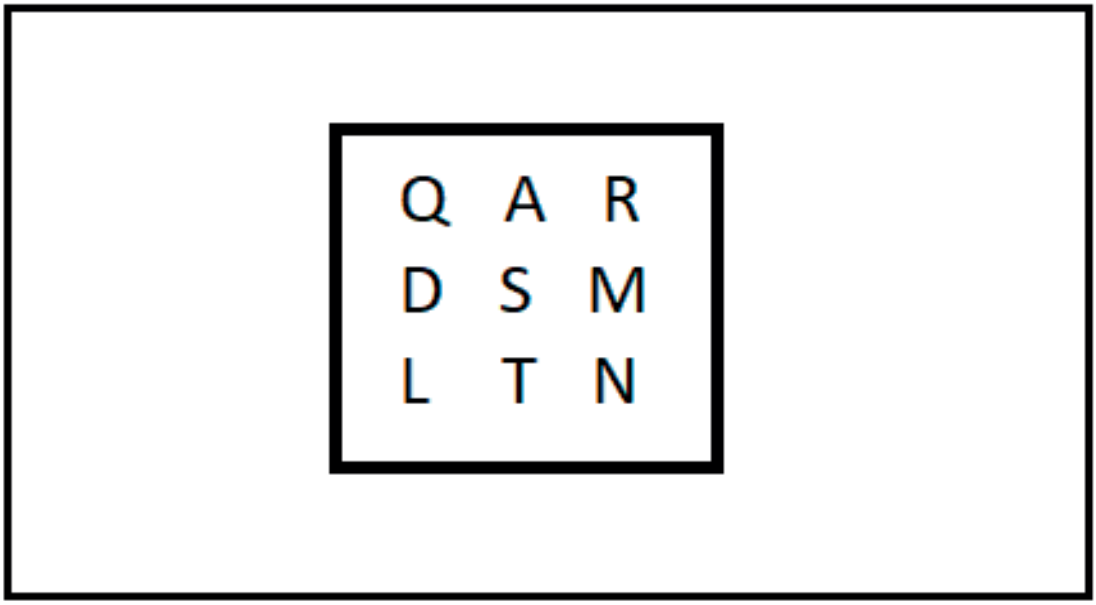
Durante o encontro, apresentei o trabalho intitulado *"Generalized Cross Entropy with Adaptive Support Spaces: Application to Point-of-Care Ultrasound in Hip Fractures"*, desenvolvido em colaboração com Elena Segura-Grau da ULS de Viseu Dão-Lafões e Pedro Macedo e Vera Afreixo do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. O estudo insere-se na minha linha de investigação dedicada aos métodos de Máxima Entropia e Entropia Cruzada Generalizada, abordagens estatísticas particularmente úteis para estimação de parâmetros em contextos com informação limitada, amostras pequenas ou problemas mal condicionados. Destaquei também o desenvolvimento do pacote GCEstim para a linguagem R e aplicação R Shiny, que implementa procedimentos de estimação baseados em Entropia Cruzada Generalizada, facilitando a aplicação prática destes métodos por investigadores e analistas de dados. Este contributo constitui uma ferramenta relevante para a disseminação e utilização destas metodologias em diferentes domínios científicos.

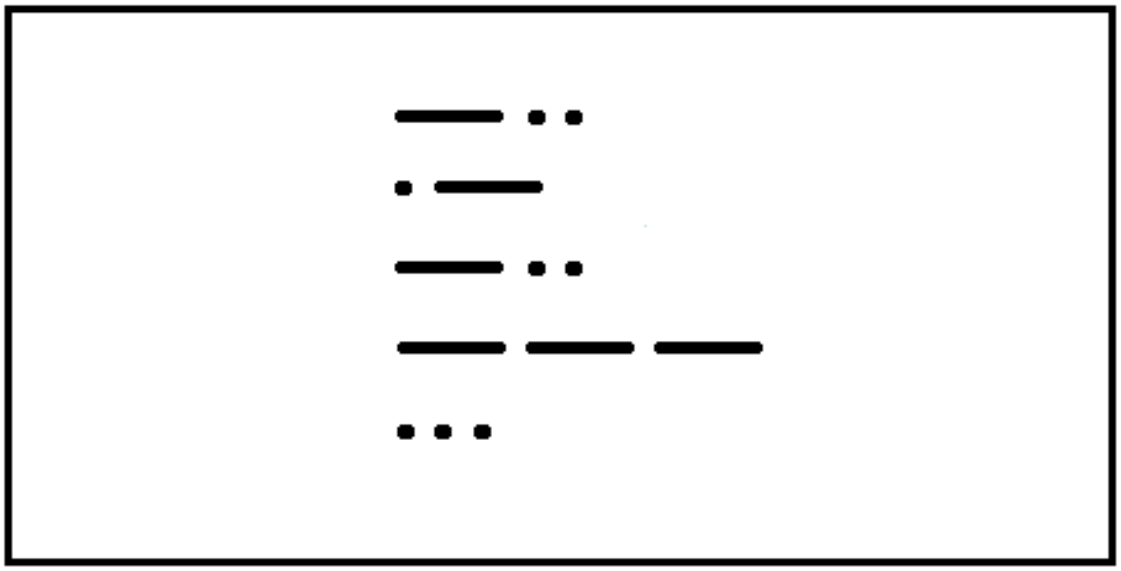
No trabalho apresentado propus um enquadramento metodológico baseado em espaços de suporte adaptativos, permitindo maior flexibilidade na estimação e melhor desempenho em cenários com elevada incerteza. A metodologia é ilustrada através da análise de dados provenientes de ecografia *point-of-care* aplicada ao diagnóstico de fraturas do colo do fémur, demonstrando o potencial destas técnicas de entropia para apoiar a análise de dados clínicos e a tomada de decisão em contexto médico.

Importa também sublinhar o contributo português na organização do encontro, nomeadamente de Pedro Miranda-Afonso, do Erasmus University Medical Center, que integrou a Comissão Científica e a Comissão de Organização das jornadas. A participação nas jornadas da SEB representou, assim, uma oportunidade para divulgar investigação desenvolvida em Portugal na área dos métodos de entropia aplicada à bioestatística, reforçando simultaneamente a colaboração científica entre comunidades estatísticas ibéricas e internacionais.

Jorge Cabral

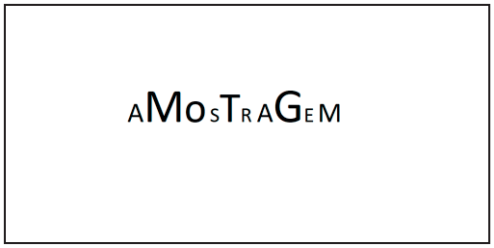
Enigmística de mefqa



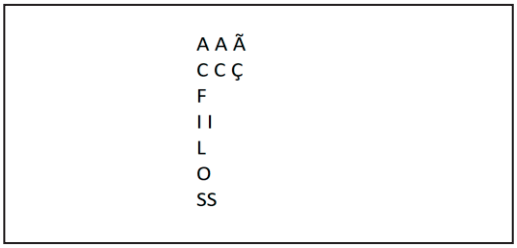


Enigmas 51 e 52

No Boletim SPE outono de 2025 (p. 16):



Enigma 49: Amostragem não proporcional



Enigma 50: Classificação Hierárquica

Episódio na História da Estatística

SPE 2030

A educação, como sistema cujo objetivo é a formação e instrução dos cidadãos, de modo a poderem alcançar uma melhor integração na sociedade, em geral, e na profissão, em particular; é ponto central dos estatutos da SPE. A educação é um "tema eterno" no debate social, obviamente, com pontos altos (ou baixos) decorrentes, em especial, nas campanhas eleitorais; como no país temos assistido nos tempos mais recentes. Surgem, muitas vezes, propostas de programas inovadores que, por esta ou aquela razão, não se implementam e em seguida são substituídos pelos decisores seguintes – concreta manifestação do efeito Penélope. Para além disso, em Educação muitos itens relevantes podemos elencar – desde a (eterna) falta de professores e da sua formação até à degradação da qualidade do ensino e aprendizagem. Ficam assim reunidos três ingredientes fundamentais: educação, ensino e aprendizagem. Falamos da educação em geral, mas é claro, que a maior parte dos pontos relevantes também podem e devem ser refletidos no âmbito da particularidade educativa de qualquer um ramo científico e ao mais alto nível. É um episódio que podemos construir e pode, na generalidade, incluir todos os conhecidos temas difíceis, no nosso caso, aplicados à Estatística. É, pois, na Educação, no Ensino e na Aprendizagem da Estatística que nos estamos a focar – em síntese: na Literacia Estatística.

A Sociedade Portuguesa de Estatística comemorou 45 anos no passado mês de novembro.
"Ido" o 45, como em tudo, assistimos que, sempre foi e será, no presente perpassa o futuro. Penetremos nesse momento do tempo presente para melhor construir o futuro. Para uma melhor preparação é também devido "olhar para o passado". E todos os momentos são importantes. Sempre que procuramos voltar à fonte e, de algum modo, recuperar o frescor original, despontam novas estradas de atuação, outras formas de expressão, sinais mais eloquentes, métodos criativos cheios de renovado significado e mais preparados, portanto, com maior valor para o mundo atual. Assim, decorrido o quadragésimo quinto ano de vida SPE, o tempo oferece um lustro simbólico que, ao culminar em jubileu de ouro, também, pode ser utilizado como "preparatório" para um quinquagésimo onde se possa comemorar com o maior sucesso, um conjunto de objetivos que no seu todo tenham concretizado, ou possam contribuir para uma (ainda) maior valorização da Educação Estatística.

O que é necessário fazer na Educação Estatística?

Decerto, as várias áreas para as quais é solicitada – em que se desenvolve e onde a educação estatística exerce o seu múnus – têm especificidades que requerem a abordagem dos "mais próximos" e mais experientes. Os especialistas Seniores! Aquelas, em comum todas têm um núcleo científico, onde uma educação basilar permite construir a restante educação específica. Para tal, o debate é fundamental e a associação científica SPE é o local certo para construir novas ideias e métodos educativos – inovação pedagógica. A SPE, com todo o seu património, deve constituir-se como nuclear e liderar, em especial nos novos tempos onde a velocidade tem a consequência imediata de efemeridade. É desafio para a qual as novas gerações de cientistas devem estar preparadas – a precariedade de modelos e métodos.

O que ensinar em 2030?

É uma questão para a qual a procura de resposta – a (cada vez mais) rápida evolução, especialmente tecnológica – requer muita ponderação e torna a decisão (ainda mais) efémera. A "revolução dos qubit" a gerar "novos modelos e métodos computacionais" é uma realidade (pontual) que em 2030 será (pelo menos) conjuntural. Aqui surge muito interessante, digamos particularmente valiosa, a (re)leitura de

alguns textos de diversas edições do Boletim SPE. Para a construção da(s) resposta(s) à pergunta deste parágrafo, algumas páginas de diversos boletins já foram publicadas e é particularmente relevante o texto de Jaime Carvalho e Silva de há três anos (Cf. *Boletim SPE outono de 2023*, p. 67).

Um acrónimo, para além da sigla que "sintetiza" informação também pode usar-se como uma referência projetada com determinados objetivos. Os acrónimos valem nos *media* e não só. São, ou podem ser também, apelativos e desafiadores. Enquanto sigla mostra caminhos que podem ajudar a criar novos projetos, novas dinâmicas. É um ponto de partida de um quinquénio desafiador. Assim sendo – como um episódio na História da Estatística – podemos definir ***SPE 2030*** como um Tema Central que integrado numa edição do Boletim SPE apresente reflexões individuais ou coletivas de especialistas, propostas ou exemplos concretos de necessidades na Educação Estatística ou ainda especificidades das várias secções e comissões em que ela é o centro – para as que já existem ou que ainda possam ser criadas no âmbito da SPE. O propósito do referido tema central, já tem história, pois, foi muito rico no *XXVII Congresso SPE* com diversas comunicações e exemplos de sucesso e em debates sequentes.

SPE 2030, é um episódio na História da Estatística que, intrinsecamente, surge também no contexto de Estatística e Sociedade. É pois, ambivalente nessas duas secções editoriais do Boletim SPE. E, este facto dá-lhe melhor caracterização e pode ser interpretado como um "acontecimento temporal" e / ou uma (humilde) contribuição em prol da sociedade. Aprendizagem, Ensino, Literacia é "trívio do tempo IA" – a Inteligência Artificial, assim dita; ou a versão Generativa que a efemeridade já gerou tão velozmente quanto incompatível com a consolidação que é um pilar na Ciência. Nelas, IA ou IAG, já estamos (ou admitimos estar) integrados. Como tal, são exigidos novos modelos e métodos educativos. Uma nova Educação, isto é, uma Educação adaptada, deve (ou está já a) emergir? Aquele trívio, com base em caminhos basilares a tantos níveis da via social é desafio (também) para as associações científicas, como a SPE.

Para além do cinquentenário temporal, é bom que a SPE mostre resultados cinquentões, seniores, que reforçam e afirmam a sua identidade; decerto também, o seu ideal, a sua maturidade – que assim, pela atualização de objetivos, se sentirá mais jovem.

Com a fundamentação apresentada, como um episódio na História da Estatística surge, pois, esta proposta de ***SPE 2030*** como Tema Central para o *Boletim SPE outono de 2026*.

Um ponto de partida para um percurso quinquenal que seja finalizado em meta de plena realização.

Fernando Rosado

Centro de Estatística e Aplicações
Universidade de Lisboa

CEAUL 50 anos – A investigar desde 1975

"50 anos CEAUL" - mais do que uma data[1]

Assinalar os 50 anos do Centro de Estatística e Aplicações (CEAUL) é celebrar uma história coletiva feita de pessoas, ideias e instituições que foram moldando, ao longo de décadas, a forma como a Estatística se investiga, se ensina e se aplica em Portugal. Os textos que partilhamos neste número do boletim da SPE, escritos por coordenadores do Centro, compõem um mosaico de memórias e de marcos que revelam a identidade do CEAUL: exigência científica, abertura às aplicações, vocação formadora e uma cultura de cooperação dentro e fora do país.

Desde cedo, o CEAUL beneficiou de um ambiente que permitia dinamismo e iniciativa. O financiamento público, então enquadrado por modelos de reporte anual, permitiu diversificar atividades, apoiar investigadores jovens e criar condições para que muitos alcançassem carreiras internacionais. A ligação estreita ao Departamento de Estatística e Investigação Operacional (DEIO, FCUL), com mestrados e doutoramento com especialização em Probabilidades, Estatística e Investigação Operacional, e a proximidade à SPE, nomeadamente no apoio a encontros científicos, ajudaram a afirmar o Centro como polo agregador, acolhendo docentes e investigadores de várias instituições e geografias académicas. Nos seus estatutos iniciais, a SPE indicava o CEAUL como "sede", tendo partilhado o espaço físico até ao presente. Sempre foi estreita também a ligação do CEAUL ao Boletim da SPE - no *Boletim primavera de 2007*, p. 14, pode ler-se: "O número 1 do Boletim Informativo de Estatística e Investigação Operacional foi publicado em Fevereiro de 1979 pelo Centro de Estatística e Aplicações (INIC). Tiago de Oliveira, Fernanda Ramalhoto e Bento Murteira eram os editores". O aprofundar desta relação, bem como uma introdução temporal ao estado da investigação em Portugal e o ponto da situação sobre as origens do CEAUL, está acessível no Prefácio de *Memorial da SPE*, (Ed. SPE, 2005, p. *xviii* e seguintes).

[1] Esta breve nota editorial, deve ser iniciada com palavras de agradecimento aos autores por todos os testemunhos que, sobre o CEAUL, nos oferecem. Os "relatos na primeira pessoa" que o *Boletim SPE primavera de 2026* tem a honra de apresentar, são memoriais que na maqueta inicial desta edição estavam incluídos na secção Episódios na História da Estatística; pois de um acontecimento aniversário se trata – um facto que o tempo elegeu simbolicamente jubilar. No entanto, após o convite editorial para que as páginas do Boletim se associassem à efeméride tivemos a honra de ser prendados com textos de todos os seus líderes viventes que nos legam uma prosa testemunhal escrita "na primeiro pessoa". Para além de uma comemoração aniversária, mais do que um episódio, este trabalho, valorizado ao máximo pelas personalidades intervenientes, passa a ser um acontecimento que envolve toda uma comunidade. São inúmeros os investigadores, de primeira e de segunda geração, que associamos ao citar: Dinis, Paixão, Feridun, Ivette, Isabel ou Antónia – uma "sequência temporal de Ciência Estatística"; originada em Tiago de Oliveira. Na última década, o CEAUL foi liderado por Lisete Sousa e Marília Antunes, atual coordenadora. Temos assim, um jubileu repleto de muita história estatística de uma grande população – é um acontecimento de **SPE e a Comunidade**.

Fernando Rosado

Com o amadurecimento do sistema científico nacional, o contexto mudou: a lógica de financiamento competitivo por projetos ganhou peso e as avaliações tornaram-se parte do quotidiano. Paralelamente, a integração europeia abriu novas oportunidades de mobilidade e colaboração, e o CEAUL soube posicionar-se cedo em parcerias e redes internacionais que deixaram efeitos duradouros.

A projeção externa do Centro tornou-se particularmente visível através de projetos científicos ambiciosos, de uma forte atividade de seminários e formação avançada e da organização de eventos de grande impacto — alguns deles com dimensão europeia e mundial. A afirmação da "Escola de Extremos" em Portugal, a Estatística Ambiental impulsionada pela série de conferências SPRUCE, a atração e integração de cientistas de referência internacional, a cooperação com entidades como o IPQ e a consolidação de pontes com instituições como o INE e o Banco de Portugal, ilustram bem essa capacidade de combinar excelência metodológica com relevância aplicada. Iniciativas editoriais como a REVSTAT reforçam, por sua vez, a contribuição do CEAUL para a visibilidade internacional da Estatística feita em Portugal.

Os testemunhos lembram também uma face menos visível, mas decisiva: a construção institucional. regulamentos internos, modelos de organização por grupos, modernização de práticas e de comunicação e, não raras vezes, o trabalho incansável das equipas administrativas, foram essenciais para sustentar a ambição científica. Mais recentemente, surgem os anos de maior incerteza, em que a pressão burocrática e financeira, as alterações nos *overheads* e avaliações colocaram em causa a estabilidade do Centro. Ainda assim, o CEAUL manteve coesão e qualidade científica, protegendo a formação avançada e a continuidade do trabalho de investigação, mesmo quando o financiamento foi escasso e as condições adversas.

Ao comemorar meio século, estes testemunhos demonstram que o CEAUL é uma instituição que se renovou sem perder o essencial: uma comunidade que forma, publica, debate, organiza, coopera e resiste, sempre com a Estatística no centro e as suas aplicações no horizonte. É esse percurso, feito de continuidade e transformação, que aqui celebramos com orgulho e com sentido de responsabilidade perante o futuro.

Marília Antunes, Coordenadora CEAUL, 2023 -
Lisete Sousa, Coordenadora CEAUL, 2017-22

Na fase inicial o CEAUL era financiado pelo INIC, Instituto Nacional de Investigação Científica, que no início de cada ano transferia para os centros de investigação uma verba, devendo no final de cada ano a direção enviar um relatório de atividades e uma justificação dos gastos.

Quando dirigi o CEAUL, de 1981 a 1987, o facto de o CEAUL ter sido um dos centros que cumpriu esses requisitos deve ter tido alguma influência em ter conseguido um incremento muito substancial na dotação dos anos seguintes, o que permitiu uma grande diversificação de atividades, e o acolhimento de muitos investigadores jovens, que foram devidamente financiados para lançarem as suas carreiras internacionais.

A forte ligação do CEAUL ao DEIO, que tinha lançado mestrados em Estatística e Investigação Operacional, e cujos doutorados regressados do estrangeiro por volta de 1980 orientaram doutoramentos de outras instituições, e também a ligação à SPE, apoiando em particular os seus congressos, então anuais, levaram a que ingressassem no CEAUL investigadores de outras instituições, como as Universidades do Minho, de Aveiro, da Beira Interior, e Institutos Politécnicos.

De facto, nessa fase reitores e conselhos diretivos ainda não tinham descoberto forma de se apoderarem da gestão desses financiamentos, e só mais tarde muitos bons investigadores tiveram de sair do CEAUL, por exigência desses órgãos administrativos, para integrar centros mistos de Matemática de outras instituições.

Olhando para trás, sinto-me privilegiado por ter tido a oportunidade de apoiar a investigação em Estatística, sem grandes burrocracias, sem fundações a cobrarem overheads, sem instituições a exigirem que os seus investigadores saíssem do CEAUL. No *Memorial da Sociedade Portuguesa de Estatística* editado pelo Fernando Rosado, o trabalho da Maria Antónia Turkman sobre os doutoramentos em Estatística demonstra bem a importância do CEAUL como instituição incentivadora de carreiras.

Dinis Pestana
Coordenador CEAUL, 1981-87

No quinquénio de 1987 a 1992, exerci as funções de Secretário do CEAUL. Embora estas fossem, pela própria natureza do cargo, essencialmente administrativas e de gestão, o contexto da época justificou uma abordagem mais proativa e interventiva.

Naquele período, o CEAUL vivia uma fase de reforço da qualificação dos seus membros, fruto do dinamismo de vários doutorados que haviam regressado do estrangeiro nos anos anteriores. Esses docentes impulsionaram de forma decisiva a formação avançada no DEIO, através da orientação científica de numerosos doutoramentos e da criação de mestrados de referência nas áreas de Probabilidades, Estatística e Investigação Operacional.

O CEAUL afirmava-se também como um polo agregador de docentes de várias universidades que procuravam progredir nas suas carreiras académicas. Destacava-se, assim, uma intensa dinâmica interna, refletida num notável ritmo de publicações, seminários e participações em conferências científicas, tanto nacionais como internacionais.

A 1.ª Conferência em Estatística e Otimização, organizada pelo CEAUL em colaboração com o DEIOC/FCUL, foi um marco ilustrativo do papel relevante que o Centro desempenhava desde a sua criação, em 1975, ainda no âmbito Instituto de Alta Cultura. O encontro, realizado em Tróia no início de dezembro de 1990, contou com mais de uma centena de participantes e várias dezenas de comunicações apresentadas.

O contexto nacional da década de 1980 foi igualmente determinante. Nesses anos, a JNICT consolidou-se como o principal organismo responsável pelo planeamento e financiamento da ciência em Portugal. Embora essa competência lhe tivesse sido atribuída desde a sua criação, em 1967, só nos anos 80 a JNICT ganhou peso face ao INIC, assumindo um papel central na definição da política científica nacional e promovendo concursos programáticos numa lógica de financiamento competitivo. Num cenário em que as verbas provenientes do INIC se revelavam insuficientes — sobretudo para a aquisição de equipamento informático —, o apoio adicional obtido junto da JNICT revelou-se essencial para o desenvolvimento da linha de ação do CEAUL em Otimização e Aplicações.

A adesão de Portugal à CEE precursora da União Europeia trouxe, por sua vez, novas oportunidades e desafios. O programa ERASMUS, lançado em 1987 com a participação de onze países, entre os quais Portugal, possibilitou o estabelecimento de uma parceria estratégica com a Universidade de Roterdão. O CEAUL/DEIO participou desde o início, conseguindo a atribuição de duas bolsas para estudantes de mestrado — num universo de pouco mais de vinte bolsas atribuídas a nível nacional. À luz dos números atuais, pode parecer um resultado modesto, mas a história posterior demonstrou a importância estratégica desse posicionamento em 1987.

Termino afirmando que foi um privilégio exercer as funções de Secretário do CEAUL. É motivo de grande satisfação ver o Centro continuar ativo e reconhecido, com sucessivos coordenadores que souberam renovar a instituição sem que esta perdesse a sua identidade original. Acredito que todos os que desempenharam funções de Secretário, Diretor ou Coordenador partilham o mesmo orgulho pelas várias gerações de investigadores formados no CEAUL, que têm mantido uma presença destacada na

liderança de projetos científicos, no ensino de excelência e na representação de Portugal em redes internacionais.

José Manuel Pinto Paixão
Coordenador CEAUL, 1987-92

Fui coordenador do CEAUL entre 1992 e 1999. Tentando lembrar o que foram esses anos como coordenador de uma unidade de investigação, posso dizer que, comparados com os que se passa actualmente, foram muito mais simples e pacatos. Começaram a surgir mudanças no modo como os centros eram geridos e financiados. O Instituto Nacional de Investigação Científica (INIC) que geria os centros de investigação a par da Junta Nacional de Investigação Científica (JNICT), foi extinto em 1992, tendo a JNICT passado a ter a exclusividade dessa responsabilidade até 1997, quando foi extinto, para dar lugar à FCT. Mesmo com todas estas mudanças em cena, nunca houve ansiedade relativamente à existência de financiamento, embora tenha havido a necessidade de concorrer ao mesmo através de projectos. Com efeito, o financiamento através de concursos também começou nessa época tendo os projectos, a que o centro concorreu, Statistical Modelling 2/2.1/MAT/429/94 e MODEST 1996-1999 sido financiados pelo PRAXIS XXI e FEDER. Ocentro foi também avaliado pela primeira vez, se não me engano em 1996. Uma questão importante que surgiu durante a minha vigência foi o modo como deveria ser feita a distribuição dos fundos pelos membros de um modo justo e equitativo. Foi assim que surgiu o planeamento, que vigorou até recentemente, da divisão das verbas por grupos de investigação, sendo da responsabilidade do coordenador do grupo pela distribuição das verbas atribuídas. Sempre houve um apoio excelente da parte das secretárias Maria da Graça Santos e posteriormente Margarida Silva.

Não quero deixar de terminar este curto texto sem apresentar o meu apreço e simpatia pelos actuais dirigentes do CEAUL que têm de trabalhar com tantas condições adversas e incertas.

Kamil Feridun Turkman
Coordenador CEAUL, 1992-99

Fui Coordenadora (na altura Diretora) do CEAUL (*Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa*) entre 1999 e 2006, e tentei durante esse período dinamizar todos os investigadores do CEAUL em diversos projetos de investigação conjuntos. Começo por relembrar unicamente alguns desses projetos, em que também participei, e que foram financiados pela *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* (FCT): projetos VELA (*Valores Extremos e Leis Aditivas*) e MECAES (*Modelos Estocáticos em Ambiente, Ecologia e Saúde*), como subprojetos do projeto MODEST (*Modelação Estatística*) (1997-2000); projeto VEXTRA (*Valores Extremos e Técnicas de Re-Amostragem*) (2000-2003); projeto ERSE (*Extremes, Risk, Safety and the Environment*) (2005-2009). Mas em vigência neste período, e com base no ficheiro acessível em http://ceaul.org/wp-content/uploads/2018/10/Projetos_CEAUL.pdf, contabilizei 19 projetos, 8 dos quais financiados pela FCT.

Menciono cronologicamente os eventos seguintes:

1) O Projeto VELA permitiu a realização, em 1999, do *Workshop on Statistical Modelling – Extreme Values and Additive Laws*, Lisboa (Estoril), entre 2 e 6 de Outubro. Gostaria ainda de registar que Laurens de Haan, um dos gigantes da área de Extremos, veio trabalhar para Portugal em 1999, inserindo-se no CEAUL. Face à elevada cooperação científica entre Laurens e membros da comunidade Estatística em Portugal, o DEIO (*Departamento de Estatística e Investigação Operacional*) propôs que lhe fosse concedido, em 2000, o título de '*Doutor Honoris Causa'* da ULisboa.

2) A colaboração do CEAUL com o *Instituto Português da Qualidade* (IPQ) começou em 1999, tendo na altura tido papel de relevo em '*The Euro Conference on Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology* (AMCTM 2000)', que teve continuidade em 2004, no I *Congresso Português de Metrologia e no* 1º *Encontro Nacional da SPMet* (*Sociedade Portuguesa de Metrologia*): *Validação de Métodos de Medição e de Software nos Laboratórios*, com continuidade até 2025.

3) Também não posso deixar de referir o papel do CEAUL na organização do 23rd *European Meeting of Statisticians*, no Funchal, Madeira, de 13 a 19 de Agosto de 2001, e que foi sem dúvida o embrião para o lançamento da *Revstat—Statistical Journal*, revista da qual fui Editora-Chefe desde 2003 até 2018.

4) Em 2003, e no âmbito do Projeto VEXTRA, foi realizado o '*Workshop on Extremes, Risk and Resampling Techniques'*, que decorreu em Tomar, de 20 a 23 de Novembro.

5) Em 2004, o CEAUL, em colaboração com a Universidade de Aveiro, participou na organização do *3rd International Symposium on Extreme Value Analysis — Theory and Practice*.

6) O I *Workshop on Statistics, Mathematics and Computation,* em estreita colaboração entre o CEAUL e a Universidade Aberta, começou também neste período, ou mais precisamente, em 2005.

E os meus três trabalhos com maior número de citações são também neste período: 2002 (em co-autoria com M João Martins), 2003 (em co-autoria com Isabel Fraga Alves e Laurens de Haan) e em 2005 (em co-autoria com Frederico Caeiro e Dinis Pestana).

Atrevo-me a dizer que este foi um período áureo para o reconhecimento da Escola de Extremos em Portugal e mais geralmente da Estatística em Portugal, uma vez que a Universidade de Lisboa e o CEAUL foram escolhidos, em 2005, como anfitriões do '56th *World Statistics Congress* (WSC) *of the International Statistical Institute* (ISI)'. O ISI WSC 2007, com mais de 2000 participantes, decorreu em Lisboa, de 22 a 29 de Agosto, já durante a Direção da Isabel Fraga Alves. Existiu então uma forte cooperação entre o CEAUL, o Banco de Portugal e o INE (*Instituto Nacional de Estatística*), que se tem mantido até à data presente.

Maria Ivette Gomes
Coordenadora CEAUL, 1999-2006

A minha eleição como Coordenadora do CEAUL para o período de 2006-2009 suscitou-me simultaneamente dois sentimentos: por um lado, encarei esse desafio com muito entusiasmo e desejo de trabalhar; por outro lado, sabia que as precedentes coordenações tinham deixado uma marca indelével no CEAUL, desde a sua criação. A estas estavam associados grandes nomes, como os incontornáveis professores catedráticos Tiago de Oliveira, Dinis Pestana, Pinto Paixão, Feridun Turkman e a minha preciosa mentora Ivette Gomes. À data, eu ocupava ainda a posição de Professora Associada c/ Agreg, o que representava uma estreia na coordenação do Centro. Devo confessar o meu receio de que isso pudesse tornar desconfortável a gestão do cargo de coordenação dos quatro Grupos de Investigação em que estava sistematizado o Centro, liderados pelos Professores Ivette Gomes, Dinis Pestana, Antónia Turkman e Helena Nicolau. No entanto, julgo que respondi ao desafio com empenho e com o sentimento de dever cumprido.

Tendo iniciado funções em meados de 2006, abarquei a coordenação final do *Programa Plurianual de Financiamento de Unidades de I&D da FCT*, inicialmente para o período 2003-2005, estendido *a posteriori* para fim de 2006, e com a sua execução prorrogada depois para 31 de Março de 2007, solicitado por mim em carta enviada ao então presidente da FCT, Prof. João Sentieiro. A avaliação 2003-

2006, levada a cabo pelo Painel da FCT para o efeito, com visita apenas em Fev2008, coordenado por Irene Fonseca (CMU, USA) e do qual apenas constava um especialista na área específica da Estatística, Richard Smith (UNC Chapel Hill, USA), levou à classificação de *Very Good* (apenas comunicada em Dezembro de 2008), tal como nos períodos precedentes. Acerca deste período veja-se também o *Boletim da SPE da Primavera 2009* aqui.

Da candidatura ao *Financiamento do Plurianual* 2007-2010, que integrou 39 Investigadores Integrados, constaram os subprojectos:

- *Exploratory Data Analysis, Order statistics, Outliers and Extremes* (Order statistics and Extremes). PI: Prof. Ivette Gomes
- *Count Data, Random Sums and Analytical Methods in Statistical Modelling of the Real World* (Modelling the Real World). PI: Prof. Dinis Pestana
- *Modelling Environmental and Biological Data* (MEBIDA). PI: Prof. M. Antónia Amaral-Turkman
- *Multivariate Data Analysis: Statistical Modelling, Classification and Data Mining Behavioural Sciences, Education and Biomedicine* (Multivariate Data Analysis). PI: Prof. Helena Bacelar-Nicolau.

Em 2009, quando me retirei do cargo, integravam o CEAUL 15 membros da FCUL e 30 fora da Faculdade. Desses 45 membros integrados, 9 possuíam Agregação e os restantes Doutoramento.

Ao longo do meu período de coordenação muitos foram os eventos em que o CEAUL esteve envolvido. Aqui menciono apenas alguns:

- *SEER2007 - Statistical Extremes and Environmental Risk*, FCUL, Fevereiro 2007.
- *Workshop on Statistics in Genomics and Proteomics - WSGP Follow-up Meeting*, Março 2007.
- *SETA 2009 - Spatial Extremes, Theory and Applications*, Lisbon, Abril 2009.
- *ICSMRA2007 - International Conference on Statistical Methods for Risk Analysis, Satellite Conference to the 56th Session of the ISI*, FMUL, Agosto 2007.
- Outro grande projeto em que o CEAUL esteve envolvido, com destaque para a Prof Ivette Gomes, foi a organização da maior Conferência Estatística Internacional – *56th Session ISI (International Statistical Institute),* com cooperação também de INE, SPE, CLAD, Lisbon, em Julho 2007; contou com 2,595 participantes de mais de 120 países.
- Mais de 30 Seminários regulares realizados no DEIO-FCUL, e vários Mini-Cursos temáticos.

Em termos de gestão interna, e preocupada com o enquadramento legal, como no caso de outros Centros de Investigação à época, empenhei-me na elaboração do primeiro *Regulamento Interno do CEAUL*, com texto aprovado em *Conselho Científico do CEAUL* em 25 de Junho 2007.

Em 2009, a ligação entre o CEAUL e a sua *Instituição de Acolhimento FCUL* viu a sua relação abrangida nos Artigos 10º e 32º dos *Estatutos da FCUL* (Despacho n.º 4642/2009, DR 7 Fev2009), nomeadamente contemplando com assento no Conselho Científico da FCUL, *10 representantes das Unidades I&D*, com vínculo à Faculdade ou à Universidade.

Foi ainda um tempo de modernização do antigo *Website* e do *logotipo* do CEAUL, sem dúvida muito arcaicos quando comparados com os actuais (ver aqui).

Não posso deixar de referir que no período da minha Coordenação do CEAUL era *Ministro da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior*, de 2005 a 2011, Mariano Gago (1948-2015), um grande impulsionador da Ciência em Portugal.

Maria Isabel Fraga Alves
Coordenadora CEAUL, 2006-09

Quando me foi solicitado para que escrevesse umas linhas sobre a minha experiência enquanto coordenadora do CEAUL, que iniciei em Agosto de 2009, fui fazer uma pesquisa de documentos num disco externo em que, entre muitos, se encontravam os coligidos diligentemente pela coordenadora que me antecedeu, a Isabel Fraga Alves, para me ajudar na tarefa que iria iniciar. Entre o manancial de informação que lá encontrei, estava um *powerpoint* da Isabel Fraga Alves relativa a uma reunião de Março de 2009, onde era dada informação sobre o financiamento base atribuído ao centro, após a avaliação que tinha decorrido em 2007. O CEAUL tinha nessa altura 43 investigadores integrados e o financiamento base anual atribuído de €177.375,00. Estavam a começar momentos difíceis, agravados pelo facto de a própria Fundação da Faculdade de Ciências ter tomado a decisão de aumentar a percentagem para gastos gerais de 4% para 20%. E por que razão refiro isto como ponto de partida? É que quando penso nos meus tempos de coordenadora, o que me vem à cabeça não é a parte científica, mas sim a constante preocupação com o financiamento, a escrita de relatórios, de projectos estratégicos, a premência de candidaturas a projectos, reuniões, o trabalho burocrático (pese sempre a enorme ajuda dada pela muito estimada secretária Margarida Silva), e todas as preocupações e sobressaltos que encontrei pelo caminho.

A minha primeira difícil e incómoda tarefa foi a da decisão tomada em Comissão Científica em Fevereiro de 2010, da reorganização das linhas de investigação, já acordada em Março de 2009, como consequência do relatório do painel de avaliação e apoiada pela comissão de aconselhamento do CEAUL. Mas essa reorganização veio a tornar-se benéfica, com grupos coesos cientificamente e dedicados a áreas de actuação bem definidas. Dado o atraso verificado na avaliação das unidades de investigação, houve necessidade de, em 2011, escrever um projecto estratégico por dois anos. Nessa altura o projecto contava com 53 membros integrados e 49 colaboradores, entre os quais 22 eram alunos de doutoramento. O financiamento pelos dois anos foi de €386.058,00 (que acabou por ser para três em vez de dois anos). O relatório desse projecto estratégico dava conta da publicação de 51 capítulos de livros, 99 artigos em revistas internacionais, 239 comunicações em congressos internacionais, 59 organizações de seminários e conferências, 12 teses de doutoramento concluídas e 31 teses de mestrado. Estávamos conscientes de que a avaliação prevista para 2013 não iria ser difícil, que quando muito manteríamos a nossa classificação de Muito Bom. Contudo, o processo de avaliação em 2013 foi tudo menos fácil. Em 2012 aceitei continuar a coordenar o centro por mais um triénio já que se avizinhava uma nova avaliação. Para explicar o que foi o ano de 2013, Ano Internacional da Estatística, com a preparação de vários eventos programados para esse ano, reuniões e discussões para a preparação do projecto estratégico e sua redacção, que culminou com a entrega em Dezembro desse ano, precisaria de várias páginas. O painel de avaliação que em 2014 atribuiu ao CEAUL uma classificação de Bom, foi em tudo mais que injusta e inesperada, uma vez que as classificações atribuídas inicialmente pelos especialistas eram de 16,17 e 18 e nada havia no relatório de avaliação do painel que assim o justificasse. A notícia deixou-me extremamente abalada (o financiamento anual seria de €5000!). Tinha em cima de mim a responsabilidade de muitos investigadores e alunos de doutoramento, que confiaram em mim e que contavam com o CEAUL para financiar a investigação. Não foi fácil, mas com o apoio do Feridun levantei a cabeça e acreditei que seríamos capazes de lutar para contestar a classificação e obter financiamento para o centro. Foi na realidade uma luta esgotante, mas que culminou em 2015 com uma nova reavaliação, com a atribuição da classificação de Muito Bom e um modesto financiamento concedido até final de 2017 de €231,360. A não existência de financiamento adequado durante esses difíceis anos não se reflectiu na qualidade da investigação em termos de publicações em revistas

científicas internacionais, mas apenas na grande redução em participação em eventos científicos fora do País. Os membros do CEAUL tiveram sempre a cabeça erguida, continuaram coesos e mantiveram sempre a sua dedicação ao CEAUL. Deixei a coordenação do CEAUL no fim de 2016, tendo-a "entregue" a uma excelente equipa de gente mais nova e dinâmica coordenada pela Lisete Sousa.

Maria Antónia Amaral Turkman
Coordenadora CEAUL, 2009-16

Crescimento Estocástico – um Grupo de Investigação nascido em Évora

Carlos A. Braumann, braumann@uevora.pt

Universidade de Évora, Escola de Ciências e Tecnologia, Departamento de Matemática
Universidade de Évora, Centro de Investigação em Matemática e Aplicações

1. Introdução e apresentação do grupo da Bioeconomia do Crescimento Estocástico

A Universidade de Évora, no seu Departamento de Matemática e no seu Centro de Investigação em Matemática e Aplicações – CIMA, sempre deu grande importância às aplicações em Ciências da Vida, quer na área dos sistemas dinâmicos, quer das probabilidades e processos estocásticos, quer naturalmente da Estatística. No artigo de divulgação de Braumann e Alpízar-Jara 2009 no Boletim da SPE sobre o CIMA pode reconhecer-se a relevância destas aplicações, que se reforçou com a posterior reorganização do CIMA, as pontes com outros departamentos e centros de investigação, a forte ligação à comunidade envolvente, bem como com projetos de investigação e desenvolvimento e seu consequente impacto económico. Os mestrados na área da Matemática e da Estatística e o abrangente programa de doutoramento em Matemática têm permitido atrair estudantes para estas áreas. A interação dinâmica entre a teoria e as aplicações tem-se revelado um fator estruturante e impulsionador de avanços significativos em ambas as dimensões.

Hoje, correspondendo com muita gratidão ao convite do nosso Colega e Editor Professor Fernando Rosado, queria focar-me no Tema Central deste número do Boletim da SPE, dando uma ideia da contribuição de um grupo português, "nascido" na Universidade de Évora, para a Bioeconomia no Crescimento Estocástico usando modelos de equações diferenciais estocásticas – EDE. Estas equações nasceram com Uhlenbeck e Ornstein 1930 antes sequer de qualquer teoria subjacente e podem ser hoje estudadas em muitos livros como, só para citar alguns, Arnold 1974, Braumann 2005a (minicurso SPE) e 2019, Ito 1951, Karlin e Taylor 1981.

Cada artigo de divulgação que encontram neste número do Boletim SPE é da autoria de Colegas do grupo e procura dar a visão dos autores sobre os contributos do grupo num tópico em que têm dado contributos relevantes. Esses tópicos não dão, nem de longe, um retrato exaustivo do trabalho do grupo, procurando apenas proporcionar ao leitor interessado uma pequena amostra desse trabalho.

O grupo, que tem consistentemente trabalhado no Crescimento Estocástico de seres vivos e suas implicações económicas, começou comigo, que nisso trabalho há quase cinco décadas. Juntaram-se, já no século XXI, os Colegas Patrícia A. Filipe, Clara Carlos e Nuno M. Brites, cujas teses de doutoramento (e, no caso dos dois últimos, também dissertações de mestrado) orientei na Universidade de Évora com conclusão em 2011, 2013 e 2017, respetivamente. Hoje estão espalhados, respetivamente, pelo ISCTE, o Instituto Politécnico de Setúbal e o ISEG. Ao grupo juntou-se depois o Colega Gonçalo Jacinto, com um doutoramento de 2011 em processos estocásticos em telecomunicações orientado pelo Colega António Pacheco Pires; ele estava então na Universidade de Évora e está hoje na Universidade do Algarve. Que felicidade ter sido possível congregar esforços de tão notáveis Colegas! Esforços que se

reproduziram cientificamente, tendo-se depois juntado ao grupo um jovem doutorado na Universidade de Évora, Nelson T. Jamba, que foi orientado por Patrícia A. Filipe e Gonçalo Jacinto e está agora na Faculdade de Ciências Naturais da Universidade do Namibe em Angola. Todos estiveram ligados ao CIMA, ligação que quase todos ainda mantêm.

Como é natural, individualmente e em colaboração com colegas, tenho trabalhado e orientado pós-doutoramentos, doutoramentos e mestrados em áreas diversas de estatística e processos estocásticos, mas foi na área das EDE e suas aplicações (no crescimento estocástico e noutras aplicações) que desenvolvi a minha atividade principal. É uma área fascinante que envolve diversos ramos da Matemática, conjugando os sistemas dinâmicos, as probabilidades, os processos estocásticos e os métodos estatísticos, bem como um conhecimento razoável das áreas de aplicação. É por isso difícil em termos de atração de estudantes, dado o investimento inicial necessário, mas, vencido este, é altamente estimulante e compensadora.

Daí que, apesar da divulgação que procurei dar a estas matérias em diversos fóruns nacionais (exemplo: Braumann 2008 no Boletim SPE) e internacionais e que terá certamente contribuído para atrair o interesse por estas matérias, foi com a criação na Universidade de Évora de mestrados na área da Matemática em 1995/96 e principalmente com a criação do programa de doutoramento em Matemática em 2007/08 que tive a oportunidade de orientar dissertações de mestrado e teses de doutoramento em EDE e aplicações biológicas e bioeconómicas, ainda que tenha também tido orientações e coorientações em Matemática Financeira e noutras áreas.

A título de curiosidade, refiro que, entre as referidas aplicações biológicas e bioeconómicas não visadas neste número do Boletim SPE se incluem aplicações demográficas, tendo orientado ou coorientado na Universidade de Évora teses onde se estudou a influência das flutuações de natureza ambiental nas taxas de mortalidade por sexo/idade da população humana, influência geralmente ignorada mas com sérias implicações em seguros, pensões e planos de poupança-reforma. Para os interessados no tema sugerimos a leitura de: Bravo e Braumann 2007, Lagarto 2013, Lagarto e Braumann 2013, Lagarto, Gomes e Braumann 2013, dos Santos Baptista e Brites 2023 e dos Santos Baptista, Brites e Reis 2025.

2. Como tudo nasceu: o crescimento populacional em ambiente aleatório

Estava na State University of New York at Stony Brook a fazer, sob a orientação de Lev R. Ginzburg, o doutoramento com uma bolsa do então INIC quando "tropecei", por mero acaso, nos artigos pioneiros que utilizaram equações diferenciais estocásticas (já muito antes utilizadas em Física e em Finanças) para modelar o crescimento populacional em ambiente aleatório. Refiro-me a primeiras abordagens usando variantes estocásticas de modelos determinísticos muito particulares (como o logístico), designadamente os artigos de Levins 1969 e de Capocelli e Ricciardi 1974, bem como, mais tarde e no caso de populações sujeitas a capturas (por pesca, caça ou florestação), o artigo de Beddington e May 1977. Nem sabia o que eram EDE mas tinha sido "caçado" e valeu-me, entre outras leituras, o livro do Arnold 1974. Estava escolhida a área da minha tese, Braumann 1979, e de grande parte do meu trabalho de investigação nos anos que se seguiram, procurando desenvolver novos caminhos a partir daqueles artigos inspiradores. Mais tarde, já em pleno século XXI, para além do crescimento populacional, vim a interessar-me pelas aplicações ao crescimento individual, do que falarei adiante.

O crescimento de populações de seres vivos era tradicionalmente modelado por *equações diferenciais ordinárias* – EDO (eventualmente por equações diferenciais parciais se a dispersão espacial da população fosse fator relevante). Para simplificar, vamos considerar apenas uma população de tamanho $X(t)$ no instante t. A sua taxa de crescimento *per capita*, abreviadamente *taxa de crescimento* (diferença entre taxa de natalidade e taxa de mortalidade), $\frac{1}{X(t)}\frac{d\,X(t)}{d\,t}$, seria constante num modelo malthusiano de abundância de recursos mas, mais geralmente, com recursos limitados (e supondo ausência de efeitos de Allee), será uma função f decrescente com o tamanho da população e negativa para tamanhos

suficientemente elevados. Temos um modelo geral $\frac{1}{X(t)}\frac{d\,X(t)}{d\,t} = f\big(X(t)\big)$ e diversas funções particulares f têm sido propostas para descrever diferentes tipos de população, sendo muito popular o modelo logístico ou de Verhulst em que f é linear, ou seja $\frac{1}{X(t)}\frac{d\,X(t)}{d\,t} = r\left(1-\frac{X(t)}{K}\right)$, sendo $r>0$ a taxa intrínseca de crescimento e $K>0$ um equilíbrio estável denominado capacidade de sustento do meio. Mas as condições ambientais que afetam as taxas de natalidade e mortalidade, sejam as de natureza interna à própria população, sejam as do meio físico e biológico envolvente, estão sujeitas a flutuações aleatórias de natureza imprevisível que, em muitos casos, não podem ser ignoradas refugiando-nos na ideia de que o comportamento determinístico resultante da EDO é uma boa aproximação. Nesses casos, temos mesmo de incluir o "acaso" (cá está ele de novo!) na equação, representando agora f uma "taxa média de crescimento", mas desviando-se a taxa efetiva dessa média por um ruído. O ruído pode ser aproximado por um ruído branco padrão $\varepsilon(t,\omega)$ multiplicado por uma intensidade $\sigma>0$, onde $\omega\,\epsilon\,\Omega$ representa o estado do ambiente ao longo da vida da população "escolhido" pela natureza entre todos os possíveis estados Ω, onde introduzimos uma estrutura de espaço de probabilidade completo $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Notando que a solução é agora um processo estocástico $X(t,\omega)$ que depende do estado ambiental ω, obtemos a EDE $\frac{1}{X(t,\omega)}\frac{d\,X(t,\omega)}{d\,t} = f\big(X(t,\omega)\big)+\sigma\varepsilon(t,\omega)$. Podemos escrevê-la na notação habitual $dX(t) = f\big(X(t)\big)X(t)\,dt+\sigma X(t)\,dW(t)$, seguindo a regra comum de não explicitar a dependência do acaso ω e sendo $W(t)=W(t,\omega)=\int_0^t \varepsilon(s,\omega)\,ds$ o *processo de Wiener padrão* ou *movimento browniano*, um processo estocástico de trajetórias q.c. contínuas mas q.c. de variação ilimitada. A solução $X(t)=X(t,\omega)$ da EDE com condição inicial $X(0)=x>0$ é a solução da equação integral estocástica $X(t)=x+\int_0^t f\big(X(s)\big)X(s)\,ds+\int_0^t \sigma X(s)\,dW(s)$. Dada a irregularidade das trajetórias do processo de Wiener, o segundo integral pode ter diferentes definições, sendo as mais utilizadas o *integral de Itô* (Itô 1951), que tem boas propriedades probabilística mas não segue as regras usuais de cálculo (segue o cálculo de Itô), e o *integral de Stratonovich* (Stratonovich 1966), que segue as regras usuais. Para detalhes técnicos sobre as EDE e os cálculos estocásticos pode ver-se Braumann 2018 no Boletim SPE, sendo também interessante ler os outros trabalhos desse Boletim sobre variadas áreas de aplicação das EDE.

Uma grande preocupação foi a de obter propriedades qualitativas dos modelos em termos de extinção "matemática" da população ($X(t)$ a convergir para 0 quando $t\to+\infty$) ou de existência de um equilíbrio estocástico sem extinção "matemática" (ergodicidade com a distribuição de probabilidade de $X(t)$ a convergir para uma distribuição de probabilidade de equilíbrio quando $t\to+\infty$ e obtenção da f.d.p. estacionária a partir das equações de Kolmogorov). Havendo variados modelos propostos com diversas expressões particulares da função f e desconhecendo o modelo seguido pela natureza, preocupámo-nos em que as propriedades fossem de natureza biológica, ou seja robustas relativamente à escolha do modelo, pelo que demonstrámos os nossos resultados para funções f arbitrárias satisfazendo apenas propriedades ditadas pela Biologia e algumas muito moderadas condições de regularidade. Veja-se, para intensidades de ruído σ constantes, Braumann 1979, 1981a,1999b, 2008b, 2019, 2021, e, para uma generalização a intensidades variáveis $\sigma(X)$ suficientemente regulares, Braumann 2001cd, 2007d, 2008a, 2021. Isso não impede que, especialmente em aplicações que envolvam estimação de parâmetros e previsão ou comparações e cálculos numéricos, trabalhemos com modelos particulares da função f, como o modelo logístico ou o de Gompertz.

Outra grande preocupação teve a ver com a definição do integral estocástico com respeito ao processo de Wiener, a de Itô geralmente utilizada e que trabalha com o cálculo de Itô ou, como era aconselhado por alguns autores, a de Stratonovich, que segue as regras usuais de cálculo. De facto, tinha-se gerado uma grande controvérsia na literatura sobre o cálculo mais adequado para descrever o crescimento de populações em ambiente aleatório, de que falo em Braumann 2018 e que o leitor interessado pode consultar, por exemplo, em Feldman e Roughgarden 1975, May e MacArthur 1972, May 1973ab e Turelli 1978. Sucedia que os resultados qualitativos do "mesmo" modelo diferiam entre os dois cálculos,

podendo até, para certos valores dos parâmetros, o uso do cálculo de Itô concluir pela extinção da população, enquanto o cálculo de Stratonovich concluía, pelo contrário, pela sua não-extinção e crescimento sem limites. Isto para não falar da teoria sobre limitações da semelhança dos nichos ecológicos em espécies competidoras, que aparentemente funcionava com o cálculo de Itô mas não com o de Stratonovich. Demonstrei que a controvérsia se devia a uma confusão meramente semântica sobre o significado da "taxa média de crescimento" f; veja-se Braumann 1979, 1983ab, 2005a, 2007abc, 2008ab, 2018, 2019, 2021. Se formos ver o significado físico (neste caso biológico) da chamada "taxa média de crescimento" que aparece no termo de tendência da EDE, acima designada por f, ela significa de facto a *taxa média aritmética de crescimento* quando usamos o cálculo de Itô. Mas, se usarmos o cálculo de Stratonovich, provei que ela representa uma taxa média geralmente diferente que, no caso particular dos modelos de aleatoriedade ambiental, é a *taxa média geométrica de crescimento*. Em qualquer caso, provei que, considerando a diferença entre as médias nos dois cálculos, ambos os cálculos dão exatamente os mesmos resultados, quer qualitativos quer quantitativos. No seu texto neste Boletim sobre aleatoriedade ambiental, Clara Carlos preferiu usar o cálculo de Stratonovich e designou, para evitar tal confusão entre médias, a taxa média geométrica por g, que é dada por $g(X) = f(X) - \sigma^2/2$. A inútil controvérsia resultou de se ter falado sempre de "taxa média" sem qualificar o tipo de média, ignorando o seu diferente significado físico. Daí a importância de, nos nossos modelos, termos sempre o cuidado de não desligar a Matemática da realidade, isto é, de reconhecer em termos físicos/biológicos o significado real das variáveis que usamos.

3. O estudo consolidado do crescimento populacional em ambiente aleatório

Para além dos aspetos fundamentais tratados na Secção 2, o crescimento populacional em ambiente aleatório requeria o estudo de aspetos específicos extremamente importantes para uma efetiva utilização dos modelos desenvolvidos, estudo consolidado que o nosso grupo promoveu e desenvolveu ao longo dos anos.

As questões estatísticas de escolha do modelo, estimação de parâmetros e previsão foram tratadas em Braumann 1979, 1983b, 1985, 1986, 1987b, 1988, 1991, 1993bc, 1994a, 1996ab, 1997a, 1999cde, 2004a, 2019. As consequências de uma incorreta especificação do modelo foram estudadas em Carlos 2013, 2018 e Carlos e Braumann 2014.

Outra questão importante tem a ver com populações sujeitas a efeitos de Allee, descritos em Allee *et al.* 1949 e tratados em termos de modelos estocásticos muito particulares pela primeira vez por Dennis 1989 e 2002. Em certas populações, quando o seu tamanho é pequeno e se esperava portanto uma elevada taxa de crescimento *per capita* devido ao elevado volume de recursos disponíveis para a sobrevivência e reprodução de cada indivíduo, verifica-se uma depressão dessa taxa de crescimento relativamente ao esperado. O trabalho de Clara Carlos neste Boletim indica algumas das possíveis causas. Modelos estocásticos com efeitos de Allee, quer gerais quer particulares, como o modelo logístico estocástico com efeitos de Allee, foram estudados em Braumann e Carlos 2013, 2015 e Carlos e Braumann 2017.

Para os modelos estocásticos gerais de aleatoriedade ambiental, quer com quer sem efeitos de Allee, pudemos provar que a condição de a taxa média geométrica de crescimento *per capita* ser positiva para populações pequenas é suficiente para evitar a extinção "matemática" e garantir a existência de um equilíbrio estocástico com densidade estacionária. Mas, quer nestes modelos, quer nos modelos determinísticos de EDO, o facto de o tamanho da população não tender para zero quando $t \to +\infty$ não é exatamente sinónimo de não-extinção no sentido biológico. O que significaria termos a certa altura uma população de 0,4 indivíduos? O facto de nas EDO e nas EDE trabalharmos com um espaço de estados contínuo $[0, +\infty[$ permite a tratabilidade dos modelos mas, sendo geralmente uma boa aproximação, não o é quando a população é pequena. Mais ainda, ignora a aleatoriedade demográfica, que sendo geralmente secundária perante a aleatoriedade ambiental, se torna dominante para pequenas populações e é melhor tratada com processos de nascimento e morte, com espaço de estados discreto

{0, 1, 2, …}. Enquanto a aleatoriedade ambiental traduz o efeito das flutuações aleatórias do ambiente na taxa de crescimento, isto é, provoca flutuações aleatórias nas **probabilidades** de nascer e de morrer, a aleatoriedade demográfica refere-se às variações amostrais que afetam as **frequências observadas** de nascimentos e mortes, as quais ocorrem mesmo quando o ambiente e as probabilidades de nascer e morrer são perfeitamente determinísticos (Braumann 2010). Não entrando no extremamente complexo estudo combinado das duas aleatoriedades, estabelecemos antes um limiar de extinção "realista" $q > 0$, tipicamente bastante inferior à população inicial, abaixo do qual a aleatoriedade demográfica prevaleceria e conduziria quase inevitavelmente a uma extinção efetiva. Mostrámos que, mesmo quando a aleatoriedade ambiental conduzia a um equilíbrio estocástico sem extinção matemática, a extinção "realista" ocorria com probabilidade um, sendo a questão relevante se se tratava de uma extinção rápida ou lenta.

Para isso obtivemos expressões gerais para a média e a variância do tempo de extinção T_q (tempo de primeira passagem pelo limiar de extinção "realista"), que particularizámos para modelos estocásticos específicos como o logístico, o de Gompertz e o logístico com efeitos de Allee. Verificámos que esses momentos de T_q, exceto para populações iniciais muito próximas do limiar de extinção q, pouco dependiam do valor de q. Tínhamos assim uma boa medida do risco de extinção, verificando-se que, conforme os valores dos parâmetros, a extinção tanto podia levar poucas gerações como demorar mais do que o tempo de vida do Universo. Tínhamos assim também um outro meio de aferir o impacto dos efeitos de Allee. Naturalmente, também olhámos para os tempos de primeira passagem por limiares superiores à população inicial, com importância para a recuperação de populações em risco, a deterioração de alimentos por fungos ou bactérias, ou para o impacto de pragas agrícolas. Os resultados desse nosso trabalho podem ver-se em Braumann 1983b, 1984, 1987a, 1988, 1991, 1994b, 1995a, 2005a, 2019, Carlos 2013, 2018 e Carlos e Braumann 2006.

Naturalmente, vários outros autores vieram a trabalhar em modelos estocásticos de aleatoriedade ambiental com uma ou várias populações, particularmente versões estocásticas das múltiplas variantes de modelos determinísticos particulares já tratados, mas não vamos desviar-nos do foco do Tema Central deste Boletim.

Neste Boletim, o texto de Clara Carlos, que preferiu usar o cálculo de Stratonovich, trata, para modelos estocásticos de crescimento populacional com e sem efeitos de Allee, dos tempos de extinção da população e avalia o impacto dos efeitos de Allee no comportamento do modelo e nas probabilidades de extinção.

4. Modelos de crescimento populacional e capturas em ambiente aleatório

Quando a população está sujeita a capturas por pesca, caça ou exploração florestal, na senda do trabalho pioneiro de Beddington e May 1977 para modelos muito particulares, os modelos gerais anteriores carecem apenas de uma pequena modificação para neles introduzir a taxa de capturas por unidade de tempo (p.u.t.) $C(t) \geq 0$, passando a ter-se a EDE $dX(t) = f\big(X(t)\big)X(t)\,dt - C(t) + \sigma X(t)\,dW(t)$. Tipicamente, no caso da pesca, a taxa de mortalidade adicional provocada pela pesca é considerada proporcional ao esforço de pesca $E(t) \geq 0$ (o número de embarcações de pesca usadas no instante t ou, havendo diversos tipos de embarcação, o número de unidades de pesca padronizadas), dependendo a constante de proporcionalidade, a chamada capturabilidade $q > 0$, da tecnologia de pesca, da espécie pescada e das condições de pescaria. A taxa de capturas p.u.t. será então dada por $C(t) = qE(t)X(t)$.

Começámos por estudar os modelos gerais autónomos em que a taxa de capturas dependia apenas do tamanho da população, $C\big(X(t)\big)$, o mesmo sucedendo ao esforço $E\big(X(t)\big)$. Para esses modelos gerais, mostrámos que, sob condições de regularidade muito moderadas, a condição de não-extinção e existência de um equilíbrio estocástico com densidade estacionária era termos uma taxa média geométrica de crescimento natural superior à taxa de mortalidade adicional causada pela pesca quando

a população é pequena. Isso era válido para modelos de crescimento com e sem efeitos de Allee e para intensidades de ruído constantes ou variáveis com o tamanho da população: Braumann 1981c, 1985, 1990, 1993a, 1997ab, 1999a, 2001d, 2002a, 2005b, 2007bd, 2019, 2021, Brites e Braumann 2020b, 2022. Mesmo em condições de alguma irregularidade como capturas constantes com ou sem truncatura e esforços constantes com truncatura, o resultado mantinha-se: Braumann 2001ab, 2002b.

Outros trabalhos trataram aspetos como o cálculo estocástico usado e a correta interpretação das médias (Braumann 2003b, 2007b), os problemas de estimação (Braumann 1985, 1996b, 1997a), a otimização das capturas sustentadas em políticas de esforço constante (Braumann 1985, 1997b, 2005b, 2019), os riscos e os tempos de extinção e de primeira passagem por limiares elevados (Braumann 1983b, 1984, 1985, Brites 2017, Brites e Braumann 2025).

Considerando um modelo razoável para o lucro por unidade de tempo (diferença entre as receitas de venda do peixe p.u.t. e os custos da atividade piscatória p.u.t.), Brites 2017 estudou o lucro p.u.t. em regime sustentado (equilíbrio estocástico) para os modelos estocásticos gerais com esforço de pesca constante, particularizando também para os modelos logístico e de Gompertz. Tal veio permitir a comparação com as políticas ótimas de esforço variável propostas por Suri 2008 (ver também Clark 2010 e, anteriormente mas ignorando os custos da atividade piscatória, Alvarez 2000 e Alvarez e Shepp 1998), baseadas na teoria do controlo ótimo e na utilização da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, que otimizam o lucro acumulado descontando esperado ao longo de um horizonte temporal futuro. Embora esse lucro seja inferior na política de esforço constante, a diferença em relação ao lucro da política ótima de esforço variável é muito pequena, como foi verificado, usando dados reais de pescarias, em Brites 2017, Brites e Braumann 2017, 2018. E a política de esforço constante tem uma enorme vantagem: é muito fácil de aplicar e não tem problemas sociais, enquanto a política ótima de esforço variável é inaplicável em termos práticos por exigir esforços de pescas sempre a mudar e o conhecimento do tamanho da população em cada momento, além de ocasionar problemas sociais nos períodos de pesca reduzida ou nula.

Pôs-se então a questão: será que existem outras políticas de pesca intermédias que obviem parte ou a totalidade dos problemas da política ótima de esforço variável e que resultem num lucro superior ao da política de esforço constante? E se houver efeitos de Allee? Várias políticas foram propostas e estudadas, em termos de lucro e de prós e contras, em Brites e Braumann 2019ab, 2020ab, 2022, 2023. Reis e Brites 2025 estudaram o problema da otimização do lucro quando os preços de venda também são estocásticos.

O texto de Nuno M. Brites neste Boletim faz uma viagem guiada sobre as aplicações bioeconómicas das EDE a populações em ambiente aleatório sujeitas a capturas, designadamente por pesca, comparando políticas de pesca em termos sociais, de aplicabilidade e do lucro associado.

Recentemente, para políticas de esforço variável e de esforço constante, estudou-se, em Brites e Braumann 2026, os efeitos da incorreta estimação dos parâmetros sobre o cálculo dos esforços de pesca a aplicar, a previsão dos lucros futuros e a curiosamente (mas explicavelmente) bem menor perda efetiva que ocorre nos lucros futuros por se usarem valores incorretos dos parâmetros em lugar dos valores exatos.

5. Modelos estocásticos de crescimento individual

Se o crescimento do tamanho de populações está sujeito às flutuações aleatórias do ambiente, o mesmo sucede ao crescimento do tamanho $X(t)$ de um indivíduo (por exemplo, em termos do seu peso) com a idade t, considerando as flutuações aleatórias do seu ambiente interno e externo. Classicamente, para o crescimento de animais de pecuária, peixes, árvores, etc., usava-se uma curva de crescimento determinística e os desvios em relação à curva eram tratados usando um modelo de regressão, o que ignorava a dinâmica do crescimento e fazia previsões por vezes absurdas. Garcia 1983 reparou que as curvas de crescimento determinístico clássicas se podiam escrever como soluções da EDO

$dY(t) = \beta\big(\alpha - Y(t)\big)\, dt$, usando o tamanho modificado $Y(t) = h\big(X(t)\big)$ por uma função estritamente monótona h de classe C^1 associada à curva de crescimento escolhida, sendo o tamanho modificado assintótico (i.e. na maturidade) $\alpha = h(A)$ (com A o tamanho na maturidade efetivo) e sendo $\beta > 0$ a taxa de aproximação ao mesmo. Por essa razão propôs $dY(t) = \beta\big(\alpha - Y(t)\big)\, dt + \sigma\, dW(t)$ como modelo estocástico geral de crescimento do indivíduo, modelo que adotámos, correspondendo os modelos particulares a escolhas concretas da função h. Começámos por utilizar, para o doutoramento da Colega Patrícia A. Filipe, dados de crescimento de vacas mertolengas obtidos pelo nosso Colega Carlos J. Roquete. Mais tarde, utilizámos as completíssimas bases de dados sobre machos e fêmeas de bovinos mertolengos e de raça alentejana das associações de produtores e beneficiámos durante alguns anos da integração no Grupo Operacional GOBov+ financiado pelo PDR 2020 (ver detalhes no texto de Patrícia A. Filipe e Gonçalo Jacinto neste Boletim).

Os problemas probabilísticos, de escolha do modelo (escolha da expressão da função h), de determinação exata da função de verosimilhança para observações discretas de vários animais em idades geralmente não-concordantes, de estimação de parâmetros por máxima verosimilhança (incluindo técnicas de *bootstrap*), e de previsão foram estudados em Braumann, Filipe, Carlos e Roquete 2009, 2012, Filipe 2011, 2018, Filipe e Braumann 2007, 2008, Filipe, Braumann, Brites e Roquete 2013, Filipe, Braumann e Roquete 2007, 2008. Métodos de estimação não-paramétrica para os coeficientes de tendência e difusão para um modelo mais geral de EDE foram estudados em Filipe, Braumann, Brites e Roquete 2010 e Filipe 2011, não se desviando muito dos modelos paramétricos por nós escolhidos. Em Jacinto, Filipe e Braumann 2022b estudámos métodos de estimação por máxima verosimilhança ponderada para compensar o déficit de observações em idades avançadas. Em Filipe 2011, Filipe, Braumann e Roquete 2009ab, 2012 estudaram-se os modelos bifásicos de crescimento, que consideravam dois regimes paramétricos de crescimento, um até ao desmame e outro na fase da recria. Em 2011, com base nos resultados obtidos e com o apoio de Nuno M. Brites, foi disponibilizado o software gSDE, de uso amigável e desenvolvido em Microsoft Visual Studio 2010 com algoritmos de cálculo em R, para estimação paramétrica e não-paramétrica e previsão nestes modelos.

Um dos nossos principais objetivos era o de maximizar o lucro esperado do produtor na fase da recria e determinar a correspondente idade ótima para venda no mercado da carne, tendo em conta os custos fixos e variáveis do produtor e os preços de mercado na venda, tendo-se obtido também o desvio-padrão para se aferir a variabilidade do lucro. Isso foi realizado em Filipe 2011, Braumann, Filipe, Carlos e Roquete 2012, Filipe, Braumann e Carlos 2015, Filipe, Braumann, Carlos e Roquete 2014. Com preços de venda reais estruturados por idade do animal e categorias do seu peso, o problema de otimização complicou-se e foi resolvido em Jacinto, Filipe e Braumann 2022b. Com os nossos resultados e o nosso apoio e das associações de produtores, a Ruralbit desenvolveu uma aplicação informática para apoiar o produtor nas melhores decisões de venda. Estudámos também uma alternativa à idade ótima de venda, mais vantajosa em termos de lucro esperado mas mais difícil de implementar, baseada no peso ótimo de venda, para a qual precisámos de determinar em Carlos, Braumann e Filipe 2013 a idade de primeira passagem pelo peso ótimo.

O texto de Patrícia A. Filipe e Gonçalo Jacinto neste número do Boletim falará sobre estes modelos estocásticos de crescimento individual e a otimização do lucro do produtor.

6. Modelos estocásticos mistos de crescimento individual

Os indivíduos, porém, não são necessariamente todos iguais e indivíduos diferentes, por razões genéticas, de regime alimentar ou outras, podem ter parâmetros de crescimento individual α e/ou β diferentes, com uma distribuição de probabilidade entre a população de animais que podemos supor normal (embora também tivéssemos considerado uma distribuição lognormal para β). Temos assim modelos mistos de EDE, que combinam as vantagens das EDE com as das *equações diferenciais aleatórias*, equações estas com que também trabalhei com colegas de outras nacionalidades e que são

simplesmente EDO com parâmetros aleatórios, mas sem flutuações ambientais. Mas fomos mais longe e trabalhámos com modelos mistos estruturados em que os parâmetros dependem dos valores genéticos do animal (tendo-se desenvolvido testes para determinar quais dos valores genéticos disponíveis tinham influência significativa), visando uma melhor otimização do lucro, mais adaptada ao animal concreto. O problema dos modelos mistos é que, em certos casos, a função de verosimilhança não tem uma expressão fechada e, para a maximizar, há que recorrer a aproximações, sendo os métodos habitualmente usados computacionalmente intensivos, além de geralmente presumirem a regularidade, temporal e entre animais, das observações. Para tal desenvolvemos métodos novos, inspirados no clássico método delta da Estatística, que não dependem da regularidade temporal e entre animais das observações e que, como comprovam os nossos estudos comparativos, proporcionam boas estimativas e são computacionalmente muito mais eficientes.

O estudo dos modelos mistos nos termos acima descritos pode ver-se em Jacinto, Filipe e Braumann 2026, Jamba, Filipe, Jacinto e Braumann 2024, Jamba, Jacinto, Filipe e Braumann 2022, 2024.

O trabalho neste número do Boletim de Gonçalo Jacinto, Patrícia A. Filipe e Nelson T. Jamba trata dos modelos mistos e dos métodos de estimação associados.

7. Conclusão

Uma das missões que considerámos essencial foi a da divulgação destas matérias e metodologias com o objetivo de sensibilizar os estudantes, a comunidade científica e a sociedade para a sua importância e benefícios e de atrair novos investigadores para estas áreas. Para isso utilizámos, geralmente a convite dos organizadores, mas também em iniciativas nossas, diversos meios, como minicursos, seminários, palestras e organização de sessões temáticas, adaptando a mensagem ao público. Fizemo-lo em Universidades, em reuniões científicas, em encontros promovidos por professores e pelos setores produtivos. Fiz minicursos numa vintena de instituições nacionais e estrangeiras espalhadas por vários continentes que seria fastidioso enumerar, pelo que destaco apenas o realizado no ISEG a convite do saudoso Professor Bento Murteira (tendo a semente aí lançada dado frutos num doutoramento na área da Matemática Financeira que coorientei, como viria mais tarde a coorientar outros nessa área) e o do Congresso SPE 2005. Mais fastidioso seria enumerar a longa lista de conferências convidadas e seminários que proferi, mas recordo o primeiro, que fiz em Lisboa a convite do saudoso Professor Tiago de Oliveira. Utilizámos também artigos de divulgação em atas de reuniões científicas, variadas revistas científicas e profissionais, boletins de sociedades como o Boletim da SPE e outras publicações. Vejam-se, a título de exemplo: Braumann 1981b, 1995b, 1998, 1999b, 2001e, 2004b, 2005c, 2008bc, 2018, 2021, Brites 2018, Carlos 2018, Filipe 2018. Fizemo-lo ainda em livros didático-científicos, como o livro do minicurso Braumann 2005a no Congresso SPE2005 e o meu livro Braumann 2019 na Wiley.

Naturalmente, eu, colegas do grupo e outras pessoas organizámos ou colaborámos na organização de muitas reuniões científicas nacionais e internacionais e aí procurámos também atrair sessões temáticas e comunicações na área da Biologia Matemática e dos modelos estocásticos. Os Colegas de Évora estiveram muito envolvidos no Congresso da SPE 2004 realizado na cidade e, como membro de Comissões Científicas e como Presidente da SPE durante alguns anos, colaborei com a organização de vários outros Congressos. Na área da Biologia Matemática, tenho participado na organização de múltiplas conferências das séries Dynamical Systems Applied to Biology and the Natural Sciences – DSABNS, Models in Population Dynamics, Ecology and Evolution – MPDEE e European Conference on Mathematical and Theoretical Biology – ECMTB, estas organizadas pela European Society for Mathematical and Theoretical Biology – ESMTB de que também fui Presidente durante alguns anos. Realço o ECMTB 2018, copresidido por M. Aguiar, C. A. Braumann e N. Stollenwerk, que decorreu na Universidade de Lisboa. Também nestes Congressos e Conferências houve a preocupação de não negligenciar os modelos estocásticos.

Estou convencido que esta atividade de divulgação terá despertado o interesse para as EDE e aplicações de alguns estudantes e de outros colegas portugueses e estrangeiros que trabalham hoje nessa área.

Procurámos evidenciar, nos trabalhos do grupo neste Boletim SPE, o papel das flutuações aleatórias das condições ambientais no crescimento de populações e no crescimento individual de seres vivos e, quando se trata de seres vivos utilizados na atividade produtiva, as implicações económicas que delas derivam.

Mas o acaso, ou, se preferirem, coincidências que espero tenham sido tão felizes como para mim foram, também interveio no percurso científico-pedagógico dos membros deste grupo que hoje vos acompanha numa viagem de revelação de um pouco do seu labor e trajetória. Espero que o leitor aprecie a viagem como nós apreciamos a sua companhia e que, se assim a sua disposição e o acaso o determinarem, possa olhar para estas matérias com um interesse acrescido.

Há muito terreno conhecido, e muito mais ainda desconhecido, por desbravar. Com os esforços deste grupo e de outros investigadores que se vêm interessando ou se venham a interessar por estes assuntos, o trabalho continua.

Permita-me, caro leitor, que, para rematar estes nossos relatos sobre o papel do acaso na vida, formule sinceros votos de que, na sua e na nossa vida, a sorte, outra face do acaso, nos seja sempre favorável.

Agradecimento:
O autor é membro do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto UID/04674/2025, https://doi.org/10.544.99/UID/04674/2025.

Referências:

Allee, W. C.; Emerson, A. E.; Park, O.; Park, T.; Schmidt, K. P. (1949). *Principles of Animal Ecology*. Saunders, Philadelphia.

Alvarez, L. H. R. (2000). On the option interpretation of rational harvesting planning. *Journal of Mathematical Biology* **40**: 383-405.

Alvarez, L. H. R.; Shepp, L. A. (1998). Optimal harvesting in stochastically fluctuating populations. *Journal of Mathematical Biology* **37**: 155-177.

Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications.* ISBN: 9780471033592. Wiley, New York.

Beddington, J. R.; May, R. M. (1977). Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment. *Science* **197**: 463-465.

Braumann, C. A. (1979). *Population Growth in Random Environments*. Tese de doutoramento, State University of New York at Stony Brook.

Braumann, C. A. (1981a). Population adaptation to a 'noisy' environment: Stochastic analogs of some deterministic models. Em: Quantitative Population Dynamics (D. G. Chapman, V. F. Gallucci, eds.), International Cooperative Publishing House, Fairland, Maryland, p. 39-59.

Braumann, C. A. (1981b). Aplicações de equações diferenciais estocásticas. Em: Atas do II Colóquio de Estatística e Investigação Operacional, Sociedade Portuguesa de Estatística e Investigação Operacional, p. 74-101.

Braumann, C. A. (1981c). Pescar num mundo aleatório: Um modelo usando equações diferenciais estocásticas. Em: Atas VIII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática, Universidade de Coimbra, Vol. III, p. 301-308.

Braumann, C. A. (1983a). Population growth in random environments. *Bulletin of Mathematical Biology* **45**: 635-641.

Braumann, C. A. (1983b). Population extinction probabilities and methods of estimation for population stochastic differential equation models. Em: Nonlinear Stochastic Problems (R. S. Bucy, J. M. F. Moura, eds.), D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht/Boston/Lancaster, p. 553-559.

Braumann, C. A. (1984). Tempo de primeira passagem para processos não-markovianos: Uma solução aproximada dum caso particular. Em: Actas IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas 1982, Universidad de Salamanca, Vol. II, p. 563-566.

Braumann, C. A. (1985). Stochastic differential equation models of fisheries in an uncertain world: Extinction probabilities, optimal fishing effort, and parameter estimation. Em: Mathematics in Biology and Medicine (V. Capasso, E. Grosso, S. L. Paveri-Fontana, eds.), Springer, Berlin, p. 201-206.

Braumann, C. A. (1986). Equações diferenciais estocásticas: A importância da análise numérica vista através de um exemplo de aplicação. Em: 1º Ciclo de Conferências em Análise Numérica e Otimização, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, p. 284-298.

Braumann, C. A. (1987a). Majoração da probabilidade de extinção de uma população com crescimento dependente da densidade em ambiente aleatório. Em: Actas XI Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas 1986, Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura e Real Sociedad Matemática Española, Vol. 2, p. 368-374.

Braumann, C. A. (1987b). Problemas de estimação em modelos de crescimento populacional usando equações diferenciais estocásticas. Em: Atas XII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática, Universidade do Minho, Vol. III, p. 12-17.

Braumann, C. A. (1988). Estimating parameters and extinction probabilities in population stochastic differential equation models. Em: Biomathematics and Related Computational Problems (L. M. Ricciardi, ed.), Kluwer Academic Publ., Dordrecht/Boston/London, p. 133-143.

Braumann, C. A. (1990). General fishery models in a randomly fluctuating environment. Em: Atas da 1ª Conferência em Estatística e Otimização (M. A. Amaral Turkman, M. L. de Carvalho, eds.), CEA e DEIO, Universidade de Lisboa, p. 105-112.

Braumann, C. A. (1991). Estimação de probabilidades de extinção de populações em ambiente aleatório. Em: Atas das Iªs Jornadas de Estatística e Aplicações, Universidade do Minho, p. 393-404.

Braumann, C. A. (1993a). General models of fishing with random growth parameters. Em: Mathematics Applied to Biology and Medicine (J. Demongeot, V. Capasso, eds.), Wuerz Publ. Ltd., Winnipeg, Canada, p. 155-161.

Braumann, C. A. (1993b). Model fitting and prediction in stochastic differential equation population growth models in random environments. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LV**(I): 163-164.

Braumann, C. A. (1993c). Estimação e previsão em modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório. Em: Estatística Robusta, Extremos e Mais Alguns Temas (D. Pestana, ed.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 21-32.

Braumann, C. A. (1994a). Escolha de modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório e predição. Em: A Estatística e o Futuro e o Futuro da Estatística (D. Pestana, A. Turkman, J. Branco, L. Duarte, A. Pires, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 39-46.

Braumann, C. A. (1994b). Crescimento populacional em ambiente aleatório e probabilidades de cruzamento de limiares críticos. Em: Atas do II Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 91-105.

Braumann, C. A. (1995a). Threshold crossing probabilities for population growth models in random environments. *Journal of Biological Systems* **3**: 505-517.

Braumann, C. A. (1995b, divulgação). A Matemática e a luta pela vida (lição inaugural). Em: 1º de Novembro. Dia da Universidade. Abertura Solene das Aulas, Universidade de Évora, p. 17-35.

Braumann, C. A. (1996a). Ajustamento de curvas e modelos estocásticos: Abusos do método dos mínimos quadrados. *Revista de Estatística* **3**: 7-22.

Braumann, C. A. (1996b). Estimação de parâmetros em modelos de crescimento e pesca em ambiente aleatório. Em: Bom Senso e Sensibilidade. Traves Mestras da Estatística (J. Branco, P. Gomes e J. Prata, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 103-117.

Braumann, C. A. (1997a). Population estimation in population growth and fishing models in random environments. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LVII**(1): 21-22.

Braumann, C. A. (1997b). Pesca de esforço constante em ambiente aleatório. Em: A Estatística a Decifrar o Mundo (R. Vasconcelos, I. Fraga Alves, L. Canto e Castro, D. Pestana, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 291-302.

Braumann, C. A. (1998). O acaso, a bolsa e a vida. Em: Estatística: A Diversidade na Unidade (M. Souto de Miranda, I. Pereira, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, p. 29-55.

Braumann, C. A. (1999a). Variable effort fishing models in random environments, *Mathematical Biosciences.* **156**: 1-19.

Braumann, C. A. (1999b). Applications of stochastic differential equations to population growth. Em: Proc. Ninth International Colloquium on Differential Equations (D. Bainov, ed.), VSP, Utrecht, p.47-52.

Braumann, C. A. (1999c). Comparison of geometric Brownian motions and applications to population growth and to Finance. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LVIII**(1): 125-126.

Braumann, C. A. (1999d). Population growth in a random environment: Some modeling and statistical issues. Em: Applied Stochastic Models and Data Analysis. Quantitative Methods in Business and Industry Society (H. Bacelar-Nicolau, F. Nicolau, J. Janssen, eds.), Instituto Nacional de Estatística, Lisboa, p.36-42.

Braumann, C. A. (1999e). Estimação de parâmetros para uma ou várias trajetórias do movimento browniano geométrico. Em: Afirmar a Estatística. Um Desafio para o Século XXI (C. D. Paulino, A. Pacheco, A. Pires, Ferreira da Cunha, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 149-156.

Braumann, C. A. (2001a). Constant effort and constant quota fishing policies with cut-offs in a random environment. *Natural Resource Modeling* **14**: 199-232.

Braumann, C. A. (2001b). Políticas de pesca de quota constante com truncatura em ambiente aleatório. Em: Um Olhar Sobre a Estatística (P. Oliveira, E. Athayde, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 431-446.

Braumann, C. A. (2001c). Crescimento de populações em ambiente aleatório: Generalização a intensidades de ruído dependentes da densidade da população. Em: A Estatística em Movimento (M. M. Neves, J. Cadima, M. J. Martins, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 119-128.

Braumann, C. A. (2001d). General stochastic differential equation models of population growth and fishing in a random environment. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LIX**(3): 111-112.

Braumann, C. A. (2001e, divulgação). A Matemática e a vida. *Educação & Matemática* **64**: 23-29.

Braumann, C. A. (2002a). Variable effort harvesting models in random environments: Generalization to density-dependent noise intensities. *Mathematical Bioscences* **177** & **178**: 229-245.

Braumann, C. A. (2002b). Políticas de pesca com truncatura em ambiente aleatório. Em: Novos Rumos em Estatística (L. Carvalho, F. Brilhante, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa Estatística, p. 137-145.

Braumann, C. A. (2003a). Modeling population growth in random environments: Ito or Stratonovich calculus? *Bulletin of the International Statistical Institute* **LX**(1): 119-120.

Braumann, C. A. (2003b). O uso de diferentes cálculos estocásticos na modelação do crescimento populacional em ambiente aleatório. Em: Literacia Estatística (P. Brito, A. Figueiredo, F. Sousa, P. Teles, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 141-153.

Braumann, C. A. (2004a). Inferência estatística para o movimento browniano geométrico com coeficiente de tendência sazonal de período múltiplo do período de observação. Em: Estatística com Acaso e Necessidade (P. M. M. Rodrigues, E. Luz Rebelo, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 101-111.

Braumann, C. A. (2004b, divulgação). Introduction to stochastic differential equations. Em: Stochastic Finance 2004, Autumn School (P. E. Oliveira, ed.), Centro Internacional de Matemática, p. 5-41.

Braumann, C. A. (2005a). *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações.* Edições SPE, ISBN: 972-8890-06-0, Sociedade Portuguesa de Estatística.

Braumann, C. A. (2005b). Comparação de modelos determinísticos e estocásticos de capturas em ambiente aleatório. Em: Estatística Jubilar (C. A. Braumann, P. Infante, M. M. Oliveira, R. Alpízar-Jara, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 89-96.

Braumann, C. A. (2005c, divulgação). O acaso e a vida. Em: Memorial da Sociedade Portuguesa de Estatística (F. Rosado, ed.), Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 53-72.

Braumann, C. A. (2007a). Itô versus Stratonovich calculus in random population growth. *Mathematical Bioscences* **206**: 81-107.

Braumann, C. A. (2007b). Harvesting in a random environment: Itô or Stratonovich calculus. *Journal of Theoretical Biology* **244**: 424-432.

Braumann, C. A. (2007c). Population growth in a random environment: Which stochastic calculus? *Bulletin of the International Statistical Institute* **LXII**: 5802-5805.

Braumann, C. A. (2007d). Extinction and persistence of populations in a random environment: Generalization to density-dependent noise intensities. Em: Proceedings of the International Conference Probability and Statistics in Science and Technology (H. Rootzén, P. Milheiro-Oliveira, eds.), Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, p. 93-94.

Braumann, C. A. (2008a). Growth and extinction of populations in randomly varying environments. *Computers and Mathematics with Applications* **56**: 631-644.

Braumann, C. A. (2008b, divulgação). Equações diferenciais estocásticas e aplicações biológicas. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística* **Outono 2008**: 61-69.

Braumann, C. A. (2008c, divulgação). Biomatemática. Em: Atas da Escola de Verão Matemática 07. A Matemática na Escola e na Sociedade (N. Franco, S. Vinagre, ed.), Universidade de Évora e Sociedade Portuguesa de Matemática, p. 151-168.

Braumann, C. A. (2010). Environmental versus demographic stochasticity in population growth. Em: Workshop on Branching Processes and Their Applications (M. González, M. Molina, I. M. del Puerto, M. Mota, R. Martínez, A. Ramos, eds.), Springer, Berlin/Heidelberg, p. 37-52.

Braumann, C. A. (2018, divulgação). Breve introdução às equações diferenciais estocásticas. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística* **Outono 2018**: 81-88.

Braumann, C. A. (2019). *Introduction to Stochastic Differential Equations with Applications to Biology and Finance.* ISBN: 9781119166061, 9781119166078, 9781119166085, John Wiley & Sons Ltd., Hoboken N.J.

Braumann, C. A. (2021). Growth and extinction in randomly varying environments: Modelling and optimization using stochastic differential equations. *Revista de Modelamiento Matemático de Sistemas Biológicos* **1**(1): 25-36.

Braumann, C. A.; Alpízar-Jara, R. (2009, divulgação). CIMA – Universidade de Évora. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística* **Primavera 2009**: 24-28.

Braumann, C. A.; Carlos, C. (2013). Allee effects in randomly varying environments. Em: Proc. 2013 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (I. P. Hamilton, J. Vigo-Aguiar, eds.), CMMSE, Cabo de Gata, Almería, p. 304--307.

Braumann, C. A.; Carlos, C. (2015). Weak Allee effects population growth models in a random environment. Em: *Proc. 60th ISI World Statistics Congress*: 2455-2460.

Braumann, C. A.; Filipe, P. A.; Carlos, C.; Roquete, C. J. (2009). Growth of individuals in randomly fluctuating environments, Em: Proc. 2009 International Conference in Computational and Mathematical Methods in Science e Engineering Engineering (J. Vigo-Aguiar, ed.), CMMSE, Gijón, p. 201-212.

Braumann, C. A.; Filipe, P. A.; Carlos, C.; Roquete, C. J. (2012). Stochastic differential equations general models of individual growth in uncertain environments and application to profit optimization in livestock production. *Bulletin of the ISI 58th World Statistics Congress of the International Statistical Institute 2011:* 4450-4455.

Bravo, J. M.; Braumann, C. A. (2007). The value of a random life: modelling survival probabilities in a stochastic environment. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LXII**: 5741-5744.

Brites, N.M. (2017). *Stochastic Differential Equation Harvesting Models: Sustainable Policies and Profit Optimization.* Tese de doutoramento, Universidade de Évora.

Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2017). Fisheries management in random environments: Comparison of harvesting policies for the logistic model. *Fisheries Research* **195:** 238-246.

Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2018, divulgação). Políticas ótimas de pescas usando equações diferenciais estocásticas. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística* **Outono 2018**: 40-48.

Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2019a). Fisheries management in randomly varying environments: Comparison of constant, variable and penalized efforts policies for the Gompertz model. *Fisheries Research* **216**: 196-203.

Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2019b). Harvesting in a random varying environment: Optimal, stepwise and sustainable policies for the Gompertz model. *Statistics Optimization and Information Computing* **7**: 533-544.

Brites, N. M.; Braumann C. A. (2020a). Harvesting policies with stepwise effort and logistic growth in a random environment. Em: Current Trends in Dynamical Systems in Biology and Natural Sciences (M. Aguiar, C. A. Braumann, B. W. Kooi, A. Pugliese, N. Stollenwerk, E. Venturino, eds.), Springer, Cham., p. 95-110.

Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2020b). Stochastic differential equations harvesting policies: Allee effects, logistic-like growth and profit optimization. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* **36**: 825-835.

Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2022). Profit optimization of stochastically fluctuating populations under harvesting: The effects of Allee effects. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* **71:** 3277-3293.

Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2023). Harvesting optimization with stochastic differential equations models: Is the optimal enemy of the good? *Stochastic Models* **39**: 41-59.

Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2025). Moments and probability density of threshold crossing times for populations in random environments under sustainable harvesting policies. *Computational Statistics* **40***:* 3191-3203.

Brites, N. M.; Braumann, C. A. (2026, em impressão). Optimal harvesting in randomly varying environments: Sensitivity of profit and effort to population and economic parameters. Em: Advances in Mathematical Modeling in Science, Engineering and Social Sciences (M. Bezzeghoud, F. Carapau, F. Minhós, A. Vaidya, eds.). Springer, Heidelberg.

Capocelli, R. M.; Ricciardi, L. M. (1974). A diffusion model for population growth in a random environment. *Theoretical Population Biology* **5**: 28-41.

Carlos, C. (2013). *Modelos de Crescimento Populacional em Ambiente Aleatório: Efeito de Incorreta Especificação do Modelo, Efeitos de Allee e Tempos de Extinção*. Tese de doutoramento, Universidade de Évora.

Carlos, C. (2018, divulgação). Modelos de crescimento populacional usando equações diferenciais estocásticas – tempos de extinção e influência da incorreta especificação do modelo. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística* **Outono 2018**: 19-24.

Carlos, C.; Braumann, C. A. (2005). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório. Em: Estatística Jubilar (C. A. Braumann, P. Infante, M. M. Oliveira, R. Alpízar-Jara, F. Rosado, eds.). Edições SPE, Lisboa, p. 133-142.

Carlos, C.; Braumann, C. A. (2006). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório e cálculos de Itô e Stratonovich. Em: Ciência Estatística (L. Canto e Castro, E. Graça Martins, C. Rocha, M. F. Oliveira, M. Mendes Leal, F. Rosado, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 229-238.

Carlos, C.; Braumann, C. A. (2014). Consequences of an incorrect model specification on population growth. Em: New Advances in Statistical Modeling and Applications (A. Pacheco, R. Santos, M. R. Oliveira, C. D. Paulino, eds.), Springer, p. 105-113.

Carlos, C., Braumann, C. A. (2017). General population growth models with Allee effects in a random environment. *Ecological Complexity* **30**: 26-33.

Carlos, C.; Braumann, C.A.; Filipe, P.A. (2013). Models of individual growth in a random environment: Study and application of first passage times. Em: Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications (J. L. da Silva, F. Caeiro, I. Natário, C. A. Braumann, M. L. Esquível, J. Mexia, eds.), Springer, p. 103-111.

Clark, C. W. (2010). *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources, 3rd edition.* ISBN: 9780470372999. Wiley, New York.

Dennis, B. (1989). Allee effects: Population growth, critical density and the chance of extinction. *Natural Resource Modelling* **3**: 481-539.

Dennis, B. (2002). Allee effects in stochastic populations. *Oikos* **96**: 389-401.

dos Santos Baptista, D.; Brites, N. M. (2023). Modelling French and Portuguese mortality rates with stochastic differential equation models: A comparative study. *Mathematics* **11**: 4648.

dos Santos Baptista, D.; Brites, N.M.; dos Reis, A.D.E. (2025). Stochastic differential equations death rates models: The Portuguese case. *Decisions in Economics and Finance* **48**: 1197–1217.

Feldman, M. W.; Roughgarden, J. (1975). A population's stationary distribution and chance of extinction in a stochastic environment with remarks on the theory of species packing. *Theoretical Popululation Biology* **7**: 197-207.

Filipe, P. A. (2011). *Equações Diferenciais Estocásticas na Modelação do Crescimento Individual em Ambiente Aleatório.* Tese de doutoramento, Universidade de Évora.

Filipe, P. A. (2018, divulgação). Modelos de equações diferenciais estocásticas e modelos mistos em crescimento individual. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística* **Outono 2018**: 76-80.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2007). Animal growth in random environments: Estimation with several paths. *Bulletin of the International Statistical Institute* **LXII**: 5806-5809.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2008). Modelling individual animal growth in random environments. Em: Proc. 23d International Workshop on Statistical Modelling (P. H. C. Eilers, ed.), p. 232-237.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Brites, N. M.; Roquete, C. J. (2010). Modelling animal growth in random environments: An application using nonparametric estimation. *Biometrical Journal* **52**: 653-666.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Brites, N. M.; Roquete, C. J. (2013). Prediction for individual growth in a random environment. Em: Recent Developments in Modeling and Applications in Statistics (P. E. Oliveira, M. Graça Temido, C. Henriques, M. Vichi, eds.), Springer, p. 193-201.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Carlos, C. (2015). Profit optimization for cattle growing in a randomly fluctuating environment. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* **64**: 1393-1407.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Carlos, C.; Roquete, C. J. (2014). Individual growth in a random environment: An optimization problem. Em: New Advances in Statistical Modeling and Applications (A. Pacheco, R. Santos, M. R. Oliveira, C. D. Paulino, eds.), Springer, p. 115-123.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2007). Modelos de crescimento de animais em ambiente aleatório. Em: Estatística Ciência Interdisciplinar (M. E. Ferrão, C. Nunes, C. A. Braumann, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 401-410.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2008). Crescimento individual em ambiente aleatório: Várias trajectórias. Em: Estatística da Teoria à Prática (M. M. Hill, M. A. Ferreira, J. G. Dias, M. F. Salgueiro, H. Carvalho, P. Vicente, C. A. Braumann, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 259-268.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2009a). Modelos multifásicos de crescimento de animais em ambiente aleatório. Em: Estatística: Arte de Explicar o Acaso (I. Oliveira, E. Correia, F. Ferreira, S. Dias, C. A. Braumann, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 299-306.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2009b). Multiphasic individual growth models in random environments. Em: The XIIIth International Conference Applied Stochastic Models and Data Analysis – Selected Papers (L. Sakalauskas, C. Skiadas, E. K. Szavadskas, eds.), Institute of Mathematics and Informatics, VGTU Press "Technika", Vilnius Gediminas Tecn. University, p. 422-426.

Filipe, P. A.; Braumann, C. A.; Roquete, C. J. (2012). Multiphasic individual growth models in random environments. *Methodology and Computing in Applied Probability* **14**: 49--56.

Garcia, O. (1983). A stochastic differential equation model for the height of forest stands. *Biometrics* **39**: 1059-1072.

Ghiman, I. I.; Skorohod, A. V. (1991). *Stochastic Differential Equations*. ISBN: 9783540059462. Springer, Berlin.

Itô, K. (1951). *On Stochastic Differential Equations*. ISBN: 9780821899830. Memoirs of the American Mathematical Society Nr. 4.

Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2022a). Profit optimization of cattle growth with variable prices. *Methodology and Computing in Applied Probability* **24**: 1917- 1952.

Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2022b). Weighted maximum likelihood estimation for individual growth models. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* **71**: 3295—3311.

Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2026, em impressão). Delta method estimation for SDE mixed models: Sensitivity to random parameter distribution. Em: Advances in Mathematical Modeling in Science, Engineering and Social Sciences (M. Bezzeghoud, F. Carapau, F. Minhós, A. Vaidya, eds.), Springer, Heidelberg.

Jamba, N. T.; Filipe, P. A.; Jacinto, G.; Braumann, C. A. (2024). Stochastic differential equations mixed model for individual growth with the inclusion of genetic characteristics. *Statistics, Optimization & Information Computing* **12**: 298-309.

Jamba, N. T.; Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2022). Likelihood function through the delta approximation in mixed SDE models. *Mathematics* **2022, 10**, 385.

Jamba, N. T.; Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2024). Estimation for stochastic differential equations mixed models using approximation methods. *AIMS Mathematics* **9**: 7866-7894.

Karlin, S.; Taylor, H. M. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes.* ISBN: 9780123986504. Academic Press, NY.

Lagarto, S. (2013). *Modelos Estocásticos de Taxas de Mortalidade e Aplicações*. Tese de doutoramento, Universidade de Évora.

Lagarto, S.; Braumann, C. A. (2013). Modeling human population death rates: A bi-dimensional stochastic Gompertz model with correlated Wiener processes. Em: New Advances in Statistical Modeling and Applications (A. Pacheco, R. Santos, M. R. Oliveira, C. D. Paulino, eds.), Springer, p. 95-103.

Lagarto, S.; Gomes, D.; Braumann, C. A. (2013). Uma comparação entre modelos bivariados de EDE e modelos VARMA na previsão de taxas de mortalidade. Em: Estatística: Novos Desenvolvimentos e Inspirações (M. Maia, P. Campos, P. Duarte Silva, eds.), Edições SPE, Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 189-202.

Levins, R. (1969). The effect of random variations of different types on population growth. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **62**: 1062-1065.

May, R. M. (1973a). Stability in randomly fluctuating versus deterministic environments. *American Naturalist* **107**: 621-650.

May, R. M. (1973b). *Stability and Complexity in Model Ecosystems, 2nd edition.* Princeton University Press, New Jersey.

May, R. M., MacArthur, R. H. (1972). Niche overlap as a function of environmental variability. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **69**: 1109-1113.

Reis, M.; Brites, N. M. (2025). Stochastic differential equations harvesting optimization with stochastic prices: Formulation and numerical solution. *Results in Applied Mathematics* **25**, 2025, 100533.

Stratonovich, R. L. (1966). A new representation of stochastic integrals and equations. *SIAM Journal on Control* **4**: 362-371.

Suri, R. (2008). *Optimal Harvesting Strategies for Fisheries: A Differential Equations Approach.* Tese de doutoramento, Massey University, Albany, New Zealand.

Turelli, M. (1978). A reexamination of stability in randomly varying environments with comments on the stochastic theory of limiting similarity. *Theoretical Population Biology* **13**: 244-267.

Uhlenbeck, G. E.; Ornstein, L. S. (1930). On the theory of Brownian motion. *Physical Review* **36**: 823-841.

Modelos de crescimento populacional: tempos de extinção e impacto dos efeitos de Allee

Clara Carlos, *clara.carlos@estbarreiro.ips.pt*

Instituto Politécnico de Setúbal, Escola Superior de Tecnologia do Barreiro, Departamento de Matemática e Informática
Universidade de Évora, Centro de Investigação em Matemática e Aplicações

1. Introdução

Foi com elevado apreço que aceitei o honroso convite do Professor Fernando Rosado para contribuir com o presente texto para o Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística, dedicado ao tema "BioEconomia no Crescimento Estocástico - uma contribuição portuguesa".

Na Bioeconomia, compreender como as populações variam em ambientes incertos é essencial para gerir recursos biológicos de forma sustentável. O estudo do crescimento populacional em ambientes aleatórios, usando equações diferenciais estocásticas, permite captar essa incerteza. Um dos modelos clássicos de crescimento populacional, não tendo em conta os ambientes incertos, um modelo determinístico, é o modelo logístico, amplamente utilizado devido à sua simplicidade e à sua aparente adequação à descrição do crescimento populacional. Com base no modelo logístico clássico propomos um modelo de crescimento populacional que incorpora o efeito das flutuações ambientais aleatórias na taxa de crescimento *per capita*, formulado sob a forma de uma equação diferencial estocástica, a que chamamos modelo logístico estocástico. Este modelo supõe a ausência de efeitos de Allee, pelo que, além dele, analisamos também uma sua extensão, o modelo logístico estocástico com efeitos de Allee, que incorporam estes efeitos (ver Allee *et al.* (1949)).

Os momentos dos tempos de primeira passagem por limiares inferiores ou superiores à população inicial seguem equações diferenciais de segunda ordem que pode encontrar-se, por exemplo, em Gihman e Skorohod (1972) ou Karlin e Taylor (1981). Podem ser utilizados no estudo dos tempos de extinção de populações, considerando-se extinta qualquer população que atinja um limiar "realista"de extinção adequadamente escolhido. Nesse contexto, interessa determinar o tempo necessário para que a população atinja esse limiar. Com base nas expressões obtidas em Carlos (2013) para os momentos dos tempos de primeira passagem e, em particular, ao tempo de extinção, deduzimos expressões explícitas para a média e a variância do tempo de extinção para os dois modelos considerados. Apresentamos gráficos ilustrativos do comportamento da média do tempo de extinção para diferentes combinações de parâmetros. Estas análises permitem avaliar o impacto dos efeitos de Allee e da intensidade destes efeitos através da comparação entre o modelo logístico estocástico e o modelo logístico estocástico com efeitos de Allee de diferentes intensidades.

2. Modelos de crescimento populacional com e sem efeitos de Allee

Seja $X(t)$ o tamanho de uma determinada população no instante t, medido em número de indivíduos, biomassa ou densidade populacional. A taxa de crescimento *per capita*, no caso deteminístico, representa-se por

$$\frac{1}{X(t)}\frac{dX(t)}{dt} = g(X(t)), \tag{1}$$

com $X(0) = x > 0$ conhecido e g a taxa de crescimento *per capita*, uma função de classe C^1, definida para $X > 0$. Um dos modelos clássicos usado na literatura é o modelo logístico, definido por $g(X) = r\left(1 - \frac{X}{K}\right)$, onde $r > 0$ é a taxa intrínseca de crescimento, $K > 0$ a capacidade de sustento do meio e onde, para simplificar a notação, usamos X ao invés de $X(t)$. Este modelo pressupõe que a taxa de crescimento diminui à medida que a população aumenta, refletindo a redução de recursos disponíveis para a sobrevivência e reprodução dos indivíduos com o aumento da densidade populacional. Importa salientar que este modelo não incorpora os conhecidos efeitos de Allee.

É natural admitir que as flutuações aleatórias do ambiente influenciam a taxa de crescimento populacional; assim, a dinâmica da população pode ser descrita de forma mais realista através de uma equação diferencial estocástica

$$(S)\,\frac{1}{X(t)}\frac{dX(t)}{dt} = g(X(t)) + \sigma\varepsilon(t), \tag{2}$$

onde g passa a ser a taxa média geométrica de crescimento *per capita*, porque vamos usar o cálculo de Stratonovich (S), $\varepsilon(t)$ é o ruído branco padrão e $\sigma > 0$ a intensidade do ruído. Se usássemos o cálculo de Itô, deveríamos usar, em vez de $g(X)$, a taxa média aritmética de crescimento *per capita* $f(X) = g(X) + \sigma^2/2$. Para uma discussão detalhada sobre o tipo de cálculo a utilizar, ver Braumann (2007a, 2007b, 2007c). No que respeita a aplicações em dinâmica de populações, ver, por exemplo, Lange, Engen e Saether (2013) ou Panik (2017).

Para o modelo logístico clássico, g é estritamente decrescente de classe C^1, $g(0^+) > 0$ e $g(+\infty) < 0$, pelo que a equação diferencial estocástica (2) tem solução única e é um processo de difusão homógeneo com coeficientes de tendência (média infinitésimal) e de difusão (variância infinitésimal)

$$a(X) = rXg(X) + \frac{\sigma^2}{2}X = rXf(X) \tag{3}$$

e

$$b(X) = \sigma^2 X^2, \tag{4}$$

respetivamente. O espaço de estados $]0, +\infty[$ tem fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$, ambas não atrativas e, portanto inatíngiveis, o que significa que não ocorre extinção matemática e não existem explosões. Estes resultados podem ser vistos em Braumann (1999). Definimos, no interior do espaço de estados, as medidas de escala e de velocidade, cujas densidades são dadas por

$$s(y) := \exp\left(-\int_n^y \frac{2a(\theta)}{b(\theta)}d\theta\right) \tag{5}$$

e

$$m(y) := \frac{1}{b(y)s(y)}, \tag{6}$$

respectivamente.

Existe densidade estacionária, o que significa que há uma distribuição de equilíbrio com densidade proporcional a $m(y)$ para a qual converge a distribuição de probabilidade do tamanho da população quando $t \to +\infty$.

Os efeitos de Allee descrevem situações em que a taxa de crescimento populacional diminui quando a densidade populacional baixa. Ao contrário do que sucede nos modelos clássicos, em particular, no modelo logístico, em que a taxa de crescimento *per capita* é máxima para densidades reduzidas, a presença dos efeitos de Allee implica que pequenos grupos tenham menor sucesso reprodutivo e/ou menor probabilidade de sobrevivência. Tal poderá ocorrer devido à dificuldade em encontar parceiros para acasalamento, à perda de cooperação na defesa contra predadores, à menor eficiência na procura de alimentos ou a efeitos genéticos associados à consanguinidade. Os efeitos de Allee são, por isso, particulamente relevantes na conservação de espécies ameaçadas e na gestão de populações. Para uma discussão clássica e detalhada deste fenómeno, ver Allee *et al.* (1949).

Existem dois tipos de efeitos de Allee: fortes e fracos. Fala-se em efeitos de Allee fortes quando existe um limiar crítico que a população tem de ultrapassar para que a sua taxa de crescimento seja

positiva; abaixo desse limiar, a taxa de crescimento é negativa e a população tende para a extinção. Por sua vez, ocorrem efeitos de Allee fracos quando não existe esse limiar crítico; a taxa de crescimento *per capita* mantém-se positiva mesmo para densidades populacionais muito baixas, embora assuma valores bastante reduzidos nessas condições.

Em Braumann e Carlos (2013) apresentámos um estudo do modelo estocástico geral de crescimento populacional incorporando efeitos de Allee fortes. Posteriormente, em Braumann e Carlos (2015), analisámos o crescimento populacional no contexto de um modelo estocástico geral com efeitos de Allee fracos. Em Carlos e Braumann (2017), desenvolvemos um estudo abrangente do modelo geral de crescimento populacional (com f arbitrária satisfazendo condições adequadas), considerando os três cenários: ausência de efeitos de Allee, presença de efeitos de Allee fracos e presença de efeitos de Allee fortes.

Aqui vamos utilizar o modelo logístico com efeitos de Allee em que a taxa média geométrica de crescimento *per capita*, g, é dada por

$$g(X) = r\left(1-\frac{X}{K}\right)\left(\frac{X-A}{K-A}\right), \tag{7}$$

onde A é o chamado parâmetro de Allee. Quando $-K < A < 0$ o modelo corresponde ao modelo logístico com efeitos de Allee fortes. Se $0 < A < K$ temos o modelo logístico com efeitos de Allee fracos. Por fim, se $A \to -\infty$ temos o modelo logístico clássico. A equação diferencial estocástica (2) tem solução única e é um processo de difusão homógeneo com coeficientes de tendência e de difusão dados por (3) e (4), respetivamente. O espaço de estados $]0,+\infty[$ tem como fronteiras $X = 0$ e $X = +\infty$. No modelo com efeitos de Allee fracos, de forma semelhante ao modelo logístico clássico, a fronteira $X = 0$ é não atrativa, o que significa que a extinção matemática ocorre com probabilidade zero. No modelo com efeitos de Allee forte, a fronteira $X = 0$ é atrativa, embora inatingível em tempo finito, ou seja, $X(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$, havendo, portanto, extinção matemática. Independentemente da presença ou não de efeitos de Allee, a extinção "realista"ocorre com probabilidade um. Para ambos os modelos, com efeitos de Allee fracos ou fortes, e também no modelo logístico clássico, a fronteira $X = +\infty$ é não atrativa, o que significa que não existem explosões, garantindo a existência e unicidade de solução da equação diferencial estocástica (2).

Para o modelo logístico com efeitos de Allee fracos, a densidade de velocidade (6) é integrável e, consequentemente, a densidade estacionária existe e é proporcional à densidade de velocidade, sendo dada por

$$p(y) = \frac{1}{D\sigma^2} y^{-\frac{2rA}{\sigma^2(K-A)}-1} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2 K(K-A)}\left(y-(K+A)\right)^2\right), \tag{8}$$

onde D é uma constante tal que $\int_0^{+\infty} p(z)dz = 1$. Por outro lado, para o modelo logístico estocástico com efeitos de Allee fortes, não existe densidade estacionária porque a densidade de velocidade não é integrável.

3. Tempos de extinção

Um dos temas a que me tenho dedicado nos últimos anos, em colaboração com o Professor Carlos Braumann, é o dos riscos de extinção das populações aferidos pelos tempos de extinção realista, tema que é particulamente relevante no contexto atual (ver Carlos (2013)). Esta problemática assume particular relevância face ao crescente número de populações ameaçadas, resultado de alterações ambientais globais e de pressões de origem humana. A compreensão quantitativa dos fatores que influenciam o risco e o tempo até à extinção constitui, assim, uma questão central.

Podemos definir dois tipos de extinção: a extinção matemática e a extinção realista. Considera-se que há extinção matemática quando o tamanho da população tende para zero, $X(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$. No entanto, sendo $X(t)$ o tamanho da população uma variável continua, admite tamanhos da população muito pequenos (como, por exemplo, 0.1 indíviduos) impossíveis de ocorrer. Assim, embora a população não esteja extinta do ponto de vista matemático, deve ser considerada extinta numa perspetiva biológica. Além disso, sabe-se que muitas populações, ao atingirem um determinado número de indíviduos não têm qualquer hipótese de sobreviver e reproduzir-se, devendo nesse caso, ser consideradas extintas do

ponto de vista realista. Assim, definimos à partida um limiar realista de extinção, que designamos por q, com $0 < q < x$, de modo a garantir que a população não se encontra extinta no instante inicial. Sendo o processo ergódico, conclui-se que, quase certamente atingirá (mais cedo ou mais tarde) o limiar realista de extinção. Torna-se, assim, fundamental determinar se esse acontecimento ocorre num horizonte temporal curto ou prolongado. Designamos por tempo de extinção o tempo T_q de primeira passagem por q, definido por $T_q = \inf\{t > 0 : X(t) = q\}$.

Em Carlos, Braumann e Filipe (2013) apresentámos a expressão recursiva para o momento de ordem n do tempo de primeira passagem de $X(t)$ por q, supondo que $X(0) = x > 0$,

$$M_q^{(n)}(x) = E[(T_q)^n | X(0) = x] = 2\int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} n M_q^{(n-1)}(\theta) m(\theta) d\theta d\zeta, \tag{9}$$

com $M_q^{(0)}(x) = 1$. Fazendo $n = 1$ obtemos o tempo médio de extinção

$$E[T_q | X(0) = x] = 2\int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} m(\theta) d\theta d\zeta. \tag{10}$$

Com os momentos de primeira e segunda ordem e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos a expressão da variância do tempo de extinção

$$V[T_q | X(0) = x] = 8\int_q^x s(\zeta) \int_\zeta^{+\infty} s(\mu) \left(\int_\mu^{+\infty} m(\theta) d\theta \right)^2 d\mu d\zeta. \tag{11}$$

Em Carlos e Braumann (2005) e Carlos e Braumann (2006) fizemos um estudo detalhado dos tempos de extinção para o modelo logístico e também para o modelo de Gompertz, usando o cálculo de Stratonovich e o cálculo de Itô. Apresentámos as expressões que descrevem o comportamento da média e do desvio padrão dos tempos de extinção, e ilustrámos os resultados obtidos com diversos exemplos numéricos. Concluímos que o tempo de extinção é tanto maior quanto maior for a população no instante inicial e diminui quando o parâmetro de crescimento intrínseco diminui ou quando a capacidade de sustento do meio se aproxima do limiar de extinção. Verificámos ainda que o desvio padrão tem a mesma ordem de grandeza do tempo médio. Em Braumann e Carlos (2015) estudámos os tempos de extinção para o modelo logístico estocástico com efeitos de Allee. Em Carlos e Braumann (2014) e em Carlos (2018) fizemos um estudo dos tempos de extinção considerando situações em que a verdadeira taxa de crescimento *per capita* se afasta dos modelos clássicos.

Também é possível obter os momentos de ordem n do tempo de primeira passagem por um limiar superior, que designamos por Q, com $x < Q$, em particular, a média e a variância do tempo de primeira passagem por Q, relevante, por exemplo, na preservação de algumas espécias e na previsão de surtos de pragas agrícolas. Estas expressões podem ser consultadas em Carlos, Braumann e Filipe (2013) ou Filipe, Braumann e Carlos (2015), ainda que aí sejam apresentadas num contexto distinto, nomeadamente o de modelos de crescimento individual.

4. Impacto dos efeitos de Allee

Vamos agora avaliar o impacto dos efeitos de Allee nos tempos de extinção usando, para efeitos comparativos, o modelo logístico estocástico e o modelo logístico estocástico com efeitos de Allee. Para facilitar a análise e como é tradicional em estudos de sistemas dinâmicos, trabalhamos com grandezas adimensionais. Em particular, introduzimos os seguintes parâmetros: $R = \frac{r}{\sigma^2}$, $d = \frac{q}{K}$, $\gamma = \frac{A}{K}$ e $z = \frac{x}{q}$. Aqui R pode ser interpretado como uma razão sinal/ruído, traduzindo o balanço ente a taxa de crescimento determinística e a intensidade das flutuações estocásticas. O parâmetro d representa o limiar de extinção expresso como fração da capacidade de sustento do meio. De forma análoga, γ corresponde ao limiar de Allee, também expresso como fração da capacidade de sustento do meio. Por fim, z mede o afastamento relativo da população inicial em relação ao limiar de extinção.

Para este modelo, utilizando as grandezas adimensionais, obtivemos em Braumann e Carlos (2015) a seguinte expressão para a média do tempo de extinção multiplicado por r (o inverso do tempo de geração em condições "favoráveis") de forma a ser expresso de forma adimensional em número de gerações:

$$rE[T_q|X(0)=x] = 2R\int_{\sqrt{\frac{R}{1-\gamma}}d}^{\sqrt{\frac{R}{1-\gamma}}dz} u^{2R\frac{\gamma}{1-\gamma}-1} e^{\left(u-\sqrt{\frac{R(1+\gamma)^2}{1-\gamma}}\right)^2} \int_u^{+\infty} y^{-2R\frac{\gamma}{1-\gamma}-1} e^{-\left(y-\sqrt{\frac{R(1+\gamma)^2}{1-\gamma}}\right)^2} dydu. \quad (12)$$

Também obtivemos a expressão da variância do tempo de extinção em forma adimensional:

$$\begin{aligned} r^2V[T_q|X(0)=x] &= 8R^2\int_{\sqrt{\frac{R}{1-\gamma}}d}^{\sqrt{\frac{R}{1-\gamma}}dz} u^{2R\frac{\gamma}{1-\gamma}-1} e^{\left(u-\sqrt{\frac{R(1+\gamma)^2}{1-\gamma}}\right)^2} \int_u^{+\infty} v^{2R\frac{\gamma}{1-\gamma}-1} e^{\left(v-\sqrt{\frac{R(1+\gamma)^2}{1-\gamma}}\right)^2} \\ &\quad \left(\int_v^{+\infty} y^{-2R\frac{\gamma}{1-\gamma}-1} e^{-\left(y-\sqrt{\frac{R(1+\gamma)^2}{1-\gamma}}\right)^2} dy\right)^2 dvdu. \quad (13) \end{aligned}$$

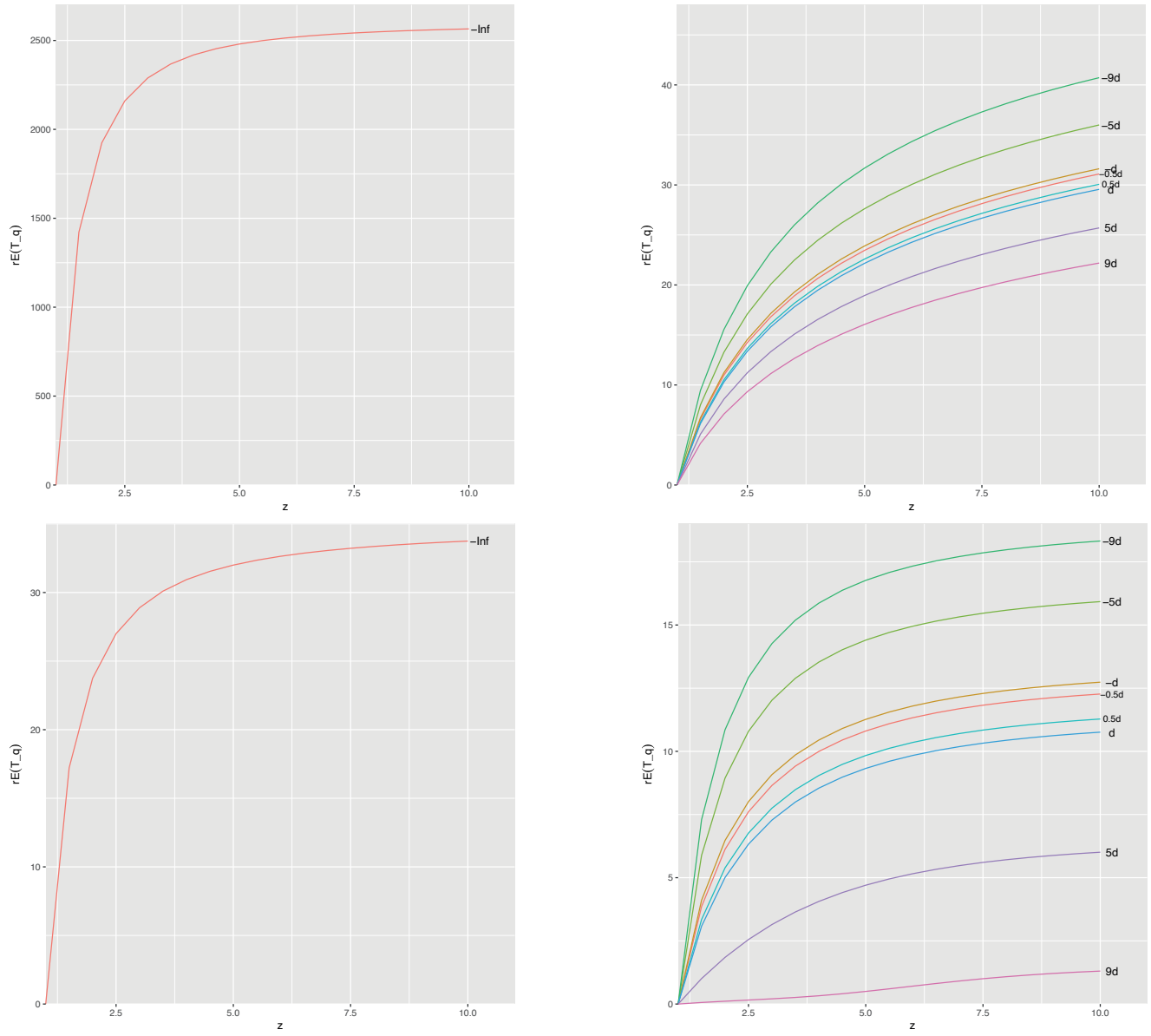


Figura 1: Comportamento da média $rE[T_q|X(0)=x]$ do tempo de extinção da população em função de $z := \frac{x}{q}$, para o modelo logístico (à esquerda) e para o modelo logístico com efeitos de Allee (à direita). Consideramos $R := \frac{r}{\sigma^2} = 1$, $d := \frac{q}{K} = 0.01$ (em cima) e $d := \frac{q}{K} = 0.1$ (em baixo). Relativamente à intensidade dos efeitos de Allee, consideramos $\gamma = 0.5d, d, 5d, 9d$ (efeitos de Allee fortes) e $\gamma = -0.5d, -d, -5d, -9d$ (efeitos de Allee fracos).

Estas são as expressões para o cálculo de Stratonovich. Para o cálculo de Itô, as expressões teriam de ser ligeiramente adaptadas recorrendo à óbvia substituição dos parâmetros pelos parâmetros equivalentes neste cálculo.

Terminamos com alguns exemplos numéricos, que apresentamos na Figura 1, da média dos tempos de extinção para o modelo logístico sem efeitos de Allee, com efeitos de Allee fracos e com efeitos de Allee fortes. Para não alargarmos demasiado a extensão deste texto, apresentamos aqui apenas os gráficos relativos ao caso $R = 1$, ou seja, $r = \sigma^2$, o que significa um ruído de forte intensidade relativa, em que a extinção é relativamente rápida, mas fazemos notar que, para outros valores dos parâmetros, o tempo médio de extinção pode exceder a idade do Universo. Relativamente a d, consideramos dois cenários, $d = 0.01$ ou $d = 0.1$, equivalente a $q = K/100$ ou $q = K/10$, respetivamente. Foram ainda considerados diferentes valores de γ de modo a ter diferentes tipos e intensidades de efeitos de Allee. Na figura apresentamos exemplos gráficos não do tempo médio de extinção mas da grandeza adimensional $rE[T_q|X(0) = x]$ em função de $z = x/q$. À medida que z aumenta, ou seja, quanto maior for a população no instante inicial, maior é, em geral, o tempo necessário para que a população atinja o limiar de extinção "realista"q. Observa-se ainda que o tempo médio de extinção diminui quando d aumenta, ou seja, quando a capacidade de sustento do meio se aproxima do limiar de extinção. Por outro lado, à medida que γ aumenta, o tempo médio de extinção diminui, ou seja, quanto mais forte forem os efeitos de Allee, mais rapidamente ocorre a extinção "realista"da população. Independente da escolha dos parâmetros, a partir de uma determinada altura, ou seja, a partir de um determinado z o tempo médio estabiliza, ou seja o tempo de extinção não é muito influenciado pelo limiar de extinção q desde que a população inicial x dele esteja relativamente distante. O desvio padrão do tempo de extinção, não apresentado por razões de espaço, é da mesma ordem de grandeza da média.

5. Conclusão

Neste trabalho analisámos o modelo logístico estocástico de crescimento populacional em ambiente aleatório com e sem efeitos de Allee. Mostrámos que, no modelo logístico estocástico sem efeitos de Allee ou com efeitos de Allee fracos, a probabilidade de extinção matemática é zero e existe densidade estacionária. Por outro lado, na presença de efeitos de Allee forte, a extinção matemática ocorre quase certamente e não existe densidade estacionária. Relativamente à extinção realista, verificámos que esta ocorre com probabilidade um e obtivemos expressões para a média e a variância do tempo de extinção para o modelo considerado. Por fim, comparámos os tempos de extinção nos diferentes cenários (ausência de efeitos de Allee, com efeitos de Allee fracos e com efeitos de Allee fortes), destacando as diferenças introduzidas pela intensidade dos efeitos de Allee na dinâmica populacional.

Agradecimentos

A autora é membro do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto UID/04674/2025, https://doi.org/10.544.99/UID/04674/2025.

Referências

Allee, W. C., Emerson, A. E., Park, O., Park, T., Schmidt, K. P. (1949). *Principles of Animal Ecology*. Saunders, Philadelphia.

Braumann, C. A. (1999). Applications of stochastic differential equations to population growth. Em: *Proceedings of the Ninth International Colloquium on Differential Equations* (Bainov, D., Ed.), VSP, Utrecht, p. 47–52.

Braumann, C. A. (2007a). Itô versus Stratonovich calculus in random popupation growth. *Mathematical Biosciences*, **206**: 81–107.

Braumann, C. A. (2007b). Harvesting in a random environment: Itô or Stratonovich calculus. *Journal Theoretical Biology*, **244**: 424–432.

Braumann, C. A. (2007c). Population growth in random environments: wich stochastic calculus? *Bulle-*

tin of the International Statistical Institute, **LXII**: 5802–5805.

Braumann, C. A. e Carlos, C. (2013). Allee effects in randomly varying environments. Em: Proceedings of the 2013 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, (I. P. Hamilton, J. Vigo-Aguiar, J., Eds.), CMMSE, Cabo de Gata, Almería, Espanha, ISBN 978-84-616-2723-3, p. 304–307.

Braumann, C. A. e Carlos. C. (2015). Weak Allee effects population growth models in a random environment. Em*Proceedings 60th ISI World Statistics Congres*, 2455–2460.

Carlos, C. (2013). *Modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório, efeito de incorreta especificação do modelo, efeitos de Allee e tempos de extinção*, Tese de Doutoramento, Universidade de Évora

Carlos, C. (2018). Modelos de crescimento populacional usando equações diferenciais estocásticas – tempos de extinção e influência da incorreta especificação do modelo. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística*, **Outono 2018**: 19–24.

Carlos, C. e Braumann, C. A. (2005). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório. Em: Estatística Jubilar, Braumann, C. A., Infante, P., Oliveira, M. M., Alpízar-Jara, R. and Rosado, F. (Eds.), Edições SPE, p. 133–142.

Carlos, C. e Braumann, C. A. (2006). Tempos de extinção para populações em ambiente aleatório e cálculos de Itô e Stratonovich. Em: Ciência Estatística, L. Canto e Castro, E. G. Martins, C. Rocha, M. F. Oliveira, M. M. Leal e F. Rosado (Eds.), Edições SPE, p. 229–238.

Carlos, C., Braumann, C. A. (2014). Consequences of an Incorrect Model Specification on Population Growth. Em: New Advances in Statistical Modeling and Applications, Studies in Theoretical and Applied Statistics, A. Pacheco, R. Santos, M. R. Oliveira, C. D. Paulino (eds.), Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-319-05322-6, p.105-113.

Carlos, C. e Braumann, C. A. (2017). General population growth models with Allee effects in a random environment. *Ecological Complexity*, **30**: 26–33.

Carlos, C., Braumann, C. A. e Filipe, P. A. (2013). Models of individual growth in a random environment: study and application of first passage times. Em Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications, J. L. da Silva, F. Caeiro, I. Natário, C. A. Braumann, M. L. Esquível, J. Mexia (eds.), Springer, Berlin, p. 103–111.

Filipe, P. A., Braumann C. A. e Carlos, C. (2015). Profit optimization for cattle growing in a randomly fluctuating environment. *Optimization*, **64**(6): 1393-1407.

Gihmann, I. I. e Skorohod, A. V. (1972). *Stochastic Differential Equations*. Springer, New York.

Lange, R., Engen, S. e Saether, B-E. (2013). *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*. Oxford Universty Press, Oxford.

Karlin, S. e Taylor , H. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, Orlando.

Panik, M. J. (2017). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications in Population Dynamics Modeling*. John Wiley & Sons,Inc.

Modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório: políticas de pesca e otimização do lucro

Nuno M. Brites, nbrites@iseg.ulisboa.pt

ISEG Research, ISEG Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal

1 Introdução

A exploração de populações biológicas em ambientes naturais decorre em contexto variável com processos de crescimento e de renovação fortemente influenciados por fatores exógenos (Clark, 1990). As condições climáticas, as variações na disponibilidade de alimento, as alterações do habitat e as interações ecológicas introduzem componentes aleatórias na dinâmica das populações e implicam variações significativas na evolução do seu tamanho (Lande e Sæther, 2003). Estas fontes de incerteza comprometem a adequação de descrições puramente determinísticas na análise de políticas de pesca e justificam a necessidade de modelos que incorporem a variabilidade ambiental (Lungu e Øksendal, 1996).

É por isso natural, neste enquadramento, que a modelação estocástica da dinâmica populacional surja como uma extensão dos modelos clássicos (entenda-se, determinísticos) de crescimento, permitindo representar a evolução do tamanho da população como um processo contínuo no tempo, sujeito a perturbações aleatórias que atuam sobre a taxa de crescimento *per capita* (Beddington e May, 1977).

A presença de um termo com ruído conduz à formulação de Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs), nas quais a variabilidade ambiental é modelada por processos de difusão, preservando propriedades essenciais como a positividade das soluções e a coerência biológica do modelo (Braumann, 1999). Adicionalmente, a utilização de EDEs na modelação do tamanho de populações permite analisar propriedades assintóticas tais como a extinção e a existência de regimes estacionários, aspetos centrais na avaliação da sustentabilidade da exploração e do impacto da incerteza ambiental sobre o risco de colapso populacional (Alvarez e Shepp, 2001). Em simultâneo, fornece uma base matemática consistente para a formulação de problemas de otimização bio-económica, onde o esforço de pesca atua como variável de controlo num sistema dinâmico estocástico (Alvarez e Shepp, 1998; Brites, 2017).

O objetivo consiste em maximizar o lucro esperado resultante da atividade pesqueira, tendo em conta simultaneamente a evolução (natural) da população e os custos associados à atividade de pesca. No entanto, a presença de ruído ambiental altera profundamente a estrutura das políticas ótimas obtidas, conduzindo a soluções que diferem substancialmente das obtidas em contexto determinístico (Alvarez, 2000). Em particular, quando a variabilidade ambiental é relevante, as políticas de esforço que maximizam o lucro esperado tendem a depender fortemente do estado instantâneo da população, resultando em políticas profundamente instáveis. Este comportamento levanta questões fundamentais sobre a viabilidade prática das políticas ótimas e motiva a análise de políticas alternativas que privilegiem estabilidade, sustentabilidade e aplicabilidade operacional (Braumann, 2002).

2 Modelos descritos por equações diferenciais estocásticas

A dinâmica do tamanho de uma população pode ser descrita por EDEs com ruído, que representa a influência direta da variabilidade ambiental na taxa de crescimento *per capita* da população. A forma funcional geral

do modelo, de acordo com o trabalho pioneiro de Beddington e May (1977), é

$$dX(t) = \Big(f(X(t)) - qE(t)\Big)X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dW(t), \quad X(0) = x_0, \tag{1}$$

onde $X(t)$ denota o tamanho da população no instante t, $f(X(t)) = f(X)$ descreve a taxa natural de crescimento *per capita* da população, $E(t) \geq 0$ representa o esforço de pesca, $q > 0$ é o coeficiente tecnológico associado à arte de pesca (conhecido como capturabilidade), $\sigma > 0$ mede a intensidade das flutuações ambientais, $W(t)$ é um processo de Wiener padrão e x_0 é o tamanho inicial da população (que assumimos ser conhecido).

Um dos modelos de crescimento natural amplamente utilizado (Brites e Braumann, 2017), é o modelo logístico,

$$f(X) = r\left(1 - \frac{X}{K}\right),$$

onde $r > 0$ é a taxa intrínseca de crescimento e $K > 0$ a capacidade de sustento do meio. Para este modelo, a respetiva EDE (1) é

$$dX(t) = \left[rX(t)\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right) - qE(t)X(t)\right]dt + \sigma X(t)\,dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

Outro modelo tipicamente utilizado em pescas (Brites e Braumann, 2019b) é o modelo de Gompertz,

$$f(X) = r\ln\left(\frac{K}{X}\right),$$

conduzindo à EDE

$$dX(t) = \left[rX(t)\ln\left(\frac{K}{X(t)}\right) - qE(t)X(t)\right]dt + \sigma X(t)\,dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

A aplicação destes dois modelos permite verificar, por exemplo, até que ponto as conclusões relativas às políticas de pesca dependem da forma funcional específica do crescimento natural (Brites, 2022).

Os modelos acima representados não prevêm situações em que o crescimento *per capita* é reduzido quando o tamanho da população atinge níveis baixos (ao contrário do que seria esperado). Esta realidade pode revelar a existência de efeitos de Allee (Brites e Braumann, 2020b, 2022) e requer outra formulação para o modelo de crescimento, como por exemplo,

$$f(X) = r\left(1 - \frac{X}{K}\right)\left(\frac{X - A}{K - A}\right),$$

onde $A > 0$ representa um parâmetro associado aos efeitos de Allee. Este modelo denota-se por modelo logístico com efeitos de Allee e conduz à EDE

$$dX(t) = \left[rX(t)\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)\left(\frac{X(t) - A}{K - A}\right) - qE(t)X(t)\right]dt + \sigma X(t)\,dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

Associado aos modelos de crescimento de populações com pesca, existem os modelos económicos (Clark, 1990). A componente económica pode ser formulada assumindo que a captura é proporcional ao esforço e ao tamanho da população, isto é, $H(t) = qE(t)X(t)$. O rendimento por unidade de tempo pode ser definido por $P(t) = (p_1 - p_2H(t))H(t)$, onde $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ são constantes. Os custos associados à pesca podem ser modelados por uma função convexa do esforço de pesca, usualmente da forma $C(t) = c_1E(t) + c_2E^2(t)$, onde $c_1 \geq 0$ e $c_2 > 0$ são constantes. Assim, o lucro por unidade de tempo pode ser definido pela diferença entre receitas e custos, isto é,

$$\Pi(t) = P(t) - C(t) = (p_1qX(t) - c_1 - (p_2q^2X^2(t) + c_2)E(t))E(t).$$

O critério de desempenho económico consiste na maximização do lucro esperado descontado acumulado num horizonte temporal $[0, T]$,

$$V := \max_{E(t)} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\delta t}\Pi(t)\,dt \Big| X(0) = x_0\right], \tag{2}$$

onde $\delta \geq 0$ é uma taxa de desconto associada, por exemplo, a uma maior valorização dos lucros presentes tendo em conta as oportunidades do seu investimento rentável e outros benefícios sociais.

3 Políticas com esforço de pesca variável

A formulação do problema (2) é um problema de controlo ótimo estocástico. A variável de controlo é o esforço de pesca $E(t)$, sujeito às restrições $0 \leq E_{\min} \leq E(t) \leq E_{\max} \leq +\infty$, e à dinâmica da população dada pela Eq. (1).
A aplicação do princípio da programação dinâmica (Hanson, 2007) à função valor

$$V(t,y) = \max_{E(\tau)} \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\delta(\tau-t)}\Pi(\tau)\,d\tau \middle| X(t) = y\right], \tag{3}$$

conduz à equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \max_{E(t)}\left\{\Pi(x,E(t)) + \mu(x,E(t))\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) - \delta V(t,x)\right\}, \tag{4}$$

com condição terminal $V(T,X(T)) = 0$, onde $\mu(X(t),E(t)) = (f(X(t)) - qE(t))X(t)$ representa o coeficiente de tendência da EDE (1), que, dependendo da expressão de f, representa o modelo biológico considerado (logístico, Gompertz, logístico com efeitos de Allee, entre outros).
A equação de HJB (4) não admite solução analítica fechada na generalidade dos casos. A sua resolução requer a aplicação de métodos numéricos baseados na discretização do domínio temporal e do espaço de estados. Tipicamente, considera-se uma malha uniforme em t e x e recorre-se a esquemas de diferenças finitas implícitos do tipo Crank-Nicolson, que garantem, sob determinadas condições, a estabilidade e convergência numérica adequada.
Em ambiente aleatório, a trajetória da população oscila continuamente em torno de um determinado valor devido ao termo de difusão presente na EDE (1). Como consequência, o esforço ótimo alterna frequentemente entre regimes de pesca intensa (valores próximos de $E_{\max}$) e regimes de pesca nula ou reduzida (valores próximos de $E_{\min}$). Estas oscilações abruptas não são resultado de decisões discricionárias do gestor da pescaria, mas sim uma consequência estrutural da combinação entre ruído ambiental e a maximização instantânea do lucro esperado.
A análise das trajetórias simuladas evidencia que a variabilidade do esforço é elevada mesmo quando os parâmetros económicos e biológicos são mantidos constantes. Pequenas flutuações do tamanho populacional podem induzir alterações bruscas no esforço ótimo, conduzindo a um padrão temporal caracterizado por picos de esforço máximo intercalados com períodos de encerramento total da atividade pesqueira. Este comportamento tem implicações económicas diretas. A instabilidade do esforço traduz-se em instabilidade do rendimento económico, com forte variabilidade do lucro ao longo do tempo. Adicionalmente, a existência de períodos frequentes de esforço nulo implica interrupções recorrentes da atividade da pescaria, com impactos sociais e operacionais significativos.
Outro aspeto crítico prende-se com a implementação prática da política ótima. A determinação do esforço ótimo em cada instante requer, por exemplo, a estimação contínua do tamanho populacional $X(t)$. Porém, na prática, esta tarefa está sujeita a atrasos, erros de medição e custos elevados, tornando inviável a aplicação rigorosa de uma política que dependa de informação instantânea e precisa do tamanho da população.
A influência do ruído ambiental é particularmente evidente quando se comparam cenários com diferentes valores da intensidade das flutuações ambientais, σ. À medida que a intensidade do ruído aumenta, as flutuações do tamanho populacional tornam-se mais pronunciadas e a frequência de alternância entre regimes de esforço aumenta. Em regimes de elevada variabilidade ambiental, a política ótima pode conduzir a uma sucessão rápida de decisões extremas, agravando os problemas de aplicabilidade.
A presença de efeitos de Allee acentua ainda mais estes fenómenos. Quando o crescimento *per capita* é reduzido a baixos níveis populacionais, as flutuações induzidas pelo ruído podem empurrar o sistema para regiões do espaço de estados onde o esforço ótimo é nulo durante períodos prolongados. Em tais regimes, a política ótima de esforço variável tende a privilegiar estratégias muito conservadoras, alternadas com episódios de pesca intensa quando a população recupera, aumentando a instabilidade global.
Em conclusão, a análise de políticas ótimas com esforço variável mostra que, embora estas maximizem o lucro esperado, apresentam características estruturais que dificultam a sua aplicação. A elevada variabilidade do esforço e a dependência de informação contínua sobre o tamanho da população motivam a análise de

políticas alternativas que sacrifiquem marginalmente a optimalidade teórica em favor de maior estabilidade e viabilidade operacional.

4 Políticas com esforço de pesca constante

Como alternativa às políticas ótimas de esforço variável, podemos considerar a adoção de políticas de esforço constante (Brites, 2017; Brites e Braumann, 2017, 2019b, 2023), nas quais o esforço de pesca é mantido constante ao longo do tempo, isto é, $E(t) \equiv E$. Neste caso, a dinâmica populacional passa a ser descrita pela EDE

$$dX(t) = \Big(f(X(t)) - qE\Big)X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dW(t), \quad X(0) = x_0. \tag{5}$$

Por exemplo, caso o modelo logístico seja adotado, a EDE assume a forma

$$dX(t) = \left[rX(t)\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right) - qEX(t)\right]dt + \sigma X(t)\,dW(t), \quad X(0) = x_0.$$

Quando a condição $r - qE > \sigma^2/2$ é satisfeita, o processo $X(t)$ admite uma distribuição estacionária pertencente à família das distribuições gama, sendo dada, a menos de uma constante de normalização, por

$$p(x) = x^{\alpha-1}\exp(-\beta x), \qquad x > 0,$$

onde os parâmetros α e β dependem de r, K, qE e σ.
A existência de um regime estacionário permite definir quantidades económicas de longo prazo, isto é, quando $t \to +\infty$, de forma consistente. Em particular, o lucro médio por unidade de tempo em regime estacionário é dado por

$$\mathbb{E}\big[(p_1 q X_\infty - c_1 - (p_2 q^2 X_\infty^2 + c_2)E)E\big], \tag{6}$$

onde X_∞ representa o processo em regime estacionário cuja densidade de probabilidade é dada por p. Podemos assim definir um problema de otimização relativamente ao esforço constante de pesca, E, sendo conduzidos à determinação de um esforço ótimo sustentável E^{**} que maximiza (6).
Uma análise análoga pode ser realizada quando se considera que o modelo de crescimento é o modelo de Gompertz. Embora a forma explícita da densidade estacionária não seja a mesma do modelo logístico, o processo admite igualmente um regime estacionário sob determinadas condições, permitindo a definição de um lucro médio de longo prazo e a determinação de um esforço ótimo sustentável. A comparação entre os dois modelos mostra que a estrutura geral dos resultados é preservada, apesar das diferenças na forma funcional do crescimento natural (Brites e Braumann, 2019a,b).
Para o modelo logístico com efeitos de Allee, a análise do regime estacionário torna-se mais delicada. Dependendo da intensidade do efeito de Allee e do nível de esforço, o processo pode admitir um regime estacionário suportado num intervalo limitado do espaço de estados ou apresentar maior propensão para a extinção (Brites e Braumann, 2020b). Neste caso, a definição de políticas sustentáveis exige particular cuidado, pois níveis de esforço aparentemente moderados podem conduzir a uma redução significativa do crescimento efetivo e a perdas económicas acentuadas.

5 Comparação entre políticas

Para comparar políticas de esforço constante com políticas ótimas de esforço variável, recorre-se a métodos numéricos e técnicas de simulação de Monte Carlo. As trajetórias da EDE são geradas através de esquemas de Euler, e o lucro acumulado é calculado ao longo de horizontes temporais finitos.
Os resultados numéricos mostram que, em cenários realistas e para horizontes temporais suficientemente longos (por exemplo, $T = 50$ anos), a política sustentável de esforço constante apresenta um desempenho económico muito próximo ao da política ótima de esforço variável. A diferença relativa de lucro acumulado é tipicamente pequena, frequentemente de apenas alguns pontos percentuais, apesar da simplicidade substancial da política de esforço constante. Em Brites e Braumann (2017, 2019a) os resultados das simulações mostram que estas reduções são, respetivamente, -4.1% e -1.7% (modelo de Gompertz).

Esta proximidade de desempenho é particularmente evidente quando o sistema se encontra próximo do regime estacionário durante a maior parte do horizonte considerado. Nestas situações, a política de esforço variável explora essencialmente as flutuações de curto prazo do tamanho populacional, obtendo ganhos marginais que não compensam a instabilidade adicional introduzida.

A análise de sensibilidade relativamente aos parâmetros biológicos e económicos revela que as diferenças entre políticas se acentuam sobretudo em três tipos de cenários. O primeiro corresponde a valores baixos da taxa intrínseca de crescimento, r, nos quais a população recupera lentamente de choques negativos. O segundo corresponde a níveis elevados de variabilidade ambiental, representados por σ, que aumentam a frequência de flutuações extremas. O terceiro corresponde a horizontes temporais curtos, nos quais o sistema não atinge um regime próximo do estacionário.

Para além da política de esforço constante, podem igualmente considerar-se políticas intermédias (Brites e Braumann, 2019b, 2020a). Estas políticas, designadas por políticas *stepwise*, consistem na atualização do esforço apenas em instantes discretos, permanecendo este constante entre duas atualizações consecutivas. Embora impliquem uma menor frequência de ajustamentos do esforço face à política ótima de esforço variável, continuam a depender da estimação do tamanho populacional (ainda que em menos momentos). Em termos de lucro, revelam frequentemente uma vantagem relativamente às políticas de esforço constante, embora essa vantagem não seja, em geral, muito expressiva.

Podem ainda ser consideradas políticas penalizadoras (*penalised policies*) do esforço (Brites e Braumann, 2019a), nas quais se introduz um termo adicional de custo destinado a penalizar desvios do esforço relativamente a um valor de referência. Um exemplo típico de penalização é

$$\varepsilon(E - E_{\text{ref}})^2,$$

com $\varepsilon > 0$. Este tipo de penalização suaviza a variabilidade do esforço, reduzindo a amplitude das flutuações, mas não elimina a necessidade de ajustamentos frequentes nem a dependência estrutural da estimação do tamanho da população em cada instante de tempo.

Nos modelos que incorporam efeitos de Allee, as comparações quantitativas evidenciam que a presença destes efeitos pode modificar de forma significativa o equilíbrio entre políticas. À medida que a intensidade do efeito de Allee aumenta, observa-se uma diminuição do lucro global e um acentuar das diferenças entre políticas. Nestas circunstâncias, a escolha da política de exploração deve assumir um carácter particularmente prudente, dado que pequenas variações no esforço de pesca podem gerar impactos desproporcionados na dinâmica populacional e no desempenho económico. Adicionalmente, as políticas de esforço constante podem conduzir a lucros substancialmente inferiores aos obtidos com políticas de esforço variável. No que respeita às políticas *stepwise*, quando aplicáveis, estas tendem a atenuar consideravelmente essa diferença (Brites e Braumann, 2022).

Em síntese, a comparação quantitativa evidencia que políticas sustentáveis de esforço constante oferecem, salvo quando há efeitos de Allee acentuados, um compromisso favorável entre desempenho económico, estabilidade temporal e viabilidade operacional. Embora não maximizem formalmente o lucro esperado em todos os instantes, estas políticas capturam a maior parte do desempenho económico das políticas ótimas, evitando simultaneamente os problemas estruturais associados à variabilidade extrema do esforço.

6 Conclusões

A maximização do lucro esperado conduz a políticas de esforço variável dependentes do estado instantâneo da população. Estas políticas são obtidas pela resolução numérica da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman e apresentam, de forma sistemática, uma estrutura caracterizada por alternância entre regimes extremos de esforço. Em ambiente aleatório, pequenas flutuações do tamanho da população induzem variações abruptas do esforço ótimo de pesca, conduzindo a instabilidade temporal significativa e a uma forte dependência da estimação do tamanho da população.

Do ponto de vista estritamente matemático, estas políticas maximizam o valor esperado do lucro acumulado. No entanto, a sua estrutura implica exigências operacionais difíceis de satisfazer em contextos reais, nomeadamente a necessidade de ajustamentos frequentes do esforço, a ocorrência de períodos recorrentes de

encerramento da atividade pesqueira e a elevada variabilidade do lucro obtido. Estes aspetos não decorrem de decisões do gestor da pescaria, mas da própria natureza da política de pesca efetivamente aplicada.
Por outro lado, as políticas de pesca baseadas em esforço constante permitem explorar propriedades assintóticas do processo. Sob determinadas condições dos parâmetros biológicos, económicos e ambientais, a dinâmica populacional admite um regime estacionário. A existência de uma distribuição estacionária possibilita a definição rigorosa de critérios económicos de longo prazo, como o lucro médio por unidade de tempo, e conduz à determinação de um esforço ótimo sustentável que garante a sustentabilidade da população.
A comparação quantitativa entre as duas políticas mostra que, em cenários realistas e para horizontes temporais suficientemente longos, a diferença de desempenho económico entre a política ótima de esforço variável e a política sustentável de esforço constante é reduzida. Esta proximidade de desempenho decorre do facto de, em regime estacionário, grande parte do lucro acumulado ser gerada por comportamentos médios do sistema, enquanto os ganhos associados à exploração de flutuações de curto prazo são limitados.
As políticas intermédias, como políticas *stepwise*, ou políticas penalizadoras do esforço (*penalised policies*), introduzem mecanismos adicionais para reduzir a variabilidade do esforço. Embora estas abordagens atenuem alguns dos problemas associados às políticas ótimas de esforço variável, mantêm a dependência da estimação do tamanho da população e não apresentam, em termos de desempenho económico (ou seja, na otimização do lucro), grandes vantagens face à política sustentável de esforço constante.
A introdução de efeitos de Allee evidencia a importância da estrutura do crescimento populacional na avaliação das políticas ótimas de pesca. Quando os efeitos de Allee são fracos, o comportamento do sistema aproxima-se do caso sem efeitos de Allee e as conclusões relativas à proximidade de desempenho entre políticas mantêm-se. Quando estes efeitos se tornam mais pronunciados, o sistema torna-se mais sensível à intensidade da pesca, podendo ocorrer reduções significativas do lucro e aumento das diferenças entre políticas, o que reforça a necessidade de estratégias conservadoras, nomeadamente a adoção de políticas alternativas, como as políticas *stepwise*, que apresentam lucros substancialmente superiores às das políticas de esforço constante.
Em termos globais, os resultados obtidos indicam que, em ambientes sujeitos a incerteza ambiental, a procura de políticas matematicamente ótimas deve ser equilibrada com critérios de estabilidade, robustez e viabilidade operacional. As políticas baseadas em esforço constante capturam a maior parte do desempenho económico das políticas ótimas, evitando simultaneamente a instabilidade estrutural induzida pela variabilidade ambiental. Excetua-se o caso de haver efeitos de Allee com alguma intensidade, caso em que as políticas *stepwise* podem apresentar vantagens consideráveis sobre as de esforço constante.
Estas conclusões sublinham a relevância de abordagens que privilegiem soluções sustentáveis e operacionalmente exequíveis na gestão de recursos renováveis em ambientes aleatórios, mostrando que a renúncia a uma pequena perda de optimalidade esperada pode traduzir-se em ganhos significativos de estabilidade e aplicabilidade prática.
Por último, importa referir que existem extensões às políticas aqui apresentadas, nomeadamente as que envolvem o rendimento da pesca definido através de uma equação diferencial estocástica (Reis e Brites, 2025) ou a modelação do problema de obtenção do lucro através da teoria de opções financeiras, nomeadamente opções reais, mas, por razões de limitações de espaço não foram aqui referidas.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UID/06522/2025.

Referências

Alvarez, L. H. R. (2000). Singular stochastic control in the presence of a state-dependent yield structure. *Stochastic Processes and their Applications*, **86**, 323–343.

Alvarez, L. H. R. e Shepp, L. A. (1998). Optimal harvesting of stochastically fluctuating populations. *Journal of Mathematical Biology*, **37**, 155–177.

Alvarez, L. H. R. e Shepp, L. A. (2001). Optimal harvesting in the presence of density-dependent extinction probabilities. Turku Centre for Computer Science.

Beddington, J. R. e May, R. M. (1977). Harvesting populations in a random fluctuating environment. *Science*, **197**, 463–465.

Braumann, C. A. (1999). Variable effort fishing models in random environments. *Mathematical Biosciences*, **156**, 1–19.

Braumann, C. A. (2002). Variable effort harvesting models in random environments: generalization to density-dependent noise intensities. *Mathematical Biosciences*, **177–178**, 229–245.

Brites, N. M. (2017). *Stochastic Differential Equations Harvesting Models: Sustainable Policies and Profit Optimization*. PhD thesis, Universidade de Évora.

Brites, N. M. (2022). Optimal harvesting of stochastically fluctuating populations driven by a generalized logistic sde growth model. *Mathematics*, **10**(17).

Brites, N. M. e Braumann, C. A. (2017). Fisheries management in random environments: comparison of harvesting policies for the logistic model. *Fisheries Research*, **195**, 238–246.

Brites, N. M. e Braumann, C. A. (2019a). Fisheries management in randomly varying environments: comparison of constant, variable and penalized effort policies for the gompertz model. *Fisheries Research*, **216**, 196–203.

Brites, N. M. e Braumann, C. A. (2019b). Harvesting in a randomly varying environment: optimal, stepwise and sustainable policies for the gompertz model. *Statistics, Optimization and Information Computing*, **7**(3), 533–544.

Brites, N. M. e Braumann, C. A. (2020a). Harvesting policies with stepwise effort and logistic growth in a random environment. Em: Current Trends in Dynamical Systems in Biology and Natural Sciences (M. Aguiar, C. A. Braumann, B. W. Kooi, A. Pugliese, N. Stollenwerk, E. Venturino, eds.). *SEMA SIMAI Springer Series*, **21**, 95–110.

Brites, N. M. e Braumann, C. A. (2020b). Stochastic differential equations harvesting policies: Allee effects, logistic-like growth and profit optimization. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **36**(5), 825–835.

Brites, N. M. e Braumann, C. A. (2022). Profit optimization of stochastically fluctuating populations under harvesting: the effects of allee effects. *Optimization*, **71**(11), 3277–3293.

Brites, N. M. e Braumann, C. A. (2023). Harvesting optimization with stochastic differential equations models: is the optimal enemy of the good? *Stochastic Models*, **39**(1), 41–59.

Clark, C. W. (1990). *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*. 2nd ed., Wiley, New York.

Hanson, F. B. (2007). *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation*. SIAM, Philadelphia.

Lande, R., E. S. e Sæther, B.-E. (2003). *Stochastic Population Models in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, Oxford.

Lungu, E. M. e Øksendal, B. (1996). Optimal harvesting from a population in a stochastic crowded environment. *Mathematical Biosciences*, **145**, 47–75.

Reis, M. e Brites, N. M. (2025). Stochastic differential equations harvesting optimization with stochastic prices: Formulation and numerical solution. *Results in Applied Mathematics*, **25**.

Modelos estocásticos de crescimento individual e otimização do lucro

Patrícia A. Filipe, *patricia.filipe@iscte-iul.pt*

Iscte - Instituto Universitário de Lisboa, Escola de Gestão, Departamento de Métodos Quantitativos para a Gestão e a Economia
Universidade de Évora, Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA)
Iscte - Instituto Universitário de Lisboa, Business Research Unit - Iscte (BRU-Iscte)

Gonçalo Jacinto, *gjjacinto@ualg.pt*

Universidade do Algarve, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Matemática,
Universidade de Aveiro, Centro de I&D em Matemática e Aplicações (CIDMA),
Universidade de Évora, Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA)

1. Introdução

Os modelos estocásticos de crescimento individual desempenham um papel muito importante na descrição rigorosa da evolução temporal do tamanho de organismos sujeitos a flutuações ambientais. No texto publicado no Boletim da SPE Outono de 2018 (Filipe (2018)), apresentámos uma formulação abrangente para o estudo do crescimento individual através de equações diferenciais estocásticas (EDE), incluindo modelos monofásicos e multifásicos, versões com efeitos mistos e aplicações à previsão e à otimização económica no contexto da produção animal. Desde então, esta linha de investigação evoluiu significativamente, acompanhando a crescente disponibilidade de dados longitudinais, a integração de informação genética, a necessidade de metodologias de estimação mais robustas e abordagens de otimização do lucro de venda dos animais mais realistas.

A investigação desenvolvida teve sempre como ilustração dos métodos e motivação para o desenvolvimento teórico a aplicação ao crescimento de bovinos, inicialmente de fêmeas da raça Mertolenga (dados disponibilizados pela ACBM-Associação de Criadores de Bovinos Mertolengos) e posteriormente de machos das raças Mertolenga e Alentejana, no âmbito do Grupo Operacional GOBov+ - *Productivity improvement in the system of bovine raising for meat* (financiado pelo PDR 2020), que envolveu várias entidades, como, entre outras, o CIMA e outros centros de investigação da Universidade de Évora, o INIAV - Instituto Nacional de Investigação Agrária e Veterinária e associações de criadores das raças Mertolenga e Alentejana (ACBM e ACBRA).

Entre 2022 e 2024, foram publicados os artigos Jacinto *et al.* (2022a, 2022b) e Jamba *et al.* (2024a, 2024b), que aprofundam e estendem os resultados anteriormente obtidos. Estes trabalhos contribuíram para o desenvolvimento de modelos de otimização do lucro em mercados com estruturas de preço dependentes da idade e do peso (Jacinto *et al.* (2022a)); de métodos de estimação de máxima verosimilhança ponderados para lidar com dados com forte heterogeneidade na idade (Jacinto *et al.* (2022b)); de métodos de aproximação da função de verosimilhança em modelos mistos de EDE, em situações em que a verosimilhança exata não está disponível, propondo um novo método de aproximação inspirado no método Delta clássico (Jamba *et al.* (2022, 2024b)); e inclusão explícita de características genéticas nos parâmetros de modelos mistos de EDE (Jamba *et al.* (2024a)).

Mais recentemente, foi realizado o estudo da sensibilidade da aproximação pelo método Delta à distribuição dos efeitos aleatórios em modelos mistos de EDE (Jacinto *et al.* (2026a)) e a formulação de novas estratégias de otimização do lucro com base em modelos mistos de EDE (artigo submetido Jacinto *et al.* (2026b)) reforçando a robustez e aplicabilidade prática deste enquadramento metodológico. Estas contribuições consolidam a ligação entre modelação estocástica, métodos de estimação eficientes e problemas reais da produção animal, sobretudo no contexto da determinação de idades ótimas de abate

e estratégias de maximização do lucro.

O presente texto, pretende sintetizar e aprofundar estes desenvolvimentos, oferecendo uma visão integrada das extensões teóricas e das aplicações práticas que emergiram após 2018.

2. Modelos de equações diferenciais estocásticas para o crescimento individual

O crescimento individual de organismos deve ter em conta as flutuações aleatórias do ambiente que afectam a taxa de crescimento e os modelos de equações diferenciais estocásticas são mais adequados para descrever este fenómeno. Designando por X_t o peso do animal na idade t, e por Y_t o peso transformado, ou seja, $Y_t = h(X_t)$, onde h é uma função estritamente crescente continuamente diferenciável, podemos modelar a evolução do peso de um animal através de uma EDE da seguinte forma

$$dY_t = \beta(\alpha - Y_t)\,dt + \sigma dW_t, \;\; Y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

com $y_0 = h(x_0)$ e $\alpha = h(A)$, onde x_0 é o peso observado em t_0 e A representa o peso assintótico ou peso na maturidade do animal. O parâmetro β, positivo, é o coeficiente de crescimento e representa a taxa de aproximação à maturidade. O parâmetro σ mede a intensidade do efeito das flutuações ambientais no crescimento e W_t denota o processo de Wiener padrão. De acordo com a escolha da função h em (1) assim podemos obter as versões estocásticas de alguns dos modelos de crescimento mais frequentemente utilizados (Garcia (1983)). No caso da nossa aplicação ao peso, verificámos numa primeira fase dos nossos estudos que o mais adequado seria considerar $h(x) = \ln x$, que corresponde ao modelo de Gompertz, ou $h(x) = x^{1/3}$, que conduz ao modelo de Bertalanffy-Richards (Filipe *et al.* (2007)).

Tendo por base o modelo (1), podemos considerar que o tamanho assintótico A é fixo, ou seja, o mesmo para todos os indivíduos, e que o coeficiente de crescimento β é constante ao longo de toda a curva de crescimento. Este é o caso mais simples, em que existe uma única forma funcional para descrever a dinâmica média da curva de crescimento completa, e existem inúmeros trabalhos na literatura onde é possível encontrar as suas principais propriedades analíticas. A solução desta EDE autónoma existe e é única, e é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência dado por $\beta(\alpha - y)$ e coeficiente de difusão σ^2 (ver, por exemplo, Braumann (2005, 2019)).

Com o objetivo de melhorar os nossos modelos, pareceu-nos natural pela observação das curvas de crescimento dos animais e pelo facto de ser usual um crescimento mais acelerado em fases jovens de seres vivos abrandando com a idade, supor que o coeficiente de crescimento β tem valores diferentes para diferentes fases da vida do animal, conduzindo a uma generalização do modelo estocástico (1) ao caso multifásico (Filipe *et al.* (2012)).
Posteriormente, tentando ser ainda mais realistas, supomos que a evolução do peso pode diferir de animal para animal devido a características próprias de cada animal, por exemplo, devido a diferenças genéticas ou outras. Consequentemente, podemos admitir que os parâmetros de (1) são agora variáveis aleatórias. Neste caso, o modelo resultante também pode ser designado como modelo de EDE misto ou modelo de EDE de efeitos mistos. Começámos por construir uma extensão do modelo (1) ao caso em que o tamanho assintótico médio varia aleatoriamente de animal para animal. Mais concretamente, por exemplo, que α é uma variável aleatória independente de W_t com distribuição gaussiana de média μ e variância θ^2. Este tipo de modelos é estudado, por exemplo, em Ditlevesen *et al.* (2005), Donnet e Samson (2008), Donnet *et al.* (2010) e Picchini *et al.* (2006). Podemos obter a distribuição de probabilidade do tamanho modificado do indivíduo. Em termos do tamanho modificado, a sua média é dada pela expressão correspondente ao caso do α fixo, mas substituindo α pelo seu valor médio μ. A variância do tamanho modificado é constituída por dois termos, um traduz a variabilidade devido às variações ambientais ao longo da vida do indivíduo (equivalente à variância no caso do α fixo) e o outro traduz a variabilidade resultante das diferenças do tamanho médio assintótico existentes entre os indivíduos (Braumann *et al.* (2009), Filipe (2011)). Desenvolvimentos mais recentes apresentam a generalização ao caso em que o modelo pode admitir β como uma variável aleatória gaussiana com média λ e variância ω^2 e ao caso em que α e β são ambos aleatórios independentes seguindo uma distribuição gaussiana bivariada (Jamba *et al.* (2022, 2024b)).

Na sequência da participação da equipa no projeto GOBov+, para além das pesagens de um grande número de animais, de entre outras informações individuais dos animais tivemos acesso aos valores genéticos individuais dos animais estimados anualmente pelo INIAV. Foi assim possível concretizar um dos objetivos que tínhamos em mente em 2018, desenvolver teóricamente e aplicar modelos que incorporam a dependência dos parâmetros nas estimativas conhecidas dos valores genéticos dos animais, de forma a explicar parte da variação desses parâmetros. Os resultados deste estudo foram publicados em

Jamba *et al.* (2024a).

No contexto da estimação, o método de máxima verosimilhança tem sido o método base utilizado. No caso do modelo em que os parâmetros são fixos, constantes e iguais para todos os animais, é possível obter as expressões analíticas explícitas para a função de log-verosimilhança, as estimativas de máxima verosimilhança e os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros dos modelos (Filipe *et al.* (2010, 2012), Braumann *et al.* (2009)). Quando trabalhamos com modelos mistos de EDE, no caso em que α é o parâmetro aleatório é possível obter uma expressão exata fechada para a função de verosimilhança, mas tal não é possível para os casos em que β é aleatório, ou em que α e β são ambos aleatórios. Este facto fez com que fosse necessário utilizar métodos de aproximação para a função de verosimilhança. Foram estudados e adaptados métodos já existentes, como o método de Laplace. No entanto, o maior contributo foi o desenvolvimento de um novo método de aproximação por nós proposto, o método Delta, partindo da ideia base do método Delta da estatística clássica, mas neste contexto aproximando a função integranda da função de verosimilhança pelo valor esperado do seu desenvolvimento de Taylor de segunda ordem em torno da média do(s) parâmetro(s) aleatório(s) (Jamba *et al.* (2022, 2024b)).

O texto de Gonçalo Jacinto, Patrícia A. Filipe e Nelson T. Jamba neste número do Boletim é dedicado aos modelos mistos de EDE e aos métodos de estimação desenvolvidos neste contexto.

3. Otimização do Lucro

Os modelos de EDE descritos na secção anterior podem ser particularmente úteis na otimização do lucro para as entidades que se dedicam a produzir, criar e vender animais para o mercado de carne. Os primeiros passos do estudo desta temática encontram-se publicados em Filipe *et al.* (2015). Com base no modelo (1), com parâmetros constantes, podemos, por um lado, calcular o lucro médio obtido com a venda do animal em diferentes idades e, em particular, podemos determinar a idade ideal em que o criador deve vender o animal para maximizar o lucro médio. Também podemos obter a distribuição de probabilidade do lucro de venda e, em seguida, calcular as probabilidades envolvendo esse lucro. Por outro lado, sabendo qual o peso do animal exigido pelo mercado, podemos estudar as propriedades do tempo necessário para um animal atingir esse peso pela primeira vez com base na teoria do tempo de primeira passagem (ver, por exemplo, Braumann *et al.* (2009) e Carlos *et al.* (2013)), e usar esses resultados para determinar o peso ideal para obter o lucro médio máximo. Filipe *et al.* (2015) apresenta estes desenvolvimentos e a comparação entre abordagens. Neste trabalho foi utilizado um preço de venda do animal constante e uma estrutura simples de custos na recria e valores de mercado para uma situação em particular.

Em Jacinto *et al.* (2022a), ainda com base no modelo com parâmetros fixos, resolvemos um problema mais desafiante. Determinamos o valor esperado e o desvio padrão do lucro obtido com a criação e venda de um animal numa situação mais geral e mais realista, em que o preço pago aos produtores por kg de carne depende da idade do animal e da sua categoria de peso (as tabelas de venda são funções em escada do peso e idade do animal). Com base na curva de lucro esperado em função da idade do animal, foi possível obter a idade ótima de venda do animal, ou seja, a idade que maximiza o lucro esperado, bem como a probabilidade de atingir um lucro mínimo.

Mais recentemente, avanços foram feitos na atualização e ampliação desta linha de investigação em três direções. Em primeiro lugar, incorporando dados recentemente disponibilizados pela ACBM, incluindo dados atualizados sobre o crescimento dos animais e informações de mercado revistas. Em segundo lugar, atualizado as componentes económicas do modelo, nomeadamente os custos de alimentação considerando as novas rações usadas (alterados desde meados de 2019) e tabelas de preços de venda revistos, refletindo os valores atuais do mercado. Com a atualização dos dados económicos, procedeu-se à comparação de três estratégias distintas para a construção das curvas de lucro esperado. A primeira reproduz a abordagem utilizada no estudo inicial (Jacinto *et al.* (2022a)), em que a curva é estimada com base nos pares peso-idade observados no momento de entrada dos animais no processo de recria. A segunda estratégia utiliza pares peso-idade correspondentes a momentos posteriores a essa entrada. Por fim, a terceira recorre aos pares peso-idade imediatamente anteriores à idade de abate, sendo esta a abordagem que melhor reflete o que ocorre na prática no processo de recria. Em terceiro lugar, compara abordagens com base no modelo de EDE de efeitos fixos e com base no modelo de EDE de efeitos mistos para otimização do lucro nessas condições atualizadas, com foco no desempenho prático e na precisão preditiva (artigo submetido Jacinto *et al.* (2026b)).

Após a descrição dos trabalhos desenvolvidos, apresentamos agora de forma sucinta o desenvolvimento do momento de primeira e segunda ordem do custo, do preço de venda e do lucro.

Considere x_0 o peso, assumido como conhecido, do animal na idade t_0 em que é comprado e seja $t > t_0$ a idade de venda do animal. O lucro do criador ao vender o animal na idade t depende do tamanho do animal X_t nessa idade e é dado por $L_t = V_t(X_t) - C_t$, onde $V_t(X_t)$ é o preço de venda e C_t denota os custos de produção acumulados até à idade t, incluindo aquisição (se aplicável), alimentação e outras despesas de criação.

Para o preço de venda $V_t(X_t)$, temos $V_t(X_t) = P_t(X_t)RX_t$, onde R é a proporção de rendimento (o peso da carcaça em relação ao peso vivo do animal), de modo que RX_t é o peso da carcaça e $P_t(X_t)$ é o preço de venda por unidade de peso da carcaça, que pode depender da idade do animal t e da categoria de peso da carcaça RX_t. Para os custos de produção do animal até à idade t, C_t, temos

$$C_t = C_1 + C_2(t - t_0) + C_3 \int_{t_0}^{t} X_u \, du, \tag{2}$$

onde C_1 denota os custos fixos, C_2 os custos de manutenção por unidade de tempo e C_3 os custos de alimentação por unidade de tempo e peso.

3.1. Momentos dos custos

Pelo teorema de Fubini, o custo esperado para a criação de um animal é dado por

$$\mathbb{E}[C_t] = C_1 + C_2(t - t_0) + C_3 \int_{t_0}^{t} \mathbb{E}[X_u] \, du. \tag{3}$$

e a variância por

$$\mathrm{Var}[C_t] = (C_3)^2 \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \mathrm{Cov}[X_u, X_v] \, du \, dv. \tag{4}$$

Em Jacinto *et al.* (2022a), estes momentos foram desenvolvidos para uma estrutrura de custos genérica, sendo as expressões bastante complexas pelo que optámos por não as apresentar neste texto. Quando os custos de alimentação são, como no nosso caso, conhecidos apenas em média (não como uma função do peso), é utilizado um custo simplificado (Jacinto *et al.* (2022a)) $C_t \approx C_1 + C_U(t - t_0)$, onde $C_U = C_2 + C_4$ denota os custos de manutenção e alimentação por unidade de tempo. Neste caso, $\mathbb{E}[C_t] = C_1 + C_U(t - t_0)$ e $\mathrm{Var}[C_t] = 0$.

3.2. Momentos do preço de venda

Suponha que o preço unitário de venda $P_{t,j}$ se aplica na idade t quando o peso da carcaça RX_t se enquadra no intervalo $[a_{t,j-1}, a_{t,j}[$, $j = 1, \ldots, k$. Então

$$P_t(X_t) = \sum_{j=1}^{k} P_{t,j} \, I_{[a_{t,j-1}/R, a_{t,j}/R[}(X_t). \tag{5}$$

A receita esperada é

$$\mathbb{E}[V_t(X_t)] = R \sum_{j=1}^{k} P_{t,j} \int_{a_{t,j-1}/R}^{a_{t,j}/R} x f_{X_t}(x) \, dx, \tag{6}$$

e o segundo momento é

$$\mathbb{E}[V_t^2(X_t)] = R^2 \sum_{j=1}^{k} P_{t,j}^2 \int_{a_{t,j-1}/R}^{a_{t,j}/R} x^2 f_{X_t}(x) \, dx. \tag{7}$$

Portanto,

$$Var[V_t(X_t)] = R^2 \left(\sum_{j=1}^{k} P_{t,j}^2 \int_{a_{t,j-1}/R}^{a_{t,j}/R} x^2 f_{X_t}(x) \, dx - \left(\sum_{j=1}^{k} P_{t,j} \int_{a_{t,j-1}/R}^{a_{t,j}/R} x f_{X_t}(x) \, dx \right)^2 \right). \tag{8}$$

Usando o facto de Y_t ser Gaussiano com média e variância

$$\mu_t = \alpha + (y_0 - \alpha) e^{-\beta(t - t_0)}, \quad \sigma_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t - t_0)}).$$

os integrais em (6)–(8) obtiveram-se (Jacinto *et al.* (2022a)) de forma fechada usando a f.d. Gaussiana padrão $\Phi(\cdot)$, quer para o modelo de Gompertz (em que $Y_t = \ln X_t$ e, portanto, $X_t = e^{Y_t}$ é log-normal) quer para o modelo de Bertalanffy-Richards (em que $Y_t = X_t^{1/3}$ e, portanto, $X_t = Y_t^3$).

3.3. Momentos dos lucro de venda

Combinando as esperanças da receita e dos custos, o lucro esperado, $L_t(X_t)$, é

$$\mathbb{E}[L_t] = \mathbb{E}[V_t(X_t)] - C_1 - C_2(t-t_0) - C_3 \int_{t_0}^{t} \mathbb{E}[X_u]\, du, \tag{9}$$

onde $\mathbb{E}[V_t(X_t)]$ é dado pela expressão (6). Obteve-se também a expressão geral da variância de L_t. Se os custos tiverem de ser aproximados por $C(t) \approx C_1 + C_U(t-t_0)$, então

$$\mathbb{E}[L_t] = \mathbb{E}[V_t(X_t)] - C_1 - C_U(t-t_0) \text{ e } Var[L_t] = Var[V_t(X_t)]. \tag{10}$$

Em Jacinto *et al.* (2022a) são apresentados desenvolvimentos detalhados, sempre que possível em forma fechada, para os casos particulares dos modelos de EDE de Gompertz e de Bertalanffy-Richards.

4. Considerações finais

Os modelos de EDE permitiram obter estimativas realistas do lucro e da idade ótima de abate, com resultados consistentes com os resultados dos produtores. Estimou-se que os produtores estão a vender os animais ligeiramente mais cedo (cerca de um mês) do que a idade ótima de venda, o que se traduz numa redução média do lucro por animal entre 4€ e 10€. Também se concluiu que pequenas variações nos parâmetros têm impacto reduzido na decisão ótima, indicando robustez das soluções obtidas. O trabalho desenvolvido permitiu a construção de uma ferramenta informática de apoio à decisão, implementada pela RuralBit (parceira no projeto GOBov+) na plataforma GenPro utilizada pelos criadores das raças Mertolenga e Alentejana. A ferramenta permite de forma automática introduzir os dados da evolução do peso dos animais, os custos associados à recria e com isso prever a idade ótima de abate de cada animal.

Os novos desenvolvimentos mostraram que a utilização de dados recolhidos em momentos mais próximos do abate melhora significativamente a precisão das previsões de peso e idade, reduzindo o erro associado às decisões de venda. Conclui-se que embora a inclusão de efeitos aleatórios melhore a descrição biológica do crescimento e permita modelar a variabilidade entre animais, os ganhos preditivos em termos práticos dependem da qualidade e estrutura dos dados disponíveis.

Em suma, neste texto pretendemos apresentar os avanços que têm sido desenvolvidos pela equipa nos últimos anos no que diz respeito aos modelos de EDE mistos, a novas abordagens na estimação (para mais detalhes sugere-se a leitura do texto de Gonçalo Jacinto, Patrícia A. Filipe e Nelson T. Jamba neste número do Boletim) e a métodos atualizados, revistos e mais realistas de otimização do lucro de venda de um animal.

Futuramente, na linha de investigação de otimização do lucro de venda, pretende-se desenvolver métodos que incluem a integração de informações genéticas individuais e a sua influência nos parâmetros do animal. Eventualmente, ao associar o parâmetro aleatório aos valores genéticos do animal, deve ser possível explicar parte da variabilidade desse parâmetro entre os animais e, assim, reduzir as margens de erro nas previsões. Além disso, espera-se que plataformas de apoio à decisão em tempo real (por exemplo, com dashboards em Power BI ou utilização de métodos de Inteligência Artificial) e estratégias de otimização a nível de grupos de recria de animais aumentem ainda mais o impacto prático dessa estrutura para os produtores e as partes interessadas do setor.

Agradecimentos

Patrícia A. Filipe é membro do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, referência UID/04674/2025 (https://doi.org/10.544.99/UID/04674/2025). Gonçalo Jacinto é colaborador deste Centro e membro do CIDMA, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, referências UID/04106/2025 (https://doi.org/10.54499/UID/04106/2025) e UID/PRR/04106/2025 (https://doi.org/10.54499/UID/PRR/04106/2025).
Durante alguns anos os trabalhos decorreram no âmbito e com o apoio do Grupo Operacional GOBov+, PDR2020-1.0.1-FEADER-031130-GOBovMais-*Productivity improvement in the system of bovine raising for meat*, com financiamento do PDR 2020.

Referências

Braumann, C.A. (2005). *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas*. Edições SPE, Lisboa.

Braumann, C. A. (2019). *Introduction to Stochastic Differential Equations with Applications to Biology and Finance*. ISBN: 9781119166061, 9781119166078, 9781119166085, John Wiley & Sons Ltd., Hoboken N.J.

Braumann, C.A., Carlos, C., Filipe, P.A., Roquete, C.J. (2009). Growth of individuals in randomly fluctuating environments. Em: Proceedings of the 2009 International Conference in Computational and Mathematical Methods in Science e Engineering, (Vigo-Aguiar J., Alonso P., Oharu S., Venturino E. e Wade B., eds), Gijón, 201-212.

Carlos, C., Braumann, C.A., Filipe, P.A. (2013). Models of individual growth in a random environment: study and application of first passage times. Em: Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications (J. L. da Silva, F. Caeiro, I. Natário, C. A. Braumann, M. L. Esquível, J. Mexia, eds.), Springer, 103-111.

Ditlevsen, S., De Gaetano, A. (2005). Mixed effects in stochastic differential equations. *REVSTAT-Statistical Journal* **3**(2):137-153.

Donnet, S., Foulley, J.L., Samson, A. (2010). Bayesian analysis of growth curves using mixed models defined by stochastic differential equations. *Biometrics* **66**(3):733-741.

Donnet, S., Samson, A (2008). Parametric inference for mixed models defined by stochastic differential equations. *ESAIM P&S* **12**:196-218.

Filipe, P.A. (2011). *Equações Diferenciais Estocásticas na Modelação do Crescimento Individual em Ambiente Aleatório*. Ph.D. Thesis, Universidade de Évora, Évora, Portugal.

Filipe, P. A. (2018, divulgação). Modelos de equações diferenciais estocásticas e modelos mistos em crescimento individual. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística* **Outono 2018**: 76-80.

Filipe, P.A., Braumann, C.A., Carlos, C. (2015). Profit optimization for cattle growing in a randomly fluctuating environment. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* **64**(6):1393-1407.

Filipe, P.A., Braumann, C.A., Roquete, C.J. (2012). Multiphasic Individual Growth Models in Random Environments. *Methodology and Computing in Applied Probability* **14**(1):49-56.

Filipe, P.A., Braumann, C.A., Roquete, C.J. (2007). *Modelos de crescimento de animais em ambiente aleatório*. Em: Estatística Ciência Interdisciplinar. Actas do XIV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística (M.E. Ferrão, C.Nunes, C.A. Braumann, eds.). Edições SPE, pp. 401–410.

Filipe, P.A., Braumann, C.A., Brites, N.M., Roquete, C.J. (2010). Modelling Animal Growth in Random Environments: An Application Using Nonparametric Estimation. *Biometrical Journal* **52**(5):653–666.

Garcia, O. (1983). A stochastic differential equation model for the height of forest stands. *Biometrics* **39**:1059-1072.

Jacinto, G., Filipe, P.A., Braumann, C.A. (2022a). Profit optimization of cattle growth with variable prices. *Methodology and Computing in Applied Probability* **24**:1917–1952.

Jacinto, G., Filipe, P.A., Braumann, C.A. (2022b). Weighted maximum likelihood estimation for individual growth models. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* **71**(11):3295–3311.

Jacinto, G., Filipe, P. A., Braumann, C. A. (2026a, em impressão). Delta method estimation for SDE mixed models: Sensitivity to random parameter distribution. Em: Advances in Mathematical Modeling in Science, Engineering and Social Sciences (M. Bezzeghoud, F. Carapau, F. Minhós, A. Vaidya, eds.). Springer, Heidelberg.

Jacinto, G., Filipe, P.A., Braumann, C.A. (2026b, submetido). Profit Optimization With Mixed SDE Models.

Jamba, N.T., Filipe, P.A., Jacinto, G., Braumann, C.A. (2024a). Stochastic differential equations mixed model for individual growth with the inclusion of genetic characteristics. *Statistics, Optimization & Information Computing* **12**(2):298–309.

Jamba, N.T., Jacinto, G., Filipe, P.A., Braumann, C.A. (2022). Likelihood function through the delta approximation in mixed SDE models. *Mathematics* **10**(3):385.

Jamba, N.T., Jacinto, G., Filipe, P.A., Braumann, C.A. (2024b). Estimation for stochastic differential equation mixed models using approximation methods. *AIMS Mathematics* **9**(4):7866–7894.

Picchini, U., Ditlevsen, S., De Gaetano, A. (2006). Modeling the euglycemic hyperinsulinemic clamp by stochastic differential equation. *Journal of Mathematical Biology* **53**(5):771-796.

Modelos Mistos de Crescimento Individual e Problemas de Estimação

Gonçalo Jacinto, gjjacinto@ualg.pt

Universidade do Algarve, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro, Centro de I&D em Matemática e Aplicações (CIDMA)
Universidade de Évora, Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA)

Patrícia A. Filipe, patricia.filipe@iscte-iul.pt

Iscte - Instituto Universitário de Lisboa, Escola de Gestão, Departamento de Métodos Quantitativos para a Gestão e a Economia
Universidade de Évora, Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA)
Iscte - Instituto Universitário de Lisboa, Business Research Unit - Iscte (BRU-Iscte)

Nelson T. Jamba, nelson.jamba@uninbe.ao

Faculdade de Ciências Naturais, Universidade do Namibe, Namibe, Angola,
Universidade de Évora, Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA)

1. A equipa de investigação e o enquadramento do trabalho desenvolvido

No âmbito da investigação desenvolvida por Gonçalo Jacinto, Patrícia A. Filipe e Carlos A. Braumann no Grupo Operacional GOBov+, já referido no texto do Prof. Carlos A. Braumann neste Boletim, verificou-se a necessidade de incluir as características individuais de cada animal nas curvas de crescimento modeladas por equações diferenciais estocásticas, o que originou a utilização de equações diferenciais estocásticas mistas, capazes de descrever simultaneamente a variabilidade ambiental e a variabilidade dos parâmetros do modelo entre os indivíduos.

O início da investigação associada a este tópico ocorreu durante o doutoramento da Patrícia A. Filipe e foi continuado pelo doutorando Nelson T. Jamba, no Programa de Doutoramento em Matemática da Universidade de Évora. No contexto de estimação para modelos mistos de equações diferenciais estocásticas, verificou-se que a maioria das abordagens existentes, para além de aproximações (Picchini *et al.* (2010)), eram essencialmente numéricas, baseadas em diferentes métodos de aproximação da função de verosimilhança (Delattre (2021)).

Numa primeira fase foi desenvolvido o método de aproximação de Laplace para este tipo de modelos em Jamba *et al.* (2024b), permitindo obter expressões aproximadas em forma fechada através de uma expansão de Taylor de segunda ordem em torno do máximo da função integranda no integral que aparece na função de verosimilhança. Apesar do método de Laplace já ter sido desenvolvido e implementado no contexto deste tipo de modelos, por exemplo em Picchini e Ditlevsen (2011), o seu desenvolvimento teórico detalhado, enquadrando no caso particular em que se têm trajetórias não equidistantes no tempo e com diferente número de observações cada, bem como a sua implementação numérica, constituem contributos originais. Mostrou-se também que, no caso em que apenas o

parâmetro associado ao peso na maturidade do animal é aleatório, o método de Laplace conduz exatamente ao mesmo resultado que o método exato anteriormente obtido por Filipe (2011).

Estes resultados motivaram o desenvolvimento de uma nova abordagem de aproximação para o cálculo do integral que surge na função de verosimilhança, inspirada no clássico método delta da Estatística, resultando em vários artigos: Jacinto *et al.* (2026), Jamba *et al.* (2022, 2024a, 2024b). Esta abordagem foi construída para os casos em que o parâmetro α (peso na maturidade) e/ou β (taxa de crescimento) são aleatórios, conduzindo a expressões simples, em forma fechada e de fácil implementação computacional. Os métodos foram implementados em R e comparados com os métodos numéricos disponíveis (Delattre e Dion (2017), Dion *et al.* (2018)) e com o método de Laplace, apresentando muito melhor desempenho computacional do que outros métodos aproximados e, como mostram os nossos estudos de simulação, melhores estimativas. No caso de α aleatório, em que há um método exato, as estimativas do método delta, neste caso desnecessário, são muito próximas.

O presente texto pretende apresentar uma síntese dos desenvolvimentos realizados por esta equipa de investigação no contexto dos modelos mistos de crescimento individual, privilegiando a clareza da apresentação em detrimento do detalhe matemático.

2. Motivação

No texto de Patrícia A. Filipe neste Boletim, foi apresentado um modelo estocástico geral utilizado para modelar o crescimento individual, com parâmetros comuns a todos os animais. Considerando M animais, admitindo $X_i(t)$ o peso do i-ésimo animal na idade t e $Y_i(t) = h(X_i(t))$ uma transformação do peso por uma adequadamente escolhida função h estritamente monótona de classe C^1, o modelo pode ser escrito na forma de uma equação diferencial estocástica - EDE do tipo Ornstein–Uhlenbeck,

$$dY_i(t) = \beta(\alpha - Y_i(t))dt + \sigma dW_i(t),$$

onde α representa o peso transformado na maturidade, β a taxa de crescimento e σ a intensidade das flutuações ambientais e cuja condição inicial é $Y_i\left(t_{(i,0)}\right) = y_{(i,0)},\ i = 1, \dots, M$. Supõe-se que os processos de Wiener padrão W_i são independentes, onde cada W_i descreve o efeito das flutuações aleatórias do ambiente interno e externo do animal i no seu crescimento.
O pressuposto de parâmetros iguais para todos os indivíduos revela-se, no entanto, demasiado restritivo em dados reais. Diferentes animais apresentam diferentes ritmos de crescimento, diferentes idades de maturidade e diferentes respostas ao ambiente, diferenças que não podem ser explicadas apenas pela componente estocástica relativa às flutuações aleatórias do ambiente.

Os modelos mistos de crescimento individual surgem precisamente para acomodar a variabilidade das características individuais, permitindo que um ou mais parâmetros do modelo variem aleatoriamente de animal para animal. Desta forma, a variabilidade observada pode ser decomposta em duas componentes: a variabilidade ambiental, modelada pelo termo estocástico, e a variabilidade entre indivíduos, modelada pelos efeitos aleatórios em certos parâmetros. Apesar de tornarem o modelo biologicamente mais realista, surgem novos desafios ao nível da estimação, que motivam os desenvolvimentos metodológicos aqui apresentados.

3. O problema e a solução portuguesa

Apesar das vantagens conceptuais e práticas dos modelos mistos de crescimento individual, a introdução de efeitos aleatórios nos parâmetros do modelo estocástico, aumentando a complexidade da

função de verosimilhança, origina expressões integrais que não têm uma forma fechada e apenas se conseguem resolver de forma numérica.

Considere-se que $\mathbf{b}$ é um vetor de dimensão d que representa os parâmetros sujeitos a variação aleatória entre os indivíduos, sendo $\mathbf{b}_i$ o efeito aleatório associado ao animal $i, i = 1, \dots, M$. Seja $\boldsymbol{\varepsilon}$ o vetor dos restantes parâmetros do modelo, assumidos constantes e comuns a todos os animais. Admita-se que os efeitos aleatórios seguem uma distribuição com densidade $p(\mathbf{b} \mid \boldsymbol{\Psi})$, onde $\boldsymbol{\Psi}$ representa o vetor de parâmetros desconhecidos da distribuição. Sob a hipótese de independência entre os animais, os vetores $\mathbf{b}_i$, $i = 1, \dots, M$, são independentes e identicamente distribuídos e assumimos que são também independentes dos processos de Wiener que modelam as flutuações ambientais. A função de verosimilhança associada a M trajetórias observadas pode escrever-se

$$L(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Psi}) = \prod_{i=1}^{M} p_{\boldsymbol{Y}_i}(\boldsymbol{y}_i \mid \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Psi}) = \prod_{i=1}^{M} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\boldsymbol{Y}_i}(\boldsymbol{y}_i \mid \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\varepsilon})\, p(\mathbf{b}_i \mid \boldsymbol{\Psi})\, \mathrm{d}\mathbf{b}_i, \qquad (1)$$

onde $p_{\boldsymbol{Y}_i}(\boldsymbol{y}_i \mid \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\varepsilon})$ representa a função densidade conjunta das observações do animal i, condicionada ao efeito aleatório $\mathbf{b}_i$, sendo $\boldsymbol{y}_i$ o vetor dos tamanhos observados no animal i, $i = 1, \dots, M$.

O caso particular em que apenas um parâmetro é considerado aleatório, nomeadamente $\mathbf{b}_i = (\alpha_i)$ com $\alpha_i \sim \mathcal{N}(\mu, \theta^2)$, foi já estudado em Filipe (2011) e permite uma expressão em forma fechada do integral da função de verosimilhança, embora de complexidade elevada. Exemplos deste tipo de resultados podem ser encontrados, por exemplo, em Overgaard *et al.* (2005), para o caso específico de $\mu = 0$ e observações realizadas nos mesmos instantes temporais para todos os animais e com os mesmos intervalos de tempo entre observações, o que simplifica bastante as expressões, mas não ocorre nos nossos dados.

O problema na estimação surge quando o integral em (1) que define a verosimilhança marginal não tem solução analítica. Tal acontece, por exemplo, quando o parâmetro aleatório é β, ou quando ambos os parâmetros α e β são considerados aleatórios.

A contribuição portuguesa centra-se na proposta do **método de aproximação delta (método DA)** para obter uma aproximação analítica do integral da verosimilhança (Jamba, *et al.* (2022, 2024b)). O método assume parâmetros aleatórios normalmente distribuídos, $\alpha_i \sim \mathcal{N}(\mu, \theta^2)$ e $\beta_i \sim \mathcal{N}(\lambda, \omega^2)$, conduzindo a expressões fechadas e de fácil implementação. Apesar de inspirado no clássico método delta da Estatística, difere deste no objetivo e na metodologia. Em comparação com a aproximação de Laplace, apresenta resultados superiores, com a vantagem de muito maior eficiência computacional.

Uma segunda contribuição relevante é a possibilidade de aplicar o método DA a dados em que os animais são observados em idades distintas e não equidistantes, ultrapassando uma limitação dos métodos até à altura implementados em R (Delattre e Dion (2017), Dion *et al.* (2018)). Esta flexibilidade permitiu, pela primeira vez, aplicar estes modelos a dados reais que possuem estas caraterísticas e integrar a aleatoriedade das características individuais dos animais na estimação das curvas de crescimento (Jamba *et al.* (2024b)).

A utilização da distribuição normal para o parâmetro β, embora matematicamente conveniente, admite valores negativos para a taxa de crescimento, o que não é biologicamente plausível embora, na esmagadora maioria das aplicações em que a probabilidade de valores negativos é praticamente nula, não seja geralmente problemático. Em qualquer caso, para contornar esta limitação foi também desenvolvida uma reparametrização do método DA assumindo βcom distribuição log-normal (Jacinto

et al. (2026)). Os resultados mostram que a abordagem reparametrizada e o método DA original apresentam desempenhos muito semelhantes, evidenciando a robustez do método proposto.

4. Método de aproximação Delta

O método DA desenvolvido em Jamba *et al.* (2022, 2024b) baseia-se no facto de a log-verosimilhança condicional de cada indivíduo ser uma função suave dos parâmetros aleatórios. Essa função é expandida pela aproximação de Taylor de segunda ordem em torno da média populacional desses parâmetros e, de seguida, calcula-se a esperança dessa expansão relativamente à distribuição dos efeitos aleatórios, obtendo-se assim aproximação explícita da log-verosimilhança marginal. Como as esperanças dos termos centrados são nulas, o termo linear anula-se, permanecendo apenas os termos de segunda ordem da expansão.

No caso mais geral considerado, assume-se que tanto o valor assintótico como a taxa de crescimento variam entre indivíduos. Mais concretamente, considera-se que $\alpha_i \sim \mathcal{N}(\mu, \theta^2)$ e $\beta_i \sim \mathcal{N}(\lambda, \omega^2)$, admitindo a independência entre α_i e β_i, sendo o vetor de efeitos aleatórios $\boldsymbol{b}_i = (\alpha_i, \beta_i)$ enquanto o vetor dos parâmetros de efeitos fixos se reduz ao escalar $\boldsymbol{\varepsilon} = (\sigma)$. O vetor de parâmetros associado à distribuição dos efeitos aleatórios é $\boldsymbol{\Psi} = (\mu, \lambda, \theta, \omega)$, vindo:

$$p(\alpha_i, \beta_i \mid \mu, \lambda, \theta, \omega) = p(\alpha_i \mid \mu, \theta)\, p(\beta_i \mid \lambda, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} \exp\left(-\frac{(\alpha_i-\mu)^2}{2\theta^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^2}} \exp\left(-\frac{(\beta_i-\lambda)^2}{2\omega^2}\right).$$

Para obter a função de verosimilhança definida em (1), a densidade conjunta das observações do indivíduo i é dada por

$$p_{Y_i}(\mathbf{y}_i \mid \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Psi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Y_i}(\mathbf{y}_i \mid \alpha_i, \beta_i, \boldsymbol{\varepsilon})\, p(\alpha_i \mid \mu, \theta)\, p(\beta_i \mid \lambda, \omega)\, d\alpha_i\, d\beta_i.$$

Devido à propriedade de Markov da trajetória individual, quando condicionamos em α_i e β_i, a densidade conjunta pode ser fatorizada como o produto das densidades de transição entre observações consecutivas, que assumem a forma

$$p_{Y_i}(y_{i,j}, t_{i,j}, t_{i,j-1} \mid y_{i,j-1}, \alpha_i, \beta_i, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y_{i,j} - \alpha_i - (y_{i,j-1} - \alpha_i)E_{i,j}^{\beta_i}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta_i}\left(1-E_{i,j}^{2\beta_i}\right)}\right)}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta_i}\left(1-E_{i,j}^{2\beta_i}\right)}}.$$

Para simplificar a notação, escrevemos a expressão anterior na forma $u_i(\alpha_i, \beta_i) = \exp(g_i(\alpha_i, \beta_i))$, onde

$$g_i(\alpha_i, \beta_i) = \sum_{i=1}^{n_i}\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y_{i,j}-\alpha_i-(y_{i,j-1}-\alpha_i)E_{i,j}^{\beta_i}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta_i}\left(1-E_{i,j}^{2\beta_i}\right)} - \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta_i}(1-E_{i,j}^{2\beta_i})\right)\right).$$

Com esta notação, a função de verosimilhança pode ser escrita como uma esperança relativamente a uma distribuição normal bivariada de densidade $p(\alpha_i \mid \mu, \theta)\, p(\beta_i \mid \lambda, \omega)$, ou seja

$$L(\mu, \theta, \lambda, \omega, \sigma) = \prod_{i=1}^{M} \mathbb{E}[u_i(\alpha_i, \beta_i)].$$

Esta esperança matemática de $u_i(\alpha_i, \beta_i)$ pode ser obtida aproximadamente através da aproximação de Taylor de segunda ordem em torno do ponto (μ, λ):

$$u_i(\alpha_i,\beta_i) \approx u_i(\mu,\lambda) + \left[\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i}(\mu,\lambda) \quad \frac{\partial u_i}{\partial \beta_i}(\mu,\lambda)\right]\begin{bmatrix}\alpha_i-\mu\\ \beta_i-\lambda\end{bmatrix}$$
$$+\frac{1}{2}[\alpha_i-\mu \quad \beta_i-\lambda]\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \alpha_i^2}(\mu,\lambda) & \frac{\partial^2 u_i}{\partial \alpha_i\,\partial \beta_i}(\mu,\lambda)\\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial \beta_i\,\partial \alpha_i}(\mu,\lambda) & \frac{\partial^2 u_i}{\partial \beta_i^2}(\mu,\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i-\mu\\ \beta_i-\lambda\end{bmatrix}.$$

Tomando agora a esperança matemática desta expressão e tendo em conta que $\mathbb{E}[\alpha_i-\mu]=0$, $\mathbb{E}[\beta_i-\lambda]=0$,
$\mathbb{E}[(\alpha_i-\mu)^2]=\theta^2$, $\mathbb{E}[(\beta_i-\lambda)^2]=\omega^2$ e, devido à independência entre α_i e β_i, $\mathbb{E}[(\alpha_i-\mu)(\beta_i-\lambda)]=0$, obtém-se

$$\mathbb{E}[u_i(\alpha_i,\beta_i)] \approx u_i(\mu,\lambda) + \frac{\theta^2}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \alpha_i^2}(\mu,\lambda) + \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \beta_i^2}(\mu,\lambda).$$

Consequentemente, a log-verosimilhança $LL_Y(\mu,\theta,\lambda,\omega,\sigma) = \ln L(\mu,\theta,\lambda,\omega,\sigma)$ pode ser aproximada por

$$LL_Y(\mu,\theta,\lambda,\omega,\sigma) \approx \sum_{I=1}^{M} \ln\left(u_i(\mu,\lambda) + \frac{\theta^2}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \alpha_i^2}(\mu,\lambda) + \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \beta_i^2}(\mu,\lambda)\right).$$

Pela regra da cadeia, a derivada de segunda ordem de $u_i(\alpha_i,\beta_i)$ em relação a α_i pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u_i(\alpha_i,\beta_i)}{\partial \alpha_i^2} = u_i(\alpha_i,\beta_i)\left(\frac{\partial^2 g_i(\alpha_i,\beta_i)}{\partial \alpha_i^2} + \left(\frac{\partial g_i(\alpha_i,\beta_i)}{\partial \alpha_i}\right)^2\right).$$

De forma análoga, a derivada de segunda ordem de $u_i(\alpha_i,\beta_i)$ relativamente a β_i é dada por

$$\frac{\partial^2 u_i(\alpha_i,\beta_i)}{\partial \beta_i^2} = u_i(\alpha_i,\beta_i)\left(\frac{\partial^2 g_i(\alpha_i,\beta_i)}{\partial \beta_i^2} + \left(\frac{\partial g_i(\alpha_i,\beta_i)}{\partial \beta_i}\right)^2\right).$$

As expressões das derivadas de g_i podem ser consultadas em Jamba e*t al.* (2022). Maximizando a log-verosimilhança aproximada relativamente aos parâmetros, obtemos boas aproximações dos estimadores de máxima verosimilhança desses parâmetros e podemos obter intervalos de confiança aproximados usando a matriz Hessiana.

O caso de apenas β variar aleatoriamente obtém-se facilmente como particularização deste caso geral. No caso em que só α varia aleatoriamente, é preferível usar a expressão exata da verosimilhança.

5. Modelos mistos com valores genéticos

A principal motivação para a utilização de modelos mistos foi a possibilidade de incorporar as características individuais dos animais, em particular a componente genética (Jamba *et al.* (2024a)). No âmbito do projeto GOBov+, o INIAV (Instituto Nacional de Investigação Agrária e Veterinária) disponibilizou os valores genéticos para a raça Mertolenga, o que permitiu trabalhar com um conjunto de dados alargado de curvas de crescimento e valores genéticos associados. Faltava, assim, integrar essa informação nos modelos de crescimento.

Iniciou-se este estudo no caso em que o parâmetro α é aleatório, situação para a qual existe uma expressão exata e em forma fechada da função de verosimilhança. Admitindo que a caracterização genética do animal $i, i=1,\dots,M$, é dada por um valor genético v_i, considerou-se que $\alpha_i = c_0 + c_1 v_i + \delta_i$ com $\delta_i \sim N(0,\sigma_\delta^2)$, pelo que α_i segue uma distribuição normal com média dependente do valor genético. Esta parametrização permite substituir a média constante μ de α_i por uma média

individual $\mu_i = c_0 + c_1 v_i$ que incorpora o valor genético de forma linear e obter uma log-verosimilhança em forma fechada envolvendo os parâmetros c_0, c_1, σ_δ, β e σ (em vez dos parâmetros μ, θ, β e σ, usados no caso dos modelos sem a informação genética dos animais).

A relevância da inclusão do valor genético é avaliada comparando o modelo com e sem essa informação, através do teste da razão de verosimilhanças e do critério de informação de Akaike. Quando não se observam diferenças significativas, conclui-se que a média de α_i é comum a todos os animais ($\mu_i = c_0$). Caso contrário, passa a depender do valor genético, mostrando que esta informação contribui para explicar o peso na maturidade. Os resultados mostraram que a inclusão dos valores genéticos associados à longevidade reprodutiva, ao intervalo entre partos, ao ganho médio diário, ao peso de carcaça por dia de idade e ao índice de conversão alimentar conduz a uma melhoria altamente significativa do modelo. Pelo contrário, os valores genéticos relativos à capacidade maternal até ao desmame e à capacidade de crescimento até ao desmame não apresentaram um efeito estatisticamente significativo.

6. Conclusões e recomendações para a aplicação dos métodos

As conclusões sobre o desempenho do método DA foram sustentadas por estudos de simulação e pela sua aplicação a dados reais. A base de dados utilizada incluía cerca de 10 843 machos da raça Mertolenga, correspondendo a um total de 69 782 observações de peso, o que permitiu obter resultados consistentes na estimação de modelos mistos de crescimento baseados em equações diferenciais estocásticas.

A comparação entre o método DA e os métodos disponíveis na literatura, nomeadamente os implementados nos pacotes *mixedsde* (Dion *et al.* (2018)) e *MsdeParEst* (Delattre e Dion (2017)), evidencia vantagens claras do primeiro. Em geral, o método DA produz estimativas com menor viés e mais próximas dos valores verdadeiros, identificando corretamente os parâmetros fixos e aleatórios mesmo quando essa estrutura é desconhecida. Para além disso, não exige idades de observação comuns nem equidistantes, ao contrário dos métodos existentes, o que aumenta significativamente a sua aplicabilidade em dados reais.

A comparação com o método de Laplace mostra que ambos conduzem a estimativas de elevada qualidade. Quando apenas o parâmetro peso na maturidade é aleatório, o método de Laplace coincide com a verosimilhança exata, e o método DA produz resultados praticamente idênticos, mas neste caso quer um método quer outro são desnecessários pois temos a expressão fechada exata da verosimilhança. Nos restantes cenários, o método DA apresenta uma enorme vantagem computacional, por conduzir diretamente a expressões aproximadas em forma fechada, mais simples e muito rápidas de implementar.

A aplicação do método DA a dados reais de pesos de bovinos das raças Mertolenga, provenientes de um conjunto de dados extenso e heterogéneo, identificou ambos os parâmetros do modelo (α e β) como aleatórios, evidenciando variabilidade individual persistente não explicada apenas pelas flutuações ambientais. Estes resultados confirmam que os modelos mistos permitem capturar diferenças estruturais entre animais, melhorando o ajuste das curvas de crescimento e a interpretação biológica dos parâmetros.

A comparação entre modelos mistos com e sem inclusão de valores genéticos mostrou que apenas alguns valores genéticos apresentam um efeito estatisticamente significativo na estimação do peso assintótico dos animais, indicando que animais com melhor mérito genético nestas características tendem a atingir maiores pesos na maturidade.

Com base nos resultados obtidos, recomenda-se a utilização do método DA com ambos os parâmetros aleatórios como abordagem inicial quando não existe conhecimento prévio sobre a estrutura dos efeitos aleatórios, dada a sua robustez, baixo custo computacional e capacidade de identificar corretamente o modelo. Quando a análise preliminar indicar a existência de apenas um parâmetro aleatório, devem ser utilizadas versões específicas do modelo, recorrendo à verosimilhança exata sempre que disponível.

7. Trabalho futuro

Esta linha de investigação continua a desenvolver novos temas de investigação nos modelos mistos de crescimento individual. Pretendemos estudar a possível correlação entre os efeitos aleatórios, uma vez que a sua existência pode influenciar as estimativas, nomeadamente o desvio-padrão associado ao peso assintótico dos animais. Está também em curso o desenvolvimento de uma versão melhorada do método delta, com o objetivo de obter estimativas mais precisas, bem como a implementação dos métodos num pacote em linguagem R que permita a sua utilização de forma mais simples e sistemática por outros investigadores.

Do ponto de vista metodológico, pretende-se ainda estender o modelo misto de forma a permitir que o parâmetro de crescimento aleatório β dependa dos valores genéticos dos animais. Pretendemos ainda generalizar esta abordagem à inclusão simultânea de vários valores genéticos, em vez da sua consideração individual, tanto no modelo com α aleatório como no modelo com β aleatório, bem como na situação em que ambos os parâmetros são aleatórios.

Agradecimentos

Gonçalo Jacinto é membro do CIDMA, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, referências UID/04106/2025 (https://doi.org/10.54499/UID/04106/2025) e UID/PRR/04106/2025 (https://doi.org/ 10.54499/UID/PRR/04106/2025) e colaborador do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, referência UID/04674/2025 (https://doi.org/10.54499/UID/04674/2025).

Patrícia A. Filipe é membro do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, referência UID/04674/2025 (https://doi.org/10.54499/UID/04674/2025).

Nelson T. Jamba é colaborador do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, referência UID/04674/2025 (https://doi.org/10.54499/UID/04674/2025).

Durante alguns anos os trabalhos decorreram no âmbito e com o apoio do Grupo Operacional GOBov+, PDR2020-1.0.1-FEADER-031130-GOBovMais-*Productivity improvement in the system of bovine raising for meat*, com financiamento do PDR 2020.

Referências

Delattre, M.; (2021). A review on asymptotic inference in stochastic differential equations with mixed effects, *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, 4.

Delattre, M.; Dion, C. (2017). Msdeparest: Parametric estimation in mixed-effects stochastic differential equations, R package version 1.7.

Dion, C.; Samson A.; Hermann, S. (2018). mixedsde: Estimation methods for stochastic differential mixed effects models, R package version 5.0.

Filipe, P.A. (2011). Equações Diferenciais Estocásticas na Modelação do Crescimento Individual em Ambiente Aleatório. Ph.D. Thesis, Universidade de Évora, Évora, Portugal.

Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2026, em impressão). Delta method estimation for SDE mixed models: Sensitivity to random parameter distribution. Em: Advances in Mathematical Modeling in Science, Engineering and Social Sciences (M. Bezzeghoud, F. Carapau, F. Minhós, A. Vaidya, eds.). Springer, Heidelberg.

Jamba, N. T.; Filipe, P. A.; Jacinto, G.; Braumann, C. A. (2024a). Stochastic differential equations mixed model for individual growth with the inclusion of genetic characteristics. *Statistics, Optimization & Information Computing* **12**(2): 298-309.

Jamba, N. T.; Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2022). Likelihood function through the delta approximation in mixed SDE models. *Mathematics* **10**(3): 385.

Jamba, N. T.; Jacinto, G.; Filipe, P. A.; Braumann, C. A. (2024b). Estimation for stochastic differential equations mixed models using approximation methods. *AIMS Mathematics* **9**(4): 7866-7894.

Picchini, U.; Gaetano, A.D.; Ditlevsen, S. (2010). Stochastic differential mixed-effects models. *Scandinavian Journal of Statistics* **37**(1): 67–90.

Picchini, U.; Ditlevsen, S. (2011). Practical estimation of high dimensional stochastic differential mixed effects models. *Computational Statistics & Data Analysis:* **55**(3): 1426–1444.

Overgaard, R.V. ; Jonsson, N. ; Tornoe, C.W. ; Madsen, H. (2005). Non-linear mixed-effects models with stochastic differential equations: Implementation of an estimation algorithm. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics* **32**: 85–107.

Ciência Estatística

• Capítulo de Livros

Título: Monitoring the Value at Risk with Applications to Finance.
Autores: Morais, M.C., Okhrin, Y., Schmid, W.
Ano:2026
Frontiers in Statistical Quality Control (Vol. 14).
https://link.springer.com/book/9783032029744

Título: May 16, 1924–2024: Celebrating the Centenary of Shewhart's QualityControl Chart.
Autor: Morais, M.C.
Ano:2026
Frontiers in Statistical Quality Control (Vol. 14)
https://link.springer.com/book/9783032029744

Título: "Living in random environments".
Autor: Carlos A. Braumann
Ano:2026
"Honorary lecture" de abertura da conferência,
DSABNS 2026 - 17th Conference on Dynamical Systems Applied to Biology and Natural Sciences
https://sites.google.com/bcamath.org/dsabns-2026/scientific-programme/book-of-abstracts
ISBN: 978-989-53589-2-2, p. 1-2

• Tese de Mestrado

Título: *On ARL-unbiased EWMA-type charts for independent binomial counts*
Autor: Tiago Jorge Lima Soromenho, *tiago.soromenho@tecnico.ulisboa.pt*
Orientador: Manuel João Cabral Morais
Informação complementar: https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/cursos/mma/dissertacao/283828618791350

Edições SPE - Minicursos

Título: O guia do viajante para uma aprendizagem de máquina responsável: Versão para o programa R
Autores: P. Biecek, A. Kozak e A. Zawada
Ano: 2025.

Título: *Análise Estatística de Dados Financeiros*
Autores: C. Amado, C. Nunes, A. Sardinha
Ano: 2019.

Título: *Uma introdução à Meta-Análise*
Autora: Maria de Fátima Brilhante
Ano: 2017.

Título: *Estatística Bayesiana Computacional – uma introdução*
Autores: M. Antónia Amaral Turkman e Carlos Daniel Paulino
Ano: 2015.

Título: *Análise de Valores Extremos: Uma Introdução*
Autoras: M. Ivette Gomes, M. Isabel Fraga Alves e Claudia Neves
Ano: 2013.

Título: *Modelos com Equações Estruturais*
Autora: Maria de Fátima Salgueiro
Ano: 2012.

Título: *Análise de Dados Longitudinais*
Autoras: Maria Salomé Cabral e Maria Helena Gonçalves
Ano: 2011

Título: *Uma Introdução à Estimação Não-Paramétrica da Densidade*
Autor: Carlos Tenreiro
Ano: 2010

Título: *Análise de Sobrevivência*
Autoras: Cristina Rocha e Ana Luísa Papoila
Ano: 2009

Título: *Análise de Dados Espaciais*
Autoras: M. Lucília de Carvalho e Isabel C. Natário
Ano: 2008

Título: *Introdução aos Métodos Estatísticos Robustos*
Autores: Ana M. Pires e João A. Branco
Ano: 2007

Título: *Outliers em Dados Estatísticos*
Autor: Fernando Rosado
Ano: 2006

Título: *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações*
Autor: Carlos Braumann
Ano: 2005

Título: *Uma Introdução à Análise de Clusters*
Autor: João A. Branco
Ano: 2004

Título: *Séries Temporais – Modelações lineares e não lineares*
Autoras: Esmeralda Gonçalves e Nazaré Mendes Lopes
Ano: 2003 (2ª Edição em 2008)

Título: *Modelos Heterocedásticos. Aplicações com o software Eviews*
Autor: Daniel Muller
Ano: 2002

Título: *Inferência sobre Localização e Escala*
Autores: Fátima Brilhante, Dinis Pestana, José Rocha e Sílvio Velosa
Ano: 2001

Título: *Controlo Estatístico de Qualidade*
Autoras: Maria Ivette Gomes; Fernanda Figueiredo e Maria Isabel Barão
Ano: 1999 (2.ª edição, revista e aumentada, 2010)

Título: *Tópicos de Sondagens*
Autor: Paulo Gomes
Ano: 1998

Boletim através do Tema Central

Disponíveis em https://www.spestatistica.pt/publicacoes/categoria/boletim-da-spe

Outono de 2025 – INE – 90 anos de rigor e inovação ao serviço da Sociedade
Primavera de 2025 – Teoria das Filas de Espera
Outono de 2024 – Replicabilidade e Controlo de Confidencialidade
Primavera de 2024 – *Rising Stars*
Outono de 2023 – Educação (e) Estatística
Primavera de 2023 – PORTSEA – um mar de Extremos em Portugal
Outono de 2022 – Prémios na Sociedade Portuguesa de Estatística
Primavera de 2022 – Liderança Estatística
Outono de 2021 – *Machine Learning* e Inteligência Artificial
Primavera de 2021 – Especial Covid: a Estatística ao serviço da sociedade
Outono de 2020 – 40 anos SPE: De onde viemos? Onde estamos? Para onde vamos?
Primavera de 2020 – INE–85 anos de estatísticas a servir o país
Outono de 2019 – Estatística nas Ciências da Saúde
Primavera de 2019 – Séries Temporais de Valor Inteiro
Outono de 2018 – Equações diferenciais estocásticas e algumas aplicações
Primavera de 2018 – Estatística Multivariada – perspetiva no século XXI
Outono de 2017 – O Tema Central da Estatística - um novo olhar
Primavera de 2017 – Incerteza em Engenharia
Outono de 2016 – O Tema Central da Estatística
Primavera de 2016 – Séries Temporais e suas aplicações
Outono de 2015 – Estatística em Genética
Primavera de 2015 – Estatística no Desporto
Outono de 2014 – Estatística no Ensino Básico e Secundário
Primavera de 2014 – (Um) Ano Internacional da Estatística
Outono de 2013 – A "Escola Bayesiana" em Portugal
Primavera de 2013 – Estatística não - paramétrica
Outono de 2012 – Métodos Estatísticos em Medicina
Primavera de 2012 – Estatística no Ensino Superior Politécnico
Outono de 2011 – Análise de Sobrevivência
Primavera de 2011 – Sondagens e Censos
Outono de 2010 – Estatística Espacial
Primavera de 2010 – Data Mining - Prospecção (Estatística) de Dados?
Outono de 2009 – Modelos Econométricos
Primavera de 2009 – Investigação (em) Estatística
Outono de 2008 – Processos Estocásticos
Primavera de 2008 – ALEA - Um sítio do nosso mundo
Outono de 2007 – Bioestatística
Primavera de 2007 - A "Escola de Extremos" em Portugal
Outono de 2006 – Ensino e Aprendizagem da Estatística

• Regulamento dos Prémios Estatístico Júnior 2026

PRÉMIOS "ESTATÍSTICO JÚNIOR 2026"

REGULAMENTO

Está aberto até 31 de maio de 2026 o concurso para atribuição dos prémios "Estatístico Júnior 2026", de acordo com o seguinte regulamento:

1. Objetivo

A atribuição dos prémios "Estatístico Júnior 2026" é promovida pela Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE), com o apoio do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA). O objetivo é estimular e desenvolver o interesse dos alunos dos Ensinos Básico e Secundário pelas áreas de Probabilidade e Estatística, incentivando-os a realizar análises estatísticas de dados reais, nomeadamente através do projeto Census na Escola.

2. Candidatos Elegíveis

Podem candidatar-se aos prémios "Estatístico Júnior 2026" os alunos inscritos, no ano letivo 2025/26, no 3.º Ciclo do Ensino Básico, no Ensino Secundário, nos Cursos de Educação e Formação (CEF) ou nos Cursos de Educação e Formação de Adultos (CEFA).

3. Forma de Candidatura

As candidaturas podem ser individuais ou em grupo com um máximo de 3 alunos. Cada candidatura pode ainda incluir um professor do grau de ensino correspondente ao trabalho, que desempenhará o papel de orientador.

4. Proposta de Trabalho

Os candidatos devem apresentar um trabalho que envolva temáticas de Probabilidade ou Estatística. A proposta de trabalho pode ser baseada na recolha e análise de dados reais, conforme sugerido no projeto Census na Escola. Os alunos são incentivados a criar inquéritos online para recolher dados sobre a sua turma ou outras turmas, com variáveis como hábitos de leitura, alimentação, atividade física, uso de tecnologia, padrões de sono, entre outros.

5. Estrutura do Trabalho

O trabalho deverá consistir num texto escrito em português com um máximo de 10 páginas A4, com tipo, tamanho e estilo de letra padrão. Este texto deve incluir:

- Explicação da metodologia de recolha de dados.
- Análise dos dados recolhidos, incluindo medidas de tendência central e dispersão.
- Comparações entre grupos (e.g., género, faixas etárias, turmas).

O texto deverá ser acompanhado de um dos seguintes formatos:

- Um vídeo (máximo de 5 minutos) que resuma os principais aspetos do trabalho;
- Uma apresentação em PowerPoint/Google Slides/Canvas (máximo de 20 slides);
- Um poster em formato A2.

6. Prémios

Serão atribuídos prémios "Estatístico Júnior 2026" a sete trabalhos: três para os melhores do 3.º Ciclo do Ensino Básico, três para os melhores do Ensino Secundário, e um para o melhor trabalho dos Cursos CEF ou CEFA. Os prémios consistirão em livros juvenis de divulgação científica, que serão entregues numa cerimónia pública.

7. Prémios para Professores Orientadores

O professor orientador do trabalho classificado em 1.º lugar em cada grau de ensino receberá uma anuidade gratuita como sócio da SPE e um livro de divulgação científica.

8. Submissão das Candidaturas

A candidatura deve ser composta pelo Boletim de Candidatura devidamente preenchido e pelo trabalho (texto e vídeo/apresentação/poster). Se for submetido um vídeo, o link para o vídeo deve ser incluído no Boletim de Candidatura. A submissão pode ser feita:

a) Em formato digital (PDF) por e-mail para: spe@spestatistica.pt

b) Em formato físico, juntamente com o link para o vídeo, se aplicável, para:
Sociedade Portuguesa de Estatística – Bloco C6, Piso 4 – Campo Grande – 1749-016 Lisboa.

9. Prazos e Validação

O carimbo do correio validará a data de entrega do trabalho. Os autores serão notificados da receção da candidatura por e-mail no prazo de uma semana.

10. Avaliação dos Trabalhos

A avaliação dos trabalhos será feita por um júri nomeado pela Direção da SPE. As decisões do júri são soberanas e não sujeitas a recurso.

11. Anúncio dos Resultados e Entrega dos Prémios

Os resultados serão anunciados após a deliberação do júri, e a entrega dos prémios será feita numa sessão pública dedicada.

12. Possibilidade de Não Atribuição dos Prémios

Os prémios "Estatístico Júnior 2026" poderão não ser atribuídos, caso não haja trabalhos que cumpram os critérios de qualidade estabelecidos pelo júri.

13. Documentos de Candidatura

O boletim de candidatura e o regulamento podem ser obtidos em www.spestatistica.pt.

Apoios

CIDMA CENTRO DE I&D EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES CENTER FOR R&D IN MATHEMATICS AND APPLICATIONS

fct Fundação para a Ciência e a Tecnologia

DOI:10.54499/UID/04106/2025

• Guião de Trabalho para Estatístico Júnior 2026

Census na Escola

- **Objetivo:** Este projeto incentiva os alunos a recolher dados sobre si próprios e as suas turmas, com o objetivo de analisar e interpretar estatísticas reais. Os dados podem incluir mais do que uma turma ou até abranger diferentes anos letivos. Para garantir uma análise representativa, é importante que os dados sejam recolhidos de uma amostra equilibrada, levando em consideração fatores como ano de escolaridade, género, entre outros.
- **Como funciona:** Os alunos podem elaborar um inquérito para ser preenchido online, fornecendo dados sobre diversos aspetos, como hábitos de leitura, alimentação (por exemplo, se são veganos, vegetarianos, ou se preferem carne ou peixe), atividade física (tempo dedicado, tipo de atividades), uso de tecnologia (incluindo telemóveis, redes sociais e tempo de utilização), padrões de sono, preferências de carreiras futuras, entre outros. Esses dados são, posteriormente, utilizados para realizar uma análise estatística.
- **Desafios propostos:** Análise dos dados recolhidos para responder a perguntas como "Qual é a altura média dos alunos de 15 anos na minha escola?" ou "Existe uma diferença significativa no tempo gasto em atividades físicas entre rapazes e raparigas da minha turma?" Os alunos poderão comparar resultados entre diferentes grupos, como anos letivos, géneros ou faixas etárias, para identificar padrões e tendências nos dados recolhidos.

A execução destes trabalhos fará com que os alunos aprendem a lidar com grandes conjuntos de dados, a calcular medidas de tendência central e dispersão, e a criar gráficos e tabelas para visualizar informações.

Será interessante para a SPE possuir diferentes resultados e ter uma ideia sobre como se comparam com os de outros alunos no mesmo país.

Ferramentas sugeridas:

- Google Forms que permite criar inquéritos e questionários de maneira rápida e intuitiva. Uma alternativa similar é o Microsoft Forms.
- Excel, Google Sheets ou Google Forms para organizar os dados, fazer os cálculos e obter gráficos para resumir os dados.
- Calculadoras científicas para as medidas de dispersão (se não usarem o Excel).
- Ferramentas online (como Canva ou Google Slides) para a apresentação.

• Regulamento do Prémio SPE 2026

SPE
Sociedade Portuguesa de Estatística

Prémio SPE 2026

Pretendendo estimular a atividade de estudo e investigação científica em Probabilidade e Estatística, a Sociedade Portuguesa de Estatística institui em 2026 o Prémio SPE, regido pelo seguinte regulamento.

Está aberto até 15 de Setembro de 2026 o concurso para atribuição do Prémio SPE 2026, doravante referido como prémio. O prémio é constituído por uma quantia de 1000 euros.

Ao prémio podem concorrer trabalhos originais sobre temas de Probabilidade e Estatística, desde que não tenham sido objeto de qualquer prémio atribuído por outra instituição. O trabalho deverá ser apresentado em português ou em inglês e não poderá exceder 25 páginas A4.

Podem candidatar-se ao prémio jovens investigadores sócios da SPE que não completem 35 anos de idade até 31 de Dezembro de 2026 ou que tenham obtido doutoramento há menos de 5 anos, e que nunca tenham recebido o prémio.

A decisão de admissibilidade e a apreciação dos trabalhos submetidos a concurso é da competência de um Júri, cuja nomeação é da responsabilidade da Direção da SPE.

Os critérios de seleção pautar-se-ão pela exigência e precisão nos vários aspetos que o Júri considerar pertinentes, nomeadamente: i) qualidade e clareza do texto; ii) inovação e rigor científico; iii) contribuição para o desenvolvimento da área de Probabilidade e Estatística nos planos teórico, metodológico e/ou aplicado.

O Júri é soberano nas suas decisões, não havendo lugar a recurso.

O Júri reserva-se o direito de não atribuir o Prémio SPE 2026 e poderá solicitar prova das condições de admissão.

As candidaturas ao prémio, dirigidas ao Presidente da Sociedade Portuguesa de Estatística, são constituídas pelo trabalho concorrente e pelo curriculum vitae dos autores, e devem ser enviadas por correio eletrónico para spe@spestatistica.pt. Cada autor só pode submeter uma candidatura ao prémio.

A entrega formal do Prémio SPE 2026, com apresentação obrigatória do trabalho galardoado, terá lugar durante o XXVIII Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística—SPE 2027.

O MUNDO DA ESTATÍSTICA

ORGANIZAÇÃO PARTICIPANTE

Índice

Editorial 2

Mensagem do Presidente 4

Notícias 5

Enigmística 14

Episódio na História da Estatística

SPE 2030

Fernando Rosado 15

SPE e a Comunidade

CEAUL 50 anos – A investigar desde 1975

Marília Antunes et al 17

BioEconomia no Crescimento Estocástico – Uma Contribuição Portuguesa

Crescimento Estocástico – um Grupo de Investigação nascido em Évora

Carlos A. Braumann 25

Modelos de crescimento populacional: tempos de extinção e impacto dos efeitos de Allee

Clara Carlos 42

Modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório:
políticas de pesca e otimização do lucro

Nuno M. Brites 49

Modelos estocásticos de crescimento individual e otimização do lucro

Patrícia A. Filipe e Gonçalo Jacinto 56

Modelos Mistos de Crescimento Individual e Problemas de Estimação

Gonçalo Jacinto, Patrícia A. Filipe e Nelson T. Jamba 63

Ciência Estatística 71

Capítulos de Livros 71

Tese de Mestrado 71

Edições SPE - Minicursos 72

Boletim através do Tema Central 73

Regulamento dos Prémios Estatístico Júnior 2026 74

Guião de Trabalho para Estatístico Júnior 2026 76

Regulamento do Prémio SPE 2026 77

Este boletim tem o apoio de:

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR